سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

سکونیات

(لونی صاحب کی کتاب ایلی منٹس آف سٹیٹکس کا اردو ترجمہ)

انٹرمیڈیٹ کے لئے

از

خان فضل محمد خان صاحب ایم۔اے (پنجاب) بی۔اے (کیمبرج)

رینگلر سنہ ۱۹۰۵ء۔ گورنمنٹ آف انڈیا سکالر سنہ ۱۹۰۳-۵ء سکالر ریزیڈنٹ جانز کالج کیمبرج سنہ ۱۹۰۳-۰۶ء

فیلو پنجاب یونیورسٹی سنہ ۱۹۱۶-۱۱ء

رفیق جامعہ عثمانیہ

پرنسپل مدرسۂ فوقانیہ انگریزی بلدہ سرکار عالی۔

سنہ ۱۳۳۷ھ م سنہ ۱۳۲۸ف م سنہ ۱۹۱۹ء

مطبوعۂ دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

مُقدّمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دَور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر
اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔
جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے
کموڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں
جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر
بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح **یونان** کا اثر روما
اور دیگر اقوام **یورپ** پر پڑا جس طرح **عرب** نے **عجم** کو
اور **عجم** نے **عرب** کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے
یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی
اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔
یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ
آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں
پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت
اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی،
ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت
یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی
زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات
میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک
نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی، جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سر سیّد احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ اُنہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور مت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیحضرت واقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شائستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علمِ ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علمِ ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت واقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان
میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم
ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے
ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں،
جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام
اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے
پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس
کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور
تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے
کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض
تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے
اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی
نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح
ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی
پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ
طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد
کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر
مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم
و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد
کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی ۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں ۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں ۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے ۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے ، کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقینِ علم تک پہنچ جائیں گی ۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا ۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے ۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان ۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے ۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے ۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو ۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں، جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں ۔ علاوہ اِن کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہلِ زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جراُت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیرمانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہوسکے، بلکہ **فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف **اصطلاحاتِ علمیہ** تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روز مرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ دلین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کامل ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کردی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہوکر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور **اعلیٰحضرت واقدس** کی نظرِ کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنھوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنھیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبد الحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکانِ دارالترجمہ

مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ناظم۔
قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر۔ ۔ ۔ ۔ مترجم ریاضیات
چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم سائنس
مولوی سید ہاشمی صاحب۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم تاریخ۔
مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ مترجم معاشیات
قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم سیاسیات
مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم تاریخ۔
مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم فلسفہ و منطق
مولوی عبدالحلیم صاحب شرر۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مولف تاریخ اسلام
مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم قانون۔
مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظرثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب — وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمید الدین صاحب بی۔اے — صدر دارالعلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحید الدین صاحب سلیم

مولوی عبد الحق بی۔اے — ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔اے رنیگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبد الرحمٰن صاحب۔بی۔ایس۔سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔بی۔اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

سکونیات

فہرست مضامین

بسم اللہ الرحمن الرحیم

سکونیات

باب اول

تمہید

(۱) جسم۔ مادہ کا ایک حصہ ہے جو ہر طرف سے محدود ہو +

(۲) قوت۔ وہ ہے جو ایک ساکن جسم میں حرکت پیدا کرتی ہے۔ یا حرکت پیدا کرنے کی قابلیت رکھتی ہے۔ یا جو ایک متحرک جسم کی حرکت کو بدل دیتی ہے یا بدلنے کی قابلیت رکھتی ہے +

(۳) سکون۔ ایک جسم کو ساکن کہتے ہیں جب کہ وہ بہ لحاظ اجسام گرد و پیش اپنے مقام کو نہ بدلے +

(۴) **علم جرثقیل** میں اجسام کے سکون اور حرکت کے قوانین سے بحث ہوتی ہے۔ اس کے دو حصے ہیں سکونیات اور متحرکات۔
سکونیات وہ علم ہے جس میں اجسام پر قوتوں کے اثر کا بیان ہو جب کہ ان قوتوں کی ترتیب ایسی ہو کہ اجسام ساکن رہیں۔
وہ علم جس میں متحرک اجسام پر قوتوں کے اثر کی بحث ہو **متحرکات** کہلاتا ہے +

(۵) ذرہ مادہ کا ایک حصہ ہے جو مقدار میں نہایت ہی چھوٹا ہو۔ اور جس کے مختلف اجزا کے باہمی فاصلے اس قدر قلیل ہوں کہ ان کو حسابی تحقیقات میں نظر انداز کیا جاسکے +
ایک جسم نہایت ہی قلیل ذرات کی لا انتہا تعداد کا مجموعہ خیال کیا جاسکتا ہے +

(۶) **جسم استوار**۔ وہ ہے جس کے اجزا بہ لحاظ ایک دوسرے کے اپنے مقام کو نہ بدلیں +
اس کا تصور ذرے کی طرح خیالی ہے۔ قدرتی اجسام میں کو بھی کامل طور پر استوار نہیں ہے +
قوت کے اثر سے ہر ایک جسم کے اجزا کا باہمی فاصلہ کچھ نہ کچھ ضرور بدلتا ہے۔ اگر لکڑی کی چھڑی کا ایک سرا مضبوطی سے قایم رکھکر دوسرے سرے کو کھینچیں تو لکڑی طول میں قدرے بڑھ جائے گی۔ اور اگر لوہے کی سلاخ پر یہی عمل کیا جائے تو اس کی لمبائی میں تغیر بہت کم ہوگا +
اپنی تحقیقات کی سہولت کے لئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ

اجسام پورے طور پر استوار ہیں +

(۷) **مساوی قوتیں**۔ اگر دو قوتیں ایک ذرے پر متقابل سمتوں میں عمل کریں اور ذرہ ساکن رہے۔ تو وہ قوتیں مساوی کہلاتی ہیں

(۸) ایک جسم میں جس قدر مادہ ہو وہ اس کی مقدارِ مادہ کہلاتی ہے۔

انگلستان میں مقدار مادہ کی اکائی ایک پلاٹینم کا ٹکڑا ہے۔ جو وہاں کے دفتر فنانس میں محفوظ ہے اور اس کو پونڈ کہتے ہیں +

پس جب ہم کہتے ہیں کہ ایک جسم کی مقدار مادہ دو ۲ تین ۳ چار ۴ ... پونڈ ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس جسم میں پلاٹینم کی مقدار معینہ مذکورہ سے دو تین چار ....گنا مادہ موجود ہے +

فرانس اور دیگر ممالک میں مقدار مادہ کی اکائی نظریات میں گرام ہے جو کہ تقریباً ۱۵٫۴۳۲ گرین کے برابر ہے۔ اور عملیات میں کیلوگرام (ایک ہزار گرام) ہے جو قریباً ۲٫۲۰۴۶ پونڈ کے برابر ہے +

(۹) **وزن**۔ وزن کے تصور سے ہر ایک شخص بخوبی واقف ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی جسم کو زمین پر گرنے سے روکنے کے لئے کسی قدر زور درکار ہے +

علم حرکت میں ہم کو معلوم ہوگا کہ زمین ہر ایک جسم کو اپنی طرف اتنی قوت سے کھینچتی ہے جو اس جسم کی مقدار مادہ کے متناسب ہوتی ہے۔ جس قوت سے زمین کسی جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے وہ اس کا وزن کہلاتا ہے +

(۱۰) پیمائشِ قوت۔ علم سکون میں ہم قوت کی اکائی ایک پونڈ کا وزن مقرر کریں گے۔ لہٰذا قوت کی اکائی اس قوت کے مساوی ہے۔ جو ایک پونڈ کے معلق مادہ کو سہارنے کے قابل ہو+

علم حرکت میں ہم کو معلوم ہوگا کہ ایک پونڈ کا وزن کرۂ ارض کے مختلف مقامات پر بالکل یکساں نہیں ہے مگر علم سکون میں سطح زمین کے مختلف مقامات پر قوتوں کا مقابلہ کرنیکی ضرورت نہیں ہوگی۔ اس لئے پونڈ کے وزن کے تغیرات علم سکون میں عملی اہمیت نہیں رکھتے۔ لہٰذا ہم ان تغیرات کو نظر انداز کریں گے۔ اور ایک پونڈ کے وزن کو غیر متبدل فرض کریں گے۔

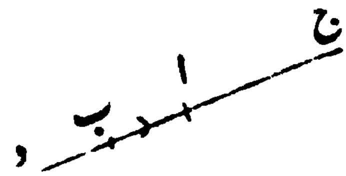
(۱۱) ہم اپنے عملی حسابات میں "ایک پونڈ کے وزن" کو بالعموم اختصاراً "ایک پونڈ" کہیں گے۔ اس سے طالب علم سمجھ جائے گا کہ دس پونڈ کی قوت" کے معنے" ایک ایسی قوت ہے جو دس پونڈ کے وزن کے برابر ہو"

(۱۲) قوتوں کو خطوط مستقیم سے تعبیر کرنا۔ ایک قوت کلی طور پر معلوم ہوسکتی ہے جب کہ ہم کو اس کے متعلق تین باتیں معلوم ہوں۔

(۱) مقدارِ قوت (۲) سمتِ قوت (۳) نقطۂ عملِ قوت۔ یعنی جسم کا وہ نقطہ جہاں قوت عمل کرتی ہے۔ پس ایک ایسے خط مستقیم سے قوت کی تعبیر جو اس کے نقطہ عمل ہیں سے گزرے نہایت موزوں ہے کیونکہ خط مستقیم کی مقدار اور سمت دونوں ہوتی ہیں +

مثلاً۔ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم و ا دس پونڈ قوت کو

تعبیر کرتا ہے جس کا نقطہ عمل و ہے اس سمت میں عمل کرنے والی پانچ پونڈ قوت و ب سے تعبیر ہوگی۔ جہاں کہ ب' و ا کا نقطۂ تنصیف ہے۔ اور بیس پونڈ قوت و ج سے تعبیر ہوگی۔ جہاں کہ و ا اتنا خارج کیا گیا ہے کہ



ا ج، و ا کے برابر ہے۔
سمتِ قوت کو اکثر تیر کی شکل سے ظاہر کرتے ہیں +

(۱۳) **اقسام قوت**۔ ایک جسم پر اثر کرنے کے لئے قوت تین مختلف صورتیں اختیار کرسکتی ہے اول کشش یا جذب۔ دوم تناؤ سوم تعامل یا جواب عمل۔

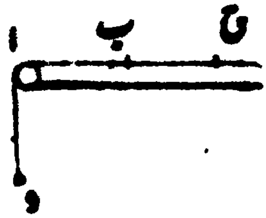
(۱۴) **کشش یا جذب**۔ یہ ایسی قوت ہے جس سے ایک جسم دوسرے جسم کو بغیر کسی ظاہری توسط اور بغیر لازماً مس کرنے کے کھینچتا ہے +

مثلاً۔ زمین ہر ایک جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ اس کشش کا نام وزن ہے اور اس کتاب میں صرف یہی مثال کشش یا جذب کی آئے گی +

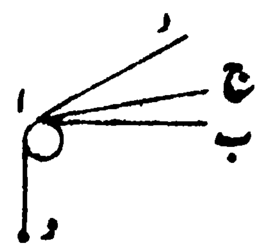
(۱۵) **تناؤ**۔ اگر ہم ایک رسی کا ایک سرا ایک جسم کے کسی مقام پر باندھ دیں۔ اور رسی کا دوسرا سرا کھینچیں۔ تو اس جسم پر ایک قوت کا اثر ہوگا۔ ایسی قوت جو رسی یا لکڑی کے ذریعہ سے عمل کرتی ہے تناؤ کہلاتی ہے +

اگر رسی ہلکی ہو۔ یعنی اگر اس کا وزن اس قدر قلیل ہوکر

نظر انداز ہو سکے۔ تو جو قوت رسی کے ذریعہ عمل کرتی ہے وہ اس کے طول کے ہر مقام پر یکساں ہوگی +



مثلاً۔ اگر ایک وزن و ایک رسی کے سہارے ایک میز کے چکنے کنارے پر سے لٹک رہا ہے تو یہ معلوم ہوگا کہ قوت خواہ رسی کے نقطہ ا پر عمل کرے یا ب پر یا ج پر قوت کی مقدار وہی ہوگی۔ اب چونکہ وزن کو سہارنے کے واسطے نقطہ ا پر جس قوت کی ضرورت ہے وہ ہر حالت میں یکساں ہے۔ پس ثابت ہوا کہ نقطہ ا پر اثر ایک ہی ہوتا ہے۔ خواہ رسی کے کسی مقام پر قوت عمل کرے۔ لہذا رسی کے طول کے ہر ایک مقام پر تناؤ یکساں ہوگا +



دیگر۔ فرض کرو کہ ایک رسی ایک چکنی کھونٹی ا پر سے گزرتی ہے اور اس کے ایک سرے سے وزن و لٹکتا ہے۔ تو یہ معلوم ہوگا۔ کہ اس کو سہارنے کے لئے رسی کے دوسرے سرے پر ایک ہی قوت لگانا پڑیگی خواہ رسی کی سمت اب ہو یا اج یا اد اور یہ قوت وزن و کے برابر ہوگی +

(ان قوتوں کی مقدار معلوم کرنے کے لئے کمانی دار ترازو کا استعمال کیا جاسکتا ہے)

لہذا ایک ہلکی رسی کا تناؤ جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے اس کے طول کے ہر مقام پر یکساں ہے۔ اگر دو یا زیادہ

رسیوں میں گرہ ڈالدی جائے تو ہر ایک رسی کا تناؤ یکساں ہونا ضروری نہیں ہے۔ طالب علم کو یاد رکھنا چاہیئے۔ کہ ایک رسی کے تناؤ کا اس کے طول سے کچھ تعلق نہیں۔ عام طور پر یہ خیال کیا جاتا ہے کہ جس قدر لمبی رسی ہوگی اسی قدر اس کا تناؤ زیادہ ہوگا۔ مگر یہ غلط ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ اگر ہم لمبی رسی استعمال کریں تو قوت لگانے میں سہولت ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے مبتدی اکثر یہ فرض کرلیتا ہے کہ جتنی زیادہ لمبی رسی ہوگی اتنا زیادہ تناؤ ہوگا +

(۱۶) **تعامل**۔ اگر ایک جسم دوسرے جسم کے سہارے کھڑا ہو یا اس پر دباؤ ڈالے تو دونوں اجسام اپنے مقام اتصال پر ایک قوت سے موثر ہوں گے ایسی قوت کو تعامل کہتے ہیں۔ دونوں اجسام ایک دوسرے پر مساوی قوتوں سے متقابل سمتوں میں عمل کرتے ہیں علیحدہ علیحدہ پہلے جسم کا عمل کہلاتا ہے اور دوسرے کا جواب عمل + یہ اصول نیوٹن کے تیسرے قانونِ حرکت میں شامل ہے۔

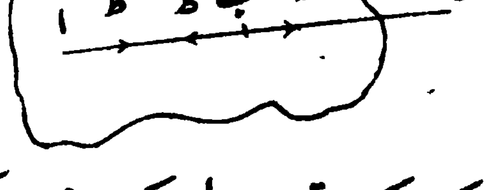
امثال۔ اگر ایک زینہ ایک دیوار کے سہارے کھڑا ہو تو جس قوت سے زینہ کا سرا دیوار پر عمل کرتا ہے اسی قوت سے دیوار متقابل سمت میں زینے کے سرے پر عمل کرتی ہے۔ اگر لکڑی کا ایک مکعب میز پر رکھا جائے تو جس قوت سے مکعب میز کو نیچے دبائے گا اسی قوت سے میز مکعب کو اوپر کی طرف دبائے گا +

(۱۷) **توازن**۔ اگر دو یا زیادہ قوتیں ایک جسم پر اس طرح

عمل کریں کہ جسم ساکن رہے تو وہ حالت توازن میں کہلاتی ہیں +

(۱۸) متقابل سمتوں میں عمل کرنے والی مساوی قوتوں کا لگانا یا ہٹانا۔ ہم یہ تسلیم کریں گے کہ اگر جسم استوار کے ایک مقام پر دو مساوی قوتیں متقابل سمتوں میں لگائی جاویں تو جسم کی حالت میں کچھ فرق نہیں آئےگا۔ اور اسی طرح سے اگر جسم کے کسی مقام پر دو مساوی قوتیں متقابل سمتوں میں عمل کر رہی ہوں تو ان کو ہٹانے سے جسم کی حالت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوگی +

(۱۹) اصولِ انتقالِ قوت۔ اگر ایک قوت ایک جسم استوار کے کسی مقام پر عمل کرے تو وہ اپنے خط عمل کے کسی دوسرے مقام پر عمل کرتی ہوئی خیال کی جاسکتی ہے۔ بہ شرطیکہ ہر دو مقام جسم استوار کے اندر واقع ہوں +



فرض کرو کہ ایک قوت ط ایک جسم کے نقطہ ا پر سمت ا ی میں عمل کرتی ہے۔ ا ی میں ایک نقطہ ب فرض کرو۔ اور ب پر دو مساوی قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو اور ایک کی سمت ب ی اور دوسری

کی ب ا ہو تو ان کا مجموعی اثر جسم کی حالت پر کچھ نہ ہوگا
قوت ط جو نقطہ ا پر سمت اب میں عمل کرتی ہے۔ اور
قوت ط جو نقطہ ب پر سمت ب ا میں عمل کرتی ہے
یہ دونوں آپس میں برابر ہیں۔ اور متقابل سمتوں میں عمل کرتی
ہیں۔ ہم یہ مان لیں گے کہ وہ ایک دوسرے کو زایل کردیتی
ہیں اس لئے خارج کی جاسکتی ہیں۔ اب صرف قوت ط نقطہ
ب پر رہ گئی جو سمت ب ی میں عمل کرتی ہے۔ اور
اس کا اثر وہی ہے۔ جو پہلی قوت ط کا نقطہ ا پر تھا +
جسم مذکورۂ بالا کی اندرونی قوتیں دونوں حالتوں میں مختلف
ہونگی جب کہ قوت ط نقطہ ا یا ب پر لگائی جائے۔ لیکن
اس کتاب میں اندرونی قوتوں سے بحث نہیں ہوگی +

(۲۰) **چکنے اجسام**۔ اگر ہم ایک صاف ہموار لکڑی کے ٹکڑے کو
ایک میز پر رکھیں جس کی سطح نہایت چکنی ہو تو معلوم ہوگا کہ اگر
ہم اس ٹکڑے کو میز پر حرکت دینا چاہیں تو اس کے ہلانے میں
کچھ مزاحمت ہوگی۔ میز اور لکڑی کی سطحوں کے درمیاں کچھ نہ کچھ
قوت ضرور عمل کرے گی۔ خواہ وہ کتنی ہی کم کیوں نہ ہو۔ اگر اجسام
کمل طور پر چکنے ہوں تو میز اور لکڑی کے درمیان میز کی سطح کے متوازی
کوئی قوت نہیں ہوگی ان کے درمیان جو قوت ہوگی وہ میز کی عمودی سمت میں ہوگی۔

تعریف۔ جب دو اجسام جو آپس میں مس کریں کامل طور پر چکنے
ہوں تو قوتِ تعامل جو ان کے درمیان ہے وہ ان کے نقطۂ مماس پر
ان کی سطحِ مشترک پر عمود ہوگی +

باب دوم

قوتوں کی تحلیل و ترکیب

(۲۱) فرض کرو کہ لکڑی کا ایک چپٹا ٹکڑا ایک چکنے میز پر پڑا ہے۔ اور ہم اس کے تین مختلف مقامات پر ڈورے باندھ کر اس طرح کھینچتے ہیں کہ ڈوروں کے ذریعہ سے عمل کرنیوالی قوتیں ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں۔ اگر ان ڈوروں کی قوتیں مقدار میں ایسی ہوں کہ لکڑی ساکن رہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تینوں قوتوں میں توازن ہے +

اس سے یہ بھی ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی سی دو قوتوں کا مجموعی اثر تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہے۔ یہ قوت جو تیسری کے مساوی اور متقابل ہے پہلی دو کا حاصل کہلاتی ہے +

(۲۲) **حاصل کی تعریف**۔ اگر دو یا زیادہ قوتیں ط، ق، ل..... ایک جسم استوار پر عمل کریں۔ اور اگر ایک قوت ح ایسی معلوم ہوسکے جس کا اثر جسم پر وہی ہو جو کہ ط، ق، ل...... سب قوتوں کا مجموعی اثر ہوتا ہے۔ تو اس اکیلی قوت ح کو دوسری قوتوں ط، ق، ل.......... کا حاصل کہتے ہیں اور

ط، ق، ل...... قوت ح کے اجزاء ترکیبی کہلاتے ہیں۔
اوپر کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر قوت ح کے مساوی اور متقابل قوت جسم پر لگائی جائے تو جسم پر عمل کرنے والی قوتوں میں توازن ہوگا اور جسم ساکن رہیگا۔ اور برعکس اس کے اگر قوتوں میں توازن ہوتو ان میں سے کوئی ایک باقی سب کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگی +

(۲۳) **ایک ہی خط مستقیم میں عمل کرنیوالی قوتوں کا حاصل**۔ اگر دو قوتیں ایک جسم پر ایک ہی سمت میں عمل کریں تو ان کا حاصل صریحاً ان کے مجموعہ کے برابر ہوگا +

مثلاً۔ ایک ہی سمت میں عمل کرنے والی دو قوتوں میں سے ایک پانچ پونڈ ہو اور دوسری سات پونڈ تو ان کا حاصل ایک ۱۲ پونڈ کی قوت ہوگی جو اسی سمت میں عمل کرے گی۔

اگر دو قوتیں ایک جسم پر متقابل سمتوں میں عمل کریں تو ان کا حاصل ان دونوں کے فرق کے برابر ہوگا۔ اور بڑی قوت کی سمت میں عمل کرے گا +

مثلاً۔ اگر متقابل سمتوں میں عمل کرنے والی دو قوتوں میں سے ایک ۹ پونڈ ہو اور دوسری ۴ پونڈ تو ان کا حاصل ۵ پونڈ کی قوت ہوگی جو ۹ پونڈ والی قوت کی سمت میں عمل کرے گی +

(۲۴) جب دو قوتیں ایک جسم استوار کے ایک نقطہ پر مختلف سمتوں میں عمل کریں تو ان کا حاصل بطریق ذیل معلوم ہوسکتا ہے۔

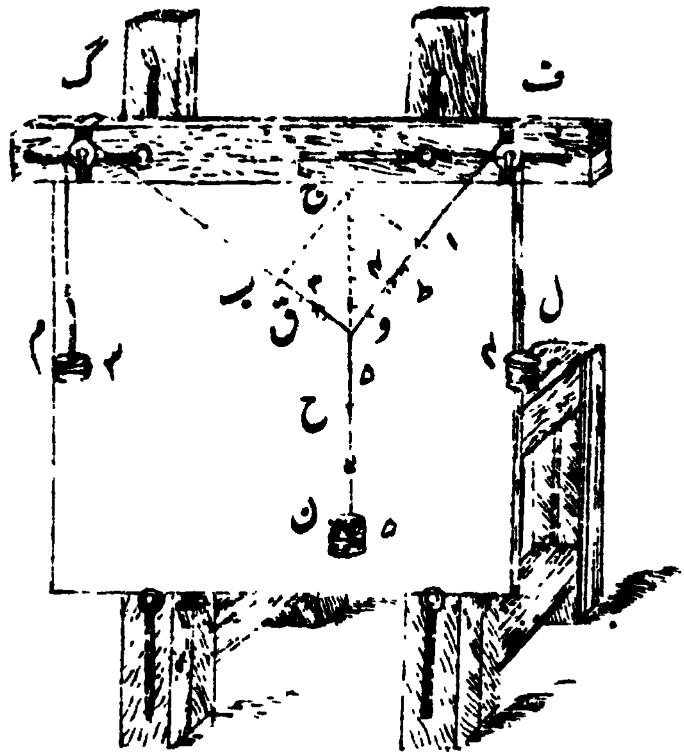
مسئلہ۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع۔ اگر دو قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں اور اس نقطہ سے دو ایسے خطوط کھینچے جائیں جو ان قوتوں کو مقدار اور سمت میں تعبیر کریں۔ اور ان خطوط پر ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو متوازی الاضلاع کا قطر جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے ان دو قوتوں کے حاصل کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے گا +

علم سکون کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس کی ایک اور صورت بھی ہے جسے "قوتوں کا مثلث" کہتے ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۳۶) "قوتوں کے مثلث" کے مسئلہ کو سیٹونیس ساکن بروڈز نے ۱۵۸۶ء میں دریافت کیا تھا۔ اس کے زمانہ سے پہلے علم سکون کی بنیاد اصول بیرم پر تھی +

دفعہ ذیل میں ہم اس مسئلہ کا عملی ثبوت دیں گے۔ باب آخر میں اس کا باضابطہ نظری ثبوت دیا جائے گا +

(۲۵) عملی ثبوت۔ فرض کرو کہ **ف** اور **گ** دو بے وزن چرخیاں ہیں۔ جو کہ ایک مضبوط شہتیر میں نصب ہیں ان کے اوپر سے دو ہلکی رسیاں گزرتی ہیں جو کہ و پر بندھی ہوئی ہیں اور ان کے دوسرے سروں سے پلڑے **ل** اور م لٹکتے ہیں +

(نقشہ دوسرے صفحہ پر دیکھو)



ایک اور رسی و پر بندھی ہے۔ اور اس سے ایک پلڑا ن آویزاں ہے۔ پلڑوں میں اوزان معلومہ رکھو اور ان کو حالت سکون میں آنے دو۔

اب فرض کرو کہ تینوں رسیوں سے پلڑوں کے وزن سمیت جو اوزان لٹک رہے ہیں وہ بالترتیب ط، ق، ح ہیں ایک تختہ سیاہ یا تختہ کاغذ پر جو ان رسیوں کے پیچھے رکھا گیا ہو۔ خطوط و ف، و گ، و ن کھینچو۔ جیسا کہ شکل سے

ظاہر ہے۔ کسی مناسب پیمانہ کے موافق (مثلاً تین انچہ فی پونڈ) اس سکم ط، ق، ح قوتوں کو و ا، و ب، و د سے تعبیر کرو۔ اور متوازی الاضلاع و ا ب ج کی تکمیل کرو۔ تو معلوم ہوگا کہ و ج طول میں و د کے برابر ہے اور سمت میں متقابل ہے۔ لیکن چونکہ ط، ق، ح قوتیں متوازن ہیں اس لئے لازماً ط اور ق کا حاصل ح کے برابر ہے اور سمت میں متقابل ہے۔ اس لئے ط اور ق کا حاصل و ج ہے جو کہ اس متوازی الاضلاع کا قطر ہے۔ جس کے اضلاعِ متصلہ ط اور ق کو تعبیر کرتے ہیں +

یہ نتیجہ ہر حالت میں درست پایا جائے گا۔ خواہ ط، ق، ح کی کچھ بھی مقدار ہو۔ بشرطیکہ ان تینوں اوزان میں سے ایک باقی دو کے مجموعہ سے بڑا نہ ہو +

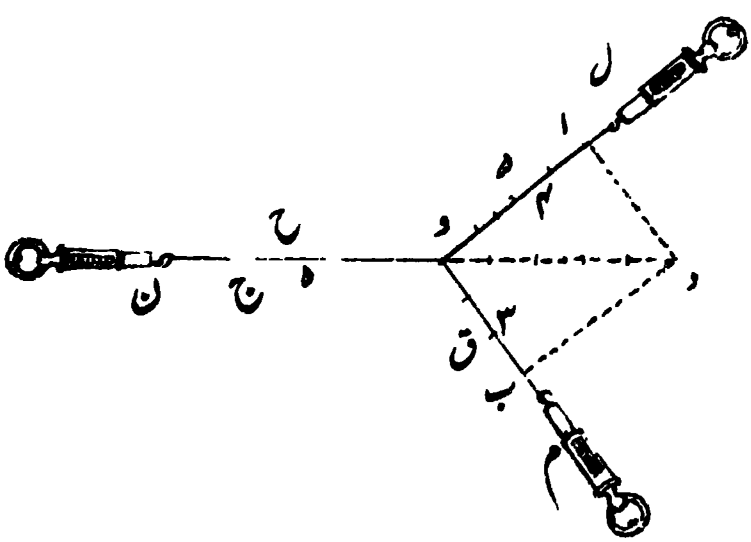
شکل میں ط، ق، ح بالترتیب ۴، ۳، ۵ پونڈ کے مساوی لئے گئے ہیں اس صورت میں چونکہ ۲۵ = ۴۲ + ۳۲۔ اس لئے زاویہ ا و ب قائمہ ہوگا +

تجربہ کے دوران میں معلوم ہوگا۔ کہ نقطہ و کے مقامات سکون ایک دوسرے کے قریب بہت سے ہونگے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہم چرخیوں کے محوروں کی رگڑ کو بالکل معدوم نہیں کرسکتے۔ ایسے تجربوں میں رگڑ کا اثر کم ہوگا۔ اگر چرخیاں بڑی ہوں +

المونیم کی چرخیاں زیادہ موزوں ہیں کیونکہ ان کا تطر بڑا

کیا جاسکتا ہے اور وہ وزن میں مقابلتہً کم ہوتی ہیں۔ معمولی تجربہ کے لئے شکل بالا کے بھاری سامان کی ضرورت نہیں ہے۔ صرف ف اور گ چرخیوں میں سوراخ کرکے دو کیلوں کے ذریعہ ایک عمودی تختہ سیاہ پر نصب کردو +

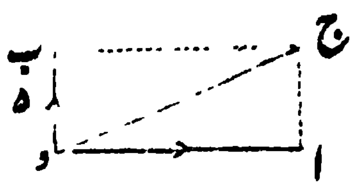
تجربہ بالا میں چرخیوں اور وزنوں کی جگہ سالٹر کے تین کمانی دار ترازو استعمال ہوسکتے ہیں۔ ہر ایک کمانی دار ترازو میں ایک سوئی ہوتی ہے جو کہ ایک پیمانے پر اوپر نیچے حرکت کرنے سے وزن کی مقدار ظاہر کرتی ہے۔ تجربے کے لئے تین ہلکی رسیوں میں ایک مقام و پر گرہ دیدی جاتی ہے۔ اور ان کے سرے تین کمانی دار ترازوؤں سے باندھ دئے جاتے ہیں۔ ان ترازوؤں کو کھینچ کر ایک میز پر تین کیلوں سے مربوط کردیا جاتا ہے۔ تینوں رسیوں کے تناؤں ط، ق، ح کی مقادیر ہر ایک ترازو کی سوئی سے معلوم ہونگی



تجربہ مندرجہ بالا کے موافق ط، ق، ح قوتوں کو خطوط و ا، و ب، و ج سے تعبیر کرو۔ پھر اس بات کی تصدیق کرو۔ کہ و ج مقدار میں و د کے برابر اور سمت میں متقابل ہے اور و د اس متوازی الاضلاع کا قطر ہے جس کے اضلاع متصلہ و ا اور و ب ہیں +

(۲۶) ایک نقطہ پر عمل کرنے والی دو قوتوں کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرنے کے لئے ہمیں ایک ایسے متوازی الاضلاع کے قطر کی مقدار اور سمت معلوم کرنا پڑتی ہے۔ جس کے متصلہ اضلاع قوتوں کو تعبیر کریں +

مثال ۱۔ دو قوتیں مقدار میں ۱۲ اور ۵ پونڈ ہیں اور ان کی سمتیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں۔ ان کا حاصل دریافت کرو +



فرض کرو کہ و ا اور و ب قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں

یعنی و ا میں طول کی بارہ۱۲ اکائیاں ہیں اور و ب میں ۵ مستطیل و ا ج ب کی تکمیل کرو +

تو $\text{و ج}^2 = \text{و ا}^2 + \text{ا ج}^2$

$= ۱۲^2 + ۵^2$

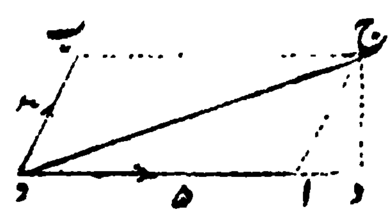
$= ۱۶۹$

$\therefore \text{و ج} = ۱۳$

نیز $\text{مس ج و ا} = \frac{\text{ا ج}}{\text{و ا}} = \frac{۵}{۱۲}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل ایک ۱۳ پونڈ وزن کی قوت کے برابر ہے جو پہلی قوت سے ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس $\frac{۵}{۱۲}$ ہے۔ یعنی قریباً °۲۲ ۳۷′ کا زاویہ بناتی ہے +

مثال ۲- ۵ اور ۳ پونڈ کی دو قوتوں کا درمیانی زاویہ °۶۰ ہے ان کا حاصل معلوم کرو +



فرض کرو کہ و ا اور و ب دونوں قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں

جہاں و ا = ۵ اور و ب = ۳ اور زاویہ ا و ب = ۶۰°
متوازی اضلاع و ا ج ب کی تکمیل کرو۔ اور و ا پر ج د
عمود نکالو۔ تب و ج حاصل مطلوب ہوگا +

ا د = ا ج جم ج ا د = ۳ جم ۶۰° = ۳/۲

∴ و د = ۱۳/۲

نیز د ج = ا ج جب ۶۰° = ۳√۳/۲

∴ و ج = √(و د² + د ج²) = √(۱۶۹/۴ + ۲۷/۴)

= √۴۹ = ۷

اور مس ج و د = د ج / و د = ۳√۳/۱۳ = ۳۹۹۷ء

پس حاصل ایک ۷ پونڈ کی قوت ہے۔ جو کہ و د سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا ماس ۳۹۹۷ء ہے طبعی ماسوں کے جدول سے معلوم ہوگا۔ کہ یہ زاویہ ۲۱° ۴۷' ہے +

(۲۷) اگر ط اور ق دو قوتوں کا درمیانی زاویہ عہ ہو تو ان کا حاصل ح علم مثلث کے ذریعہ بآسانی معلوم ہوسکتا ہے +

فرض کرو کہ و ا اور و ب دو قوتوں ط اور ق کو تعبیر کرتے ہیں۔ جن کا درمیانی زاویہ عہ ہے۔ متوازی الاضلاع و ا ج ب کی تکمیل کرو۔ اور و ا یا و ا ممدودہ پر ج د عمود نکالو +
فرض کرو۔ کہ ح مقدار حاصل کو تعبیر کرتا ہے +

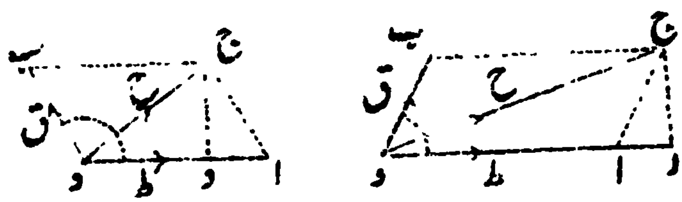
تب و د = و ا + ا د = و ا + ا ج جم د ا ج

= ط + ق جم ب و د .

= ط + ق جم عہ

اگر د، و اور ا کے درمیان واقع ہو۔ جیساکہ شکل (۲) میں ہے۔ تو $و د = و ا - د ا = و ا - ا ج \; جم \; \widehat{د ا ج}$

$= ط - ق \; جم \; (۱۸۰^\circ - ع) = ط + ق \; جم \; ع$



نیز $د ج = ا ج \; جب \; \widehat{د ا ج}$

$= ق \; جب \; ع$

$\therefore ح^۲ = و ج^۲ = و د^۲ + ج د^۲ = (ط + ق \; جم \; ع)^۲ + (ق \; جب \; ع)^۲$

$= ط^۲ + ق^۲ + ۲ \; ط \; ق \; جم \; ع$

$\therefore ح = \sqrt{ط^۲ + ق^۲ + ۲ \; ط \; ق \; جم \; ع}$ ...... (۱)

نیز $مس \; \widehat{ج و د} = \frac{د ج}{و د} = \frac{ق \; جب \; ع}{ط + ق \; جم \; ع}$ .... (۲)

ان دو مساواتوں سے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم ہوتی ہے۔

نتیجہ صحیح (۱) اگر قوتیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں یعنی اگر $ع = ۹۰^\circ$ تو $ح = \sqrt{ط^۲ + ق^۲}$ اور $مس \; \widehat{ج و ا} = \frac{ط}{ق}$

نتیجہ تعریج (۲) اگر ہر ایک قوت ط کے برابر ہو تو

$$\text{ح} = \sqrt{\text{ط}^{۲}(۱+۱+۲\ \text{جم ع})}$$
$$= \text{ط}\sqrt{۲(۱+\text{جم ع})}$$
$$= \text{ط}\sqrt{۲\times۲\ \text{جم}^{۲}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}}$$
$$= ۲\ \text{ط جم}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}$$

اور مس ج و ا

$$= \frac{\text{ط جب ع}}{\text{ط} + \text{ط جم ع}}$$
$$= \frac{۲\ \text{جب}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}\ \text{جم}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}}{۲\ \text{جم}^{۲}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}}$$
$$= \text{مس}\ \tfrac{\text{ع}}{۲}$$

اس سے معلوم ہوا کہ دو مساوی قوتوں کا حاصل ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ اور یہی نتیجہ ابتدائی اصولوں سے بھی ظاہر ہے +

امثلہ نمبری (۱)

(۱) ذیل کی سات مثالوں میں ط اور ق دو قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں جن کا درمیانی زاویہ ع ہے اور حاصل ح ہے [نتائج کی بذریعہ اشکال عملاً تصدیق کرو]

(۱) اگر ط = ۲۴ و ق = ۷ و ع = ۹۰° تو ح دریافت کرو۔

(۲) اگر ط = ۱۳ و ح = ۱۴ و ع = ۹۰° تو ق "

(۳) اگر ط = ۷ = ق = ۷ و ع = ۶۰° تو ح "

(۴) اگر ط = ۵ و ق = ۹ و ع = ۱۲۰° تو ح "

(۵) اگر ط = ۳ و ق = ۵ و ح = ۷ تو ع "

(۶) اگر ط = ۱۳ و ق = ۱۴ و عہ = جب$^{-1}$ ۱۲/۱۳ تو ح دریافت کرو۔

(۷) اگر ط = ۵ و ح = ۷ و عہ = ۶۰° تو ق ,,

(۲) دو قوتیں بالترتیب ۱۲ اور ۸ پونڈ ہیں ان کا بڑے سے بڑا اور چھوٹے سے چھوٹا حاصل دریافت کرو +

(۳) چار قوتیں بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶ پونڈ مذنی ایک ذرہ پر شمال جنوب مشرق مغرب کی سمتوں میں جداگانہ عمل کرتی ہیں ان کے حاصل کی سمت اور مقدار معلوم کرو +

(۴) دو قوتیں ۸۴ اور ۱۸۷ پونڈ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں ان کا حاصل دریافت کرو +

(۵) دو قوتیں ط اور √۲ ط ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۱۳۵° ہے ان کے حاصل کی مقدار اور سمت دریافت کرو +

(۶) دو قوتوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے اور ان کا حاصل ۲√۳ ہے اگر ایک قوت ۲ پونڈ ہو تو دوسری قوت معلوم کرو +

(۷) دو قوتیں ۱۳ اور ۱۱ پونڈ ہیں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ماس ۱۲/۵ ہے ان کا حاصل دریافت کرو اور بذریعہ شکل اس کی تصدیق کرو +

(۸) دو قوتیں ۱۰ اور ۹ پونڈ ہیں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ماس ۴/۳ ہے ان کا حاصل دریافت کرو اور بذریعہ شکل اس کی تصدیق کرو +

(۹) دو مساوی قوتیں ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں اگر ان کے

حاصل کا مربع ان کے حاصل ضرب کا ۳ گنا ہو تو ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو +

(۱۰) دو ایسی قوتیں ہیں کہ اگر ان کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو تو ان کا حاصل $\sqrt{۱۰}$ پونڈ ہوتا ہے اور اگر درمیانی زاویہ °۶۰ ہو تو حاصل $\sqrt{۱۳}$ پونڈ ہوتا ہے۔ ان کو دریافت کرو +

(۱۱) دو مساوی قوتوں میں سے ہر ایک ط کے برابر ہے ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو جب کہ ان کا حاصل (۱) ط ہو (۲) $\frac{ط}{۲}$ ہو +

(۱۲) دو قوتیں (ا + ب) اور (ا - ب) ہیں اگر ان کا حاصل $\sqrt{ا^{۲} + ب^{۲}}$ ہو تو ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو +

(۱۳) دو قوتیں ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں معلوم کرو کہ ایک تیسری قوت معلومہ کس سمت میں عمل کرے کہ تینوں کا حاصل بڑے سے بڑا ہو +

(۱۴) مفصلہ ذیل کو بذریعہ اشکال حل کرو ÷

(۱) اگر ط = ۱۰ و ق = ۱۵ اور عہ = °۳۷ تو ح دریافت کرو

(۲) اگر ط = ۹ و ق = ۷ و عہ = °۱۳۲ تو ح "

(۳) اگر ط = ۷ و ق = ۵ اور ح = ۱۰ تو عہ "

(۴) اگر ط = ۳٫۶۴ و ح = ۸٫۶۷ اور عہ = °۶۵ تو ق "

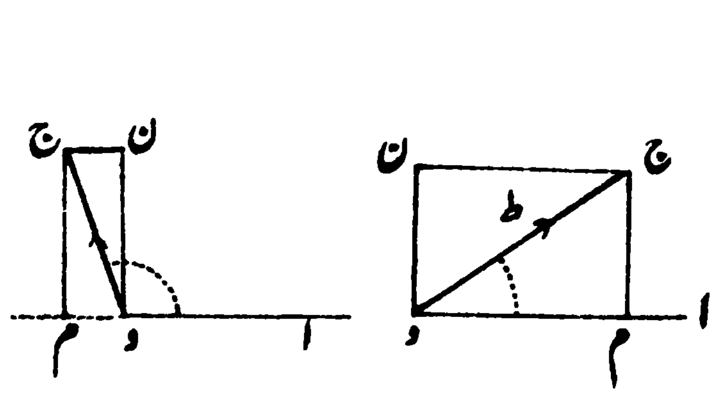
(۲۸) اگر دو قوتوں کی مقدار اور سمت معلوم ہو تو ان کا حاصل صرف ایک ہی ہو سکتا ہے۔ کیونکہ خطوط و ا اور و ب پر ایک ہی متوازی الاضلاع بن سکتا ہے (دیکھو شکل دفعہ (۲۷)

(۲۹) ایک قوت کو دو اجزا میں تحلیل کرنے کے لاانتہا طریقے ہیں۔ کیونکہ و ج کو قطر مانکر بے شمار متوازی الاضلاع بن سکتے ہیں۔ اور ہر ایک متوازی الاضلاع سے قوتوں کا ایک ایک جوڑا معلوم ہوگا +

(۳۰) قوتوں کی تحلیل کی اہم صورت وہ ہے جبکہ دو اجزاء ترکیبی ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نبائیں +

فرض کرو۔ کہ ایک قوت ط خط و ج سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کو دو ایسے اجزا میں تحلیل کرنا مطلوب ہے۔ جس میں سے ایک سمت و ا میں عمل کرے اور دوسرا اس پر عمود ہو و ا پر عمود ج م نکالو اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو۔ جو قوتیں کہ و م اور و ن سے تعبیر ہوتی ہیں ان کا حاصل و ج ہے پس و م اور و ن اجزائے مطلوبہ ہیں +

فرض کرو کہ زاویہ ا و ج = عہ



و م = و ج جم عہ = ط جم عہ

اور و ن = م ج = و ج جب عہ = ط جب عہ

اگر نقطہ م خط ا وَ ممدودہ میں واقع ہو جیساکہ دوسری شکل میں ہے۔ تو ط کا جزو سمت و ا میں +

= - و م = - و ج جم ج و م = - و ج جم (۱۸۰° - عہ)

و ج جم عہ = ط جم عہ

نیز وہ جزو جو و ا پر عمود ہو = و ن = م ج = و ج جب ج و م = ط جب عہ پس ہر ایک صورت میں اجزاء مطلوبہ ط جم عہ اور ط جب عہ ہیں +

مثلاً۔ ایک ۱۰ پونڈ قوت جو سمت افقی سے ۶۰° کا زاویہ بنائے دو قوتوں میں تحلیل ہوسکتی ہے۔ جن میں سے ایک ۱۰ جم ۶۰ (= ۱۰ × $\frac{۱}{۲}$ = ۵ پونڈ) کے برابر ہے اور سمت افقی میں عمل کرتی ہے۔ اور دوسری ۱۰ جب ۶۰° (= ۱۰ × $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ = ۵×۱٫۷۳۲ = ۸٫۶۶ پونڈ) کے برابر ہے اور سمت راس میں عمل کرتی ہے۔

(۳۱) ایک قوت معلومہ کا جزو تحلیلی کسی خاص سمت میں وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں عمل کرنے والے ایک اور جزو ترکیبی کے ساتھ مل کر قوت معلومہ کے برابر ہو +

مثلاً۔ دفعہ سابق میں قوت ط کا جزو تحلیلی سمت و ا میں ط جم عہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ کسی قوت معلومہ کا جزو تحلیلی کسی خاص سمت میں قوت معلومہ اور سمت مذکورہ کے

درمیانی زاویہ کی جیب التمام کو قوت معلومہ سے ضرب دینے سے معلوم ہوتا ہے +

(۳۲) ایک قوت اپنے خط عمل کی عمودی سمت میں کوئی اثر پیدا نہیں کرسکتی۔ کیونکہ (دیکھو شکل دفعہ ۳۰) اگر ایک ذرہ نقطہ و پر ہو تو کوئی وجہ نہیں ہے کہ قوت و ن اس کو سمت وا میں حرکت دے سکے اور سمت ا و ممدودہ میں حرکت نہ دے سکے اس سے ثابت ہوا کہ قوت و ن ذرے کو نہ تو سمت و ا میں حرکت دے سکتی ہے اور نہ سمت ا و ممدودہ میں +

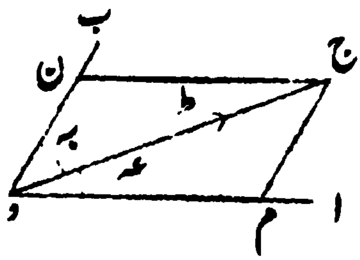
مثلاً۔ اگر ایک ریل گاڑی لائن پر کھڑی ہو۔ تو کوئی متوازی الافق قوت جو کہ ریلوے لائن کی عمودی سمت میں عمل کرے اس کو لائن کی سمت میں حرکت نہیں دے سکتی +

(۳۳) کسی قوت معلومہ کا جزو تحلیلی کسی خاص سمت میں اس کے اثر کلی کو تعبیر کرتا ہے۔ کیونکہ (دیکھو شکل دفعہ ۳۰) قوتیں و م اور و ن قوت و ج کو کامل طور پر تعبیر کرتی ہیں۔ لیکن قوت و ن کا اثر سمت و ا میں کچھ نہیں ہے۔ اس لئے قوت ط کا پورا اثر سمت و ا میں و م یعنی قوت کے جزو تحلیلی سے تعبیر ہوتا ہے +

(۳۴) ایک قوت دو مقررہ سمتوں میں دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل ہوسکتی ہے +

فرض کرو کہ قوت ط کے جو کہ و ج سے تعبیر ہوتی ہے

اجزائے ترکیبی سموت و ا اور و ب میں مطلوب ہیں +
اور فرض کرو کہ زاویہ ا و ج اور ج و ب بالترتیب عہ
اور یہ ہیں +



ج سے ج م متوازی و ب کا کھینچو جو کہ و ا کو نقطہ م پر ملے۔ اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو۔ تو و م اور و ن اجزائے مطلوبہ ہونگے +
چونکہ م ج اور و ن متوازی ہیں۔ اس لئے و ج م = بہ
اور و م ج = ۱۸۰° - ج م ا = ۱۸۰° - (عہ + بہ)
چونکہ مثلث و م ج کے اضلاع اپنے مقابل کے زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہیں اس لئے

$$\frac{\text{و م}}{\text{جب و ج م}} = \frac{\text{م ج}}{\text{جب م و ج}} = \frac{\text{و م}}{\text{جب و م ج}}$$

$$\therefore \frac{و م}{جب ب} = \frac{م ج}{جب ع} = \frac{ط}{جب (ع + ب)}$$

اس لئے اجزائے مطلوبہ یہ ہیں ط $\frac{جب ب}{جب (ع + ب)}$ اور ط $\frac{جب ع}{جب (ع + ب)}$

(۳۵) طالب علم کو یاد رکھنا چاہیئے کہ کسی قوت کے اجزائے ترکیبی اور اجزائے تحلیلی کسی خاص دو سمتوں میں یکساں نہیں ہوتے +

مثلاً۔ (دیکھو دفعہ ۳۰) قوت ط کا جزو تحلیلی سمت و . میں ط جم ع ہے +

امثلہ نمبری (۲)

(۱) ایک ۱۰ پونڈ کی قوت افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے اس کے اجزائے تحلیلی سمت افقی و عمودی میں دریافت کرو +

(۲) ایک قوت ط کے اجزائے تحلیلی سمت ذیل میں دریافت کرو۔
(۱) ط سے ۴۵° کا زاویہ بنانے والی سمت میں (۲) ط سے جم$^{-1}$ ($\frac{۱۲}{۱۳}$) بنانے والی سمت میں +

(۳) ایک گاڑی ریلوے لائن پر ساکن ہے۔ اور ایک ۱۰۰ پونڈ کی افقی قوت جو کہ لائن سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اس پر عمل کرتی ہے۔ گاڑی کو آگے کی طرف دھکیلنے والی قوت دریافت کرو +

(۴) ایک ۱۰۰ پونڈ کی قوت کو ایسی دو مساوی قوتوں میں تحلیل کرو جو باہم ۶۰° کا زاویہ بنائیں۔ شکل اور پیمائش سے تصدیق کرو +

(۵) ایک ۵ پونڈ قوت کو دو ایسی قوتوں میں تحلیل کرو جن میں سے ایک اس کی ایک طرف ۶۰° کا زاویہ بنائے اور دوسری دوسری طرف ۴۵° کا زاویہ بنائے۔ ترسیم اور پیمائش سے تصدیق کرو +

(۶) ایک قوت ط کو دو سمتوں میں تحلیل کرو جن میں سے ایک ط سے ۳۰° کا زاویہ ایک طرف بناتی ہے اور دوسری ۴۵° کا زاویہ دوسری طرف بناتی ہے +

(۷) اگر ایک قوت کو دو ایسی قوتوں میں تحلیل کیا جائے جو اسی کی سمت سے ۴۵° اور ۱۵° کے زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ ۱۵° کا زاویہ بنانے والی قوت $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ط ہے +

(۸) دو ایسی قوتیں دریافت کرو جن میں سے ایک افقی ہو اور دوسری سمت عمودی سے ۱۰° کا زاویہ بنائے۔ اور جن کا حاصل ایک عمودی قوت معلومہ ط ہو +

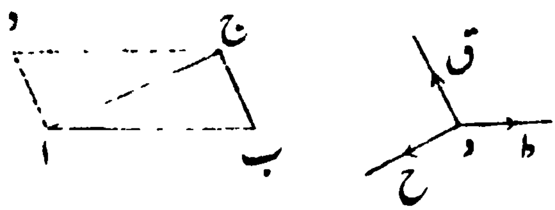
(۹) اگر ایک قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جائے اور ان میں سے ایک جزو قوت معلومہ سے زاویہ قائمہ بنائے اور مقدار میں اس کے مساوی ہو تو دوسرے جزو کی مقدار اور سمت دریافت کرو +

(۱۰) سمت راس میں عمل کرنیوالی ایک ۲۰ پونڈ کی قوت کو دو قوتوں میں تحلیل کیا گیا ہے ان میں سے ایک افقی ہے اور مقدار میں ۱۰ پونڈ ہے۔ دوسری کی مقدار اور سمت دریافت کرو +

(۱۱) بذریعہ ترسیم و پیمائش ایک ۳۵ پونڈ قوت کو دو اجزاء ترکیبی میں تحلیل کرو۔ جن میں سے ایک ۹۰° کا زاویہ قوت کے ایک طرف بناتا ہے۔ اور دوسرا ۴۰° کا زاویہ دوسری طرف بناتا ہے +

(۳۶) **قوتوں کا مثلث**۔ اگر تین قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں اور مقدار اور سمت میں ایک مثلث کے اضلاع سے بالترتیب تعبیر ہوں تو وہ **متوازن** ہونگی +

فرض کرو کہ تین قوتیں ط، ق، ح ایک نقطہ و پر عمل کرتی ہیں۔ اور ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب اور ب ج اور ج ا سے مقدار اور سمت میں تعبیر ہوتی ہیں تو وہ **متوازن** ہونگی +



متوازی الاضلاع ا ب ج د کی تکمیل کرو۔ جو قوتیں ب ج اور ا د سے تعبیر ہوتی ہیں وہ یکساں ہیں کیونکہ ب ج اور ا د مساوی اور متوازی ہیں +

چونکہ ا ب اور ا د کا حاصل بموجب مثلہ متوازی الاضلاع ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لئے ا ب اور ب ج اور ج ا کا حاصل ا ج اور ج ا کے حاصل کے برابر ہے یعنی صفر ہے لہذا تینوں قوتیں ط اور ق اور ج توازن میں ہیں +

نتیجہ صحیح۔ چونکہ قوتیں ا ب اور ب ج اور ج ا توازن میں ہیں۔ اور چونکہ جب تین قوتیں متوازن ہوں تو ان میں سے ہر ایک دوسری دو کے حاصل کے مقدار میں مساوی اور سمت میں متقابل ہوتی ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ ا ب اور ب ج کا حاصل ج ا کے مساوی اور سمت میں متقابل ہے۔ یعنی ان کا حاصل ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی دو قوتیں ایک مثلث کے دو اضلاع ا ب اور ب ج سے تعبیر ہوں۔ تو ان کا حاصل مثلث کے تیسرے ضلع ا ج سے تعبیر ہوگا +

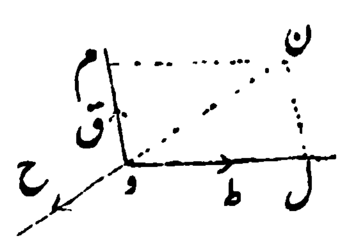
(۳۷) قوتوں کے مثلث کے مثلہ میں طالب علم کو بخوبی یاد رکھنا چاہیئے کہ قوتیں مثلث کے اضلاع کے بالترتیب متوازی ہوں۔ یعنی قوتوں کو تعبیر کرنے میں مثلث کے اضلاع یکے بعد دیگرے ایک ہی رخ میں لئے جائیں +

مثلاً۔ اگر پہلی قوت سمت ا ب میں عمل کرے تو دوسری قوت کو لازماً سمت ب ج میں اور تیسری کو سمت ج ا میں عمل کرنا چاہیئے۔ اگر دوسری قوت سمت ب ج کی

بجائے سمت ج ب میں ہوتو قوتیں متوازن نہ ہونگی +
نیز تینوں قوتوں کو ایک نقطہ پر عمل کرنا چاہیئے اگر قوتوں کے خطوط عمل ا ب، ب ج، ج ا ہوں تو وہ توازن میں نہیں ہونگی۔ کیونکہ ا ب اور ب ج کا حاصل ا ج کے برابر اور متوازی نقطہ ب پر عمل کرے گا۔ اس صورت میں قوتیں دو مساوی اور مخالف سمتوں میں عمل کرنے والی متوازی قوتوں میں تحویل ہوجائینگی۔ جیسا کہ ہم کو آئندہ چلکر معلوم ہوگا۔ ایسی دو قوتوں میں توازن نہیں ہوسکتا +

(۳۸) قوتوں کے مثلث کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی تین قوتوں میں توازن ہو۔ تو وہ مقدار اور سمت میں ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر ہوسکتی ہیں۔ جو ان قوتوں کے علی الترتیب متوازی ہوں +

فرض کہ ایک نقطہ و پر عمل کرنیوالی تین قوتیں ط، ق، ح توازن میں ہیں۔ ط اور ق قوتوں کی سمتوں میں خطوط و ل اور و م قوتوں کے متناسب قطع کرو +



متوازی الاضلاع و ل ن م کی تکمیل کرو۔ و ن ملاؤ چونکہ تین قوتیں ط، ق، ح توازن میں ہیں۔ اس لئے ان میں سے ہر ایک باقی دو کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہے۔ پس ح، ط اور ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوئی اس لئے وہ لازماً ن و سے تعبیر ہوگی۔ نیز ل ن، و م کے متوازی اور مساوی ہے +

پس ثابت ہوا کہ قوتیں ط، ق، ح مثلث و ل ن کے اضلاع و ل، ل ن، ن و کے متناسب ہیں۔ اگر کسی اور مثلث کے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع کے متوازی ہوں۔ تو وہ ان کے متناسب بھی ہوں گے۔ لہٰذا وہ قوتوں کے بھی متناسب ہوں گے +

نیز اگر کسی مثلث کے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع پر عمود ہوں۔ تو ان کے متناسب بھی ہوں گے اس لئے وہ قوتوں کے متناسب بھی ہوں گے +

(۳۹) مسئلہ دفعہ گزشتہ کی امداد سے ہم تین قوتوں کے باہمی میلان عملاً بذریعہ اشکال معلوم کرسکتے ہیں۔ اگر وہ توازن میں ہوں اور ان کی مقداریں معلوم ہوں ہمیں صرف ایک ایسا مثلث بنانا ہے۔ جس کے اضلاع قوتوں کے متناسب ہوں۔ اور بحکم اقلیدس (م ا ش ۲۲) یہ ہمیشہ ممکن ہے۔ سوائے اس صورت کے جبکہ دو قوتوں کا مجموعہ تیسری قوت سے کم ہو +

(۴۰) **لامی کا مسئلہ**۔ اگر تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور اس کو ساکن رکھیں تو ان میں سے ہر ایک باقی دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہوگی +

(دیکھو شکل دفعہ ۳۸) اور فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ح توازن میں ہیں حسب سابق خطوط و ل اور و م قوتوں ط، ق کے متناسب قطع کرو اور متوازی الاضلاع و ل ن م کی تکمیل کرو تب ن و قوت ح کو تعبیر کریگا +

اب چونکہ مثلث و ل ن کے اضلاع اپنے مقابل کے زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہیں اس لئے

و ل / جب و ل ن = ل ن / جب ل و ن = ن و / جب ل ن و

لیکن جب ل ن و = جب ن و م = جب (۱۸۰° ـ ق و ح)
= جب ق و ح

اور جب ل و ن = جب (۱۸۰° ـ ل و ح) = جب ح و ط

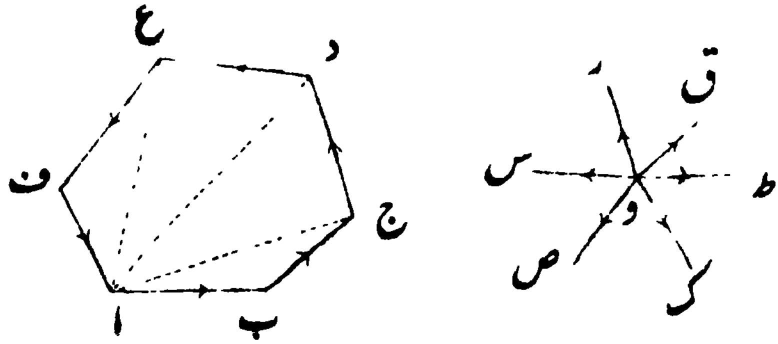
اور جب و ل ن = جب (۱۸۰° ـ ط و ق) = جب ط و ق

نیز ل ن = و م

پس و ل / جب ق و ح = و م / جب ح و ط = ن و / جب ط و ق

یعنی ط / جب ق و ح = ق / جب ح و ط = ح / جب ط و ق

(۴۱) **قوتوں کا کثیر الاضلاع**۔ اگر متعدد قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور مقدار اور سمت میں ایک کثیر الاضلاع کے اضلاع سے بالترتیب ایک ہی رخ میں تعبیر ہوسکیں تو قوتیں توازن میں ہونگی +



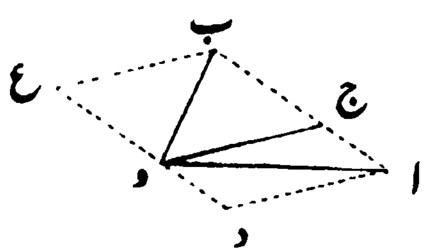
فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ف کے اضلاع ا ب، ب ج، ج د، د ع، ع ف، ف ا ایک ذرہ و پر عمل کرنیوالی قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ا ج، ا د اور ا ع کو ملاؤ بموجب نتیجہ صریح دفعہ ۳۶ ا ب اور ب ج قوتوں کا حاصل ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اسی طرح سے ا ج اور ج د قوتوں کا حاصل ا د سے تعبیر ہوتا ہے اور ا د اور د ع کا حاصل ا ع ہے اور ا ع اور ع ف کا حاصل ا ف ہے۔

اس لئے تمام قوتوں کا حاصل ا ف اور ف ا کے حاصل کے برابر ہے یعنی حاصل صفر ہے۔

لہذا قوتیں توازن میں ہیں +

خواہ قوتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔یہی طرز ثبوت استعمال ہوسکتا ہے۔ نیز اس ثبوت سے ظاہر ہے کہ یہ ضروری نہیں ہے کہ کثیرالاضلاع کے اضلاع ایک ہی سطح میں واقع ہوں قوتوں کے کثیرالاضلاع کا عکس درست نہیں ہے۔کیونکہ اس کے اضلاع کی نسبتیں معلوم نہیں ہوسکتیں۔جب کہ ان کی سمتیں معلوم ہوں، مثلاً شکل بالا میں ہم ضلع ا ب پر کوئی نقطہ اَ لیکر اَ فَ کو ا ف کے متوازی اس طرح کھینچ سکتے ہیں کہ وہ ع ف کو نقطہ فَ پر لے۔تو اس صورت میں نئے کثیرالاضلاع اَ ب ج و ع فَ کے اضلاع بالترتیب کثیرالاضلاع ا ب ج و ع ف کے اضلاع کے متوازی ہونگے لیکن تناسب نہیں ہونگے+

(۴۴)اگر دو قوتیں ایک نقطہ و پر و ا اور و ب کی سمتوں میں عمل کریں اور ان کی مقداریں ل × و ا اور م × و ب سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل (ل + م) × و ج سے تعبیر ہوگا جہاں ج ایک نقطہ ا ب میں ایسا ہے کہ ل × ج ا = م × ج ب



متوازی الاضلاع و ج ا د اور و ج ب ع کی تکمیل کرو +
قوتوں کے متوازی الاضلاع کے بموجب قوت ل × و ا
دو قوتوں ل × و ج اور ل × و د کے برابر ہے ۔ اور
قوت م × و ب دو قوتوں م × و ج اور م × و ع کے
مساوی ہے۔ اس لئے ل × و ا اور م × و ب دونوں
ایک قوت (ل + م) × و ج اور دو قوتوں ل × و د
اور م × و ع کے برابر ہیں +
لیکن چونکہ ل × و د = ل × ج ا = م × ج ب =
م × و ع اس لئے دونوں قوتیں ل × و د اور م × و ع
مساوی اور متقابل ہیں۔ لہذا توازن میں ہیں +
اس لئے حاصل = (ل + م) × و ج
نتیجہ صریح ۔ دو قوتوں و ا اور و ب کا حاصل ایک قوت
۲ و ج ہوتا ہے۔ جہاں ج' ا ب کا نقطہ تنصیف ہے اور یہ
نتیجہ اس طرح بھی ظاہر ہے کہ جو متوازی الاضلاع وا اور
و ب پر بنایا جائے و ج' اس کے قطر کا نصف ہے +

امثلہ نمبری (۳)

(۱) ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی تین قوتیں متوازن ہیں۔ اگر
ہر دو کا درمیانی زاویہ ۱۲۰° کا ہو تو ثابت کرو کہ وہ مساوی
ہیں۔ اگر ان کے درمیانی زاوئے ۶۰° ، ۱۵۰° ، ۱۵۰° ہوں تو ان کی
باہمی نسبتیں دریافت کرو +

(۲) ایک نقطہ پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں اور وہ توازن میں ہیں۔ پہلی اور دوسری کا درمیانی زاویہ ۱۲۰° ہے اور دوسری اور تیسری کا ۱۲۰° ہے ان کی باہمی نسبتیں معلوم کرو +

(۳) تین قوتیں ۷ ط، ۵ ط، ۸ ط ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور توازن میں ہیں۔ حساباً اور نیز عملاً آخری دو قوتوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو +

(۴) ایک ذرہ پر عمل کرنیوالی تین قوتیں ۵ ط، ۱۲ ط، ۱۳ ط توازن میں ہیں حساباً اور عملاً ان کے درمیانی زاویے دریافت کرو +

(۵) دو قوتیں ۲ ط اور ۳ ط ایک تیسری قوت ۴ ط کے ساتھ ملکر متوازن ہیں۔ ۴ ط کی سمت معلوم ہے۔ ۲ ط اور ۳ ط کی سمتیں بذریعہ عمل ہندسیہ دریافت کرو +

(۶) مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب اور ا ج کی تنصیف نقاط د اور ع پر ہوتی ہے۔ ثابت کرو۔ کہ ان قوتوں کا حاصل جو ب ع اور د ج سے تعبیر ہوتی ہیں مقدار اور سمت میں $\frac{3}{2}$ ب ج سے تعبیر ہوگا +

(۷) ایک ذرے و پر دو قوتیں ل × ا و اور ل × و ب عمل کرتی ہیں۔ جہاں ا اور ب دو نقاط معینہ ہیں ثابت کرو۔ کہ ان کا حاصل مقدار اور سمت میں غیر متبدل ہے خواہ نقطہ و کہیں واقع ہو +

(۸) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے ایک ذرہ ر پر چار قوتیں عمل کرتی ہیں۔ جن کی سمتیں ر ا، ر ج، ب ر، د ر

ہیں اور وہ انہیں چار خطوط کے بالترتیب متناسب ہیں۔ تو ثابت کرو کہ ذرہ ر ساکن رہیگا۔ خواہ وہ کہیں واقع ہو +

اشلہ ذیل کو بذریعہ اشکال ہندسیہ حل کرو۔ ہر ایک صورت میں ع اور ق دو قوتیں ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ عہ ہے اور ان کا حاصل ح، ع کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے +

(۹) ع = ۲۵ پونڈ ق = ۲۰ پونڈ طہ = °۳۵ ح اور عہ دریافت کرو +

(۱۰) ع = ۵۰ کیلوگرام، ق = ۶۰ کیلوگرام، ح = ۷۰ کیلوگرام عہ اور طہ معلوم کرو +

(۱۱) ع = ۳۰، ح = ۴۰، عہ = °۱۳۰، ق اور طہ معلوم کرو +

(۱۲) ع = ۶۰، عہ = °۷۵، طہ = °۴۰، ق اور ح دریافت کرو +

(۱۳) ع = ۶۰، ح = ۴۰، طہ = °۵۰، ق اور عہ دریافت کرو +

(۱۴) ع = ۸۰، عہ = °۵۵، ح = ۱۰۰، ق اور طہ دریافت کرو +

(۱۵) ایک کشتی پانی میں ایک رسی کے ذریعہ سے جو کشتی کے طول سے °۲۰ کا زاویہ بناتی ہے کھینچی جاتی ہے۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ پانی کا عمل کشتی پر اس کے طول کی سمت سے °۴۰ کا زاویہ بناتا ہے اور رسی کا تناؤ ۵ ہنڈر ڈویٹ ہے اور اگر ان

قوتوں کا حاصل کشتی کے طول کی سمت میں ہو تو بذریعہ شکل اس کی مقدار معلوم کرو +

امثلہ نمبری (۴)

(۱) دو قوتوں کا درمیانی زاویہ ۱۲۰° ہے۔ ان میں بڑی کی مقدار ۸۰ ہے اور حاصل چھوٹی قوت سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ چھوٹی قوت معلوم کرو +

(۲) اگر دو قوتوں میں سے ایک دوسری سے دو چند ہو اور حاصل بڑی قوت کے برابر ہو تو ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو +

(۳) ایک ذرے پر عمل کرنیوالی دو قوتوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے اور ایک تیسری قوت ان میں سے ایک کے ساتھ ۱۵۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ اور تینوں ملکر توازن میں ہیں۔ پہلی دو قوتوں میں سے بڑی تین پونڈ ہے۔ باقی دو کی مقدار معلوم کرو +

(۴) دو قوتوں کا درمیانی زاویہ $\frac{5}{3}$ قائمہ ہے۔ اور ان کا حاصل چھوٹی پر عمود ہے۔ بڑی قوت ۳۰ پونڈ ہے حاصل اور دوسری قوت معلوم کرو +

(۵) دو قوتوں میں نسبت ۳ : ۵ ہے اور حاصل چھوٹی قوت پر عمود ہے بڑی قوت اور حاصل کا مقابلہ کرو +

(٦) دو قوتوں کا مجموعہ ۱۸ ہے۔ اور ان کا حاصل جو چھوٹی

قوت پر عمود ہے ۱۲ ہے قوتوں کو دریافت کرو +

(۷) اگر دو قوتوں ط اور ق کا درمیانی زاویہ ایسا ہو کہ ح = ط۔ تو ثابت کرو۔ کہ اگر ط کو دو چند کیا جائے تو نیا حاصل ق سے قائمہ بنائے گا +

(۸) دو قوتوں ط اور ق کا حاصل $\sqrt{۳}$ ق ہے اور ط کی سمت کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے ثابت کرو کہ یا تو ط = ق یا ط = ۲ ق +

(۹) دو قوتیں ۲ط اور ط ایک ذرے پر عمل کرتی ہیں۔ اگر پہلی کو دوچند کردیا جائے اور دوسری کو بقدر ۱۲ پونڈ زیادہ کردیا جائے۔ تو حاصل کی سمت نہیں بدلتی ہے۔ ط دریافت کرو +

(۱۰) دو قوتوں ط اور ق کا درمیانی زاویہ طہ ہے اور ان کا حاصل $(۲م+۱)\sqrt{ط^۲+ق^۲}$ کے برابر ہے جب ان کا درمیانی زاویہ ۹۰° ـ طہ ہو۔ تو ان کا حاصل $(۲م-۱)\sqrt{ط^۲+ق^۲}$ ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ مس طہ = $\frac{م-۱}{م+۱}$ +

(۱۱) دو قوتوں ط اور ق کا حاصل ح ہے۔ اگر ق کو دوچند کیا جائے تو ح دوچند ہوجاتا ہے اور اگر ق سمت متقابل میں عمل کرے تو بھی ح دوچند ہوجاتا ہے ثابت کرو کہ

ط : ق : ح :: $\sqrt{۲}$: $\sqrt{۳}$: $\sqrt{۲}$ +

(۱۲) اگر دو قوتوں ط اور ق کا درمیانی زاویہ معلوم ہو اور ان کا حاصل ط کی سمت سے زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ اگر قوتوں (ط + ح) اور ق کا درمیانی زاویہ

وہی ہوتو ان کا حاصل (ط + ح) کی سمت سے زاویہ ط/۲ بنائے گا +

(۱۳) ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی تین قوتیں توازن میں ہیں اگر ان میں سے ایک اپنے نقطہ عمل کے گرد بقدر ایک زاویہ معلومہ کے گھوم کر تبدیل سمت کرے۔ بذریعہ شکل ہندسیہ تینوں کا حاصل دریافت کرو اور اگر قوت کی سمت تبدیل ہوتی رہے تو ثابت کرو کہ حاصل کی سمت کی تبدیلی اس کا نصف ہوگی +

(۱۴) ایک قوت کی مقدار اور خط عمل معلوم ہیں۔بذریعہ شکل ہندسیہ اس کو دو مساوی قوتوں میں تحلیل کرو۔ جو دو نقاط معینہ میں سے گزریں +

اول جبکہ دونوں نقاط قوت کی ایک ہی جانب میں واقع ہوں دوم جبکہ وہ مقابل جانبوں میں ہوں +

(۱۵) دو قوتیں ایک جسم کے دو نقاطِ معلومہ پر عمل کرتی ہیں اگر ان کو ان نقطوں کے گرد ایک ہی سمت میں بقدر مساوی زاویوں کے گھمائیں تو ثابت کرو کہ ان کا حاصل ایک نقطہ معینہ میں سے گزرے گا +

(۱۶) اُ، ب، ج تین نقاطِ معینہ ہیں۔ اور ط ایک نقطہ ایسا ہے کہ قوتوں ط ا اور ط ب کا حاصل ہمیشہ ج میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ط کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا +

(۱۷) ایک قوت معلومہ ایک نقطۂ معینہ پر سمتِ مقررہ میں

عمل کرتی ہے۔ اور اس کو دو قوتوں میں تحلیل کیا گیا ہے اگر ان میں سے ایک کی مقدار غیر متبدل ہو تو ثابت کرو کہ دوسری کے خط تعبیر کا سرا ایک خاص دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا +

(۱۸) اگر ایک نقطہ کو ایک مثلث کے رؤس الزوایا سے ملایا جائے اور یہ تینوں خطوط تین قوتوں کے ایک نظام کو تعبیر کریں۔ پھر اسی نقطہ کو اضلاع مثلث کے نقاط تنصیف سے ملایا جائے اور ان سے تین قوتوں کا ایک اور نظام تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ یہ دونوں نظام آپس میں برابر ہونگے +

(۱۹) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو کہ اگر اس کو اس شکل کے چاروں کونوں سے ملا دیا جائے اور ان خطوط سے چار قوتیں تعبیر ہوں۔ تو وہ توازن میں ہوں +

(۲۰) ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع کے متناسب چار قوتیں اس طرح عمل کرتی ہیں کہ ان کے خطوط عمل ا ب اور ب ج اور ج د اور ا د ہیں ان کے حاصل کی مقدار اور سمت دریافت کرو اور جس نقطہ پہ وہ ج د سے ملتا ہے وہ بھی دریافت کرو +

(۲۱) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع ب ج اور د ا کی تنصیف نقاط ف اور ہ پر ہوتی ہے۔ اگر ا ب اور د ج کے مساوی اور متوازی دو قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں تو ثابت کرو کہ ان کا حاصل ۲ × ہ ف کے مساوی ہوگا

اور ہ ف کے متوازی ہوگا +

(۲۲) ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع اب، ب ج، ج د، د ا کی تنصیف بالترتیب نقاط ع ف، گ، ہ پر ہوتی ہے تو ثابت کرو کہ اگر ایک نقطہ پر ایسی قوتیں عمل کریں جو مقدار اور سمت میں ع گ اور ہ ف سے تعبیر ہوں۔ تو ان کا حاصل سمت اور مقدار میں اج سے تعبیر ہوگا +

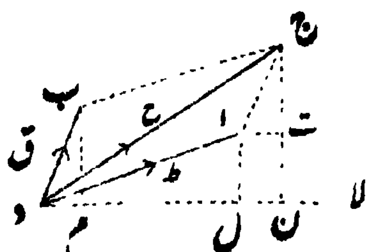
(۲۳) ایک دائرہ کا مرکز معین ہے اور اگر ایک نقطہ ط سے جو دائرہ کے اندر واقع ہے خطوط ط ا، ط ا، ط ا، ط ا محیط تک اس طرح کھینچے جائیں کہ ط میں گزرنے والے نصف قطر کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں تو ثابت کرو کہ اگر ان خطوط سے قوتیں تعبیر ہوں تو ان کا حاصل دائرے کے نصف قطر کی مقدار پر منحصر نہیں ہوگا +

باب سوم

قوتوں کی ترکیب اور تحلیل (مسلسل)

(۴۳) کسی سمت معینہ میں دو قوتوں کے اجزاے تحلیلی کا مجموعہ اسی سمت میں ان کے حاصل کے جزو تحلیلی کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ و ا اور و ب سے دو قوتیں ط اور ق تعبیر ہوتی ہیں اور ان کا حاصل ح خط و ج سے تعبیر ہوتا ہے اس صورت میں شکل و ا ج ب ایک متوازی الاضلاع ہوگی۔



فرض کرو کہ و لا سمت معینہ ہے و لا پر عمود ال، ب

ج ن کھینچو اور ج ن پر عمود ا ت نکالو۔ مثلثات و ب م اور ا ج ت کے اضلاع بالترتیب متوازی ہیں اور و ب مقدار میں ا ج کے برابر ہے +

∴ و م = ا ت = ل ن

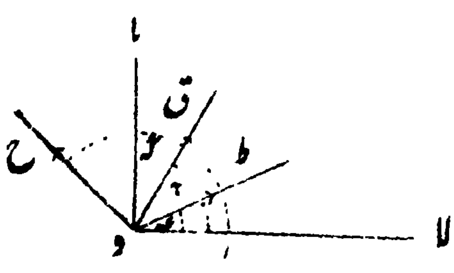
اس لئے و ن = و ل + ل ن = و ل + و م

لیکن و ل، و م، و ن سمت و لا میں بالترتیب ط، ق، ح کے اجزائے تحلیلی کو تعبیر کرتے ہیں پس مسئلہ ثابت ہوا +

اس مسئلہ کی توسیع بآسانی اس صورت میں بھی ہوسکتی ہے جبکہ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی دو سے زیادہ قوتوں کا حاصل زیر بحث ہو +

(۴۴) ایک ذرہ پر قوتوں کی کوئی تعداد ایک سطح میں عمل کرتی ہے ان کا حاصل دریافت کرو +

فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ح،. . . . ایک ذرہ و پر عمل کرتی ہیں



نقطہ د میں سے ایک خط معین د لا کھینچو اور د لا پر عمود د ما نکالو +

فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ح، ..... خط د لا سے زاوے ع، بہ، گہ، ..... بناتی ہیں +

قوت ط کے اجزائے ترکیبی سموت د لا اور د ما میں بموجب دفعہ ۳۰ بالترتیب ط جم ع اور ط جب ع ہیں اسی طرح سے ق کے اجزا ق جم بہ اور ق جب بہ ہیں اور باقی قوتوں کی تحلیل بھی اسی طرح سے ہوسکتی ہے +

پس کل قوتیں دو اجزائے ترکیبی کے مساوی ہوئیں جن میں سے ایک تو سمت د لا میں ط جم ع + ق جم بہ + ح جم گہ..... کے برابر ہے اور دوسرا سمت د ما میں

ط جب ع + ق جب بہ + ح جب گہ ..... کے برابر ہے +

فرض کرو کہ یہ اجزائے ترکیبی بالترتیب لا اور ما سے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کا حاصل ص سمت د لا سے زاویہ طہ بناتا ہے اب چونکہ ص کے اجزائے ترکیبی سموت د لا اور د ما میں بالترتیب ص جم طہ اور ص جب طہ ہیں اس لئے دفعہ گزشتہ کی استعانت سے

ص جم طہ = لا .... (۱)

ص جب طہ = ما .... (۲)

اس لئے مربعے لے کر جمع کرنے سے

$ص^2 = لا^2 + ما^2$

نیز عمل تقسیم سے مس طہ = $\frac{ما}{لا}$

ان دو معادلات سے ص اور ط دونوں معلوم ہوتے ہیں یعنی حاصل مطلوب کی مقدار اور سمت معلوم ہوتی ہے +

مثال (۱) تین قوتیں ۲، ۲√۲ اور ۱ پونڈ ایک ذرہ پر ایک سطح میں عمل کرتی ہیں پہلی متوازی الافق ہے دوسری افق سے زاویہ ۴۵° کا بناتی ہے اور تیسری سمت راس میں عمل کرتی ہے ان کا حاصل معلوم کرو +

یہاں $\text{لا} = 2 + 2\sqrt{2}\ \text{جم}\ 45^\circ + 0 = 2 + 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$

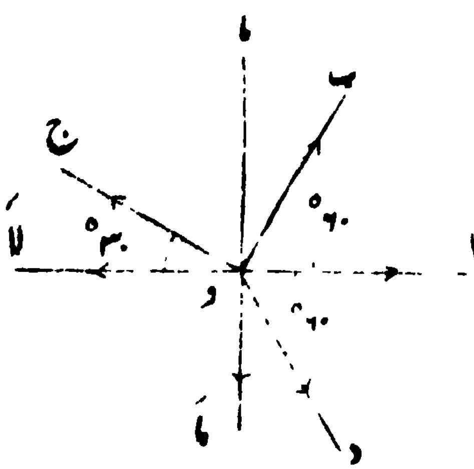
$\text{ما} = 0 + 2\sqrt{2}\ \text{جب}\ 45^\circ + 1 = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 3$

اس لئے $\text{ص جم ط} = 4$ اور $\text{ص جب ط} = 3$

$\therefore \text{ص} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ اور $\text{مس ط} = \frac{3}{4}$

اس لئے حاصل ایک ۵ پونڈ کی قوت کے برابر ہے جو افق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا ماس $\frac{3}{4}$ ہے اور زاویے کی قیمت $36^\circ\ 52'$ ہے +

مثال (۲) ایک ذرے پر قوتیں ط، ۲ط، ۳√۳ ط اور ۴ط عمل کرتی ہیں پہلی اور دوسری قوت کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے دوسری اور تیسری کا ۹۰° تیسری اور چوتھی کا ۱۵۰°۔ ثابت کرو کہ ان کا حاصل ایک ایسی قوت ط ہے جو



پہلی قوت سے زاویہ ۱۲۰° کا بناتی ہے +

اس مثال میں تسہیل عمل کے لئے خط معین و لا کو پہلی قوت ط کی سمت میں لو اور فرض کرو کہ لا و لاَ اور ما و ماَ دو خطوط معینہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں +

دوسری تیسری چوتھی قوتیں بالترتیب ربع اول دوم اور چہارم میں واقع ہیں اور صریحاً ب و لا = ۶۰°، ج و لاَ = ۳۰° اور د و لا = ۶۰° پہلی قوت کا کوئی جزو سمت و ما میں عمل نہیں کرتا دوسری قوت کے اجزاے ترکیبی سموت و لا اور و ما میں بالترتیب ۲ط جم ۶۰° اور ۲ط جب ۶۰° ہیں- تیسری قوت کے اجزا سموت و لاَ اور و ما میں بالترتیب ۳√۳ ط جم ۳۰° اور ۳√۳ ط جب ۳۰° ہیں- یعنی سموت و لا اور و ما میں -۳√۳ ط جم ۳۰° اور ۳√۳ ط جب ۳۰° ہیں +

اسی طرح سے چوتھی قوت کے اجزا سموت و لا اور و ما میں ۴ ط جم ۶۰° اور ۴ ط جب ۶۰° ہیں یعنی سموت و لا اور و ما میں ۴ ط جم ۶۰° اور -۴ ط جب ۶۰° ہیں +

اس لئے لا = ط + ۲ ط جم ۶۰° - ۳√۳ ط جم ۳۰° + ۴ ط جم ۶۰°

= ط + ط - ۹ط/۲ + ۲ ط = - ط/۲

اور ما = ۰ + ۲ ط جب ۶۰° + ۳√۳ ط جب ۳۰° - ۴ ط جب ۶۰°

= √۳ ط + ۳√۳/۲ ط - ۴ × √۳/۲ ط = √۳/۲ ط

اس لئے اگر حاصل ص خط و لا سے زاویہ ط٫ بنائے تو

ص = √(لا² + ما²) = ط

اور مس ط = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = - $\sqrt{3}$ = مس ۱۲۰°

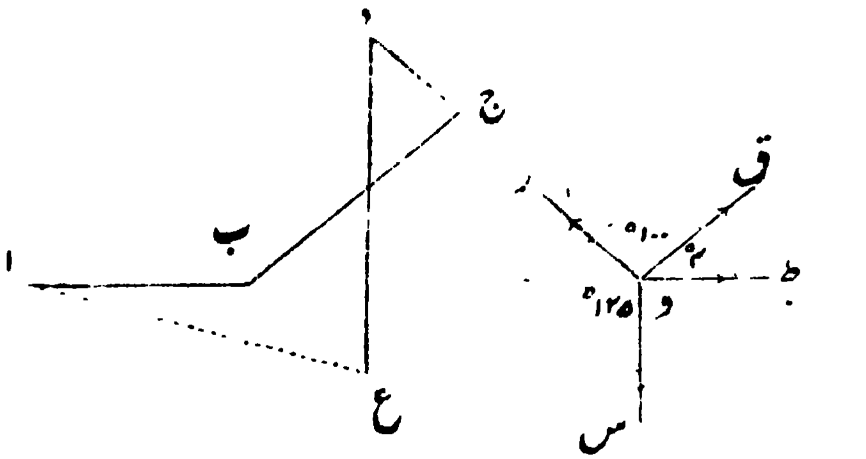
پس معلوم ہوا کہ حاصل مطلوب ح پہلی قوت سے زاویہ ۱۲۰° کا بناتا ہے +

(۴۵) ترسیمی عمل۔ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی متعدد قوتوں کا حاصل قوتوں کے کثیرالاضلاع کے ذریعہ سے بھی دریافت ہوسکتا ہے کیونکہ (دیکھو شکل دفعہ ۱۴) ہم جانتے ہیں کہ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی قوتیں اگر مقدار اور سمت میں کسی کثیرالاضلاع ا ب ج د ع ف کے اضلاع سے تعبیر ہوسکیں تو وہ متوازن ہوتی ہیں۔ لہذا ضرور ہے کہ ا ب، ب ج، ج د، د ع، ع ف قوتوں کا حاصل باقی ماندہ قوت ف ا کے مساوی اور متقابل ہو۔ یعنی ضرور ہے کہ حاصل ا ف سے تعبیر ہو۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی قوتوں ط، ق، ر، س، ت کا حاصل اس طرح سے بھی دریافت ہوسکتا ہے +

کوئی نقطہ ا مقرر کرو اور قوت ط کے متوازی اور متناسب خط ا ب کھینچو۔ اور اسی طرح سے علی التواتر ق، ر، س، ت کے متوازی اور متناسب خطوط ب ج، ج د، د ع، ع ف کھینچو حاصل مطلوب مقدار اور سمت میں خط ا ف سے تعبیر ہوگا خواہ قوتوں کی کچھ ہی تعداد ہو ترکیب بالا ہر ایک صورت میں استعمال ہوسکتی ہے +

مثال۔ چار قوتیں ۲، ۲ $\frac{1}{2}$، ۱، ۳ کلوگرام سموت وط، وق، ور، وس، میں اس طرح عمل کرتی ہیں کہ زاویہ ط و ق = ۴۰°

اور زاویہ ق و ر = ۱۰۰° اور زاویہ ر و س = ۱۲۵° ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو +



ا ب = ۲ انچ متوازی د ط کے لو
پھر نقطہ ب سے ب ج = ۲،۵ انچ متوازی ب ج کے کھینچو
پھر ج د = ۱ انچ متوازی و ر کے کھینچو
اور آخرالامر د ع = ۳ انچ متوازی و س کے بناؤ
ناپنے سے معلوم ہوگا کہ ا ع = ۳،۹۹ ہے اور زاویہ ب ا ع مقدار میں ۴۰° سے ذرا زیادہ ہے لہذا معلوم ہوا کہ حاصل مطلوب ۲،۹۵ کلوگرام ہے اور و ط سے زاویہ ۴۰° کا بناتا ہے +

امثلہ نمبری (۵)

[سوالات ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۸ عمل ترسیمی سے حل ہو سکتے ہیں]

(۱) ایک نقطہ ا پر قوتیں ۱، ۲، ۳√۳ پونڈ سموت ا ط، ا ق، ا ر میں عمل کرتی ہیں اور زاویہ ط ا ق = ۶۰° اور ط ا ر = ۹۰° قوتوں کا حاصل دریافت کرو +

(۲) ایک ذرہ پر تین قوتیں ۵، ۳، ۴ پونڈ عمل کرتی ہیں پہلی دو قوتوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے۔ اور تیسری قوت باقی دو کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتی ہے۔ ایک ایسی قوت دریافت کرو جو ذرہ کو ساکن رکھے +

(۳) تین مساوی قوتیں ط ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور درمیانی قوت باقی دو سے ۶۰° کے زاویے بناتی ہے۔ تینوں کا حاصل دریافت کرو +

(۴) تین قوتیں ۵ ط، ۱۰ ط، ۱۳ ط ایک ذرے پر ایک سطح میں عمل کرتی ہیں ہر دو قوتوں کا درمیانی زاویہ ۱۲۰° ہے ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو +

(۵) ایک نقطہ پر تین قوتیں ۲ ط، ۳ ط، ۴ ط عمل کرتی ہیں۔ اور ان کی سموت ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں کے بالترتیب متوازی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور خطِ عمل معلوم کرو +

(۶) ایک مربع ا ب ج د کے مرکز و پر قوتیں ط۱، ط۲، ط۳، ط۴ عمل کرتی ہیں ط۱ اور ط۲ کی سموت و ا اور و ب ہیں اور ط۳، ط۴ اضلاع ا ب اور ب ج پر عمود ہیں اگر

ط۱ : ط۲ : ط۳ : ط۴ :: ۴ : ۶ : ۵ : ۱

تو ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو +

(۷) ا ب ج د ایک مربع ہے اور قوتیں ۱ پونڈ، ۶ پونڈ اور ۹ پونڈ سموت ا ب، ا ج، ا د میں بالترتیب عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار دو درجہ اعشاریہ تک دریافت کرو +

(۸) ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی پانچ قوتوں میں توازن ہے۔ ان میں سے چار قوتیں ۴، ۴، ۱، ۳ پونڈ علی التواتر ایک دوسرے سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہیں پانچویں قوت کی مقدار معلوم کرو۔ شکل اور پیمائش سے اس کی تصدیق کرو +

(۹) چار قوتیں ط، ق، ر، س ایک ذرہ پر ایک سطح میں عمل کرتی ہیں ط، ق اور ق، ر اور ر، س کے درمیانی زاویے برابر ہیں اور ط، س کا درمیانی زاویہ ۱۰۸° ہے ان کا حاصل دریافت کرو +

(۱۰) ۲، ۲√۳، ۵، ۲√۳ اور ۲ پونڈ وزن کی پانچ قوتیں کسی مسدس منتظم کے ایک راس زاویہ پر باقی زاویوں کی عین سیدھ میں بالترتیب عمل کرتی ہیں ان کے حاصل کی سمت اور مقدار معلوم کرو +

(۱۱) کسی مسدس منتظم کے ایک راس زاویہ پر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ پونڈ وزن کی قوتیں باقی نقاط الزاویہ کی سمت میں علی الترتیب عمل کرتی ہیں ان کا حاصل دریافت کرو +

(۱۲) اگر ایک مخمس منتظم کے کسی راس الزاویہ پر ۷، ۱، ۱، ۳ پونڈ وزنی قوتیں باقی نقاط الزوایا کی سیدھ میں بالترتیب عمل کریں تو ثابت کرو کہ ان کا حاصل √۷۱ پونڈ ہوگا۔ شکل اور پیمائش سے اس کی تصدیق کرو +

(۱۳) کسی مثمن کے ایک راس الزاویہ پر مساوی قوتیں ط باقی نقاط الزوایا کی جہت میں عمل کرتی ہیں ان کا حاصل دریافت کرو +

امثلہ ذیل میں جداول مثلثی کی مدد سے یا بذریعہ اشکال قوتوں کے حاصل کی مقدار (دو اعشاریہ تک) اور اس کی سمت (حسابی صورت میں قریب ترین دقیقہ تک اور عملی صورت میں قریب ترین درجہ تک) دریافت کرو +

(۱۴) تین قوتیں ۱۱، ۷، ۸ پونڈ ایک خط معین سے زاوئے ۱۵° ۱۸ʹ اور ۴۷° ۵۰ʹ اور ۱۳۰° ۲۰ʹ بناتی ہیں +

(۱۵) چار قوتیں ۴ و ۳ و ۲ و ۱ پونڈ وزنی ایک خط معین سے زاوئے ۲۰° و ۴۰° و ۶۰° و ۸۰° بناتی ہیں +

(۱۶) چار قوتیں ۸ و ۱۲ و ۱۵ و ۲۰ پونڈ وزنی ایک خط معین سے زاوئے ۳۰° و ۷۰° و ۱۲۰° ۱۵ʹ اور ۱۵۵° بناتی ہیں +

(۱۷) تین قوتیں ۵۸ و ۷۴ و ۶۳ کلوگرام سموت و ا، و ب، و ج میں عمل کرتی ہیں اور زاویہ ا و ب = ۸۷° اور ب و ج = ۱۲۵°۔

(۴۶) ایک ذرہ پر قوتوں کی کوئی تعداد عمل کرتی ہے ان کی شرائط توازن دریافت کرو +

فرض کرو کہ حسب دفعہ ۴۴ قوتیں ذرہ و پر عمل کرتی ہیں +

اگر قوتوں میں توازن ہو تو ان کا حاصل معدوم ہوگا یعنی ص صفر ہوگا۔

اس لئے $\text{لا}^2 + \text{طا}^2 = 0$

اب چونکہ دو حقیقی مقادیر کے مربعوں کا مجموعہ صفر نہیں ہو سکتا جب تک کہ ان میں سے ہر ایک جداگانہ صفر نہ ہو

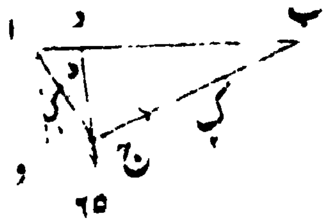
∴ لا = ۰ اور ما = ۰

پس معلوم ہوا کہ اگر ایک ذرہ پر عمل کرنیوالی قوتیں متوازن ہوں تو ان کے اجزائے تحلیلی کے مجموعات جبریہ دو سمتوں میں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں جداگانہ صفر رہوں گے +
اور برعکس اس کے اگر اجزائے تحلیلی کے مجموعے دو سمتوں میں جن کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو جداگانہ صفر ہوں تو قوتیں متوازن ہوگی کیونکہ اس صورت میں دونوں لا اور ما صفر ہیں اور اس لئے ص بھی صفر ہوگا +
اور چونکہ قوتوں کا حاصل صفر ہے اس لئے قوتیں متوازن ہونگی۔
(۴۷) جب ایک ذرہ پر صرف تین قوتیں عمل کرتی ہوں تو ان کی شرائط توازن اکثر بذریعہ مسئلہ لامی بآسانی حاصل ہوسکتی ہیں۔
(دفعہ ۴۰)

(۴۸) مثال ا۔ خط افقی میں دو نقاط ۱۳ فٹ کے فاصلہ پر ہیں ان پر دو ڈورے جن کے طول ۵ فٹ اور ۱۲ فٹ ہیں بندھے ہوئے ہیں اور ڈوروں کے ذریعہ ۶۵ پونڈ وزن معلق ہے ڈوروں کے تناؤ دریافت کرو +

فرض کرو کہ ا ج اور ب ج دو ڈورے ہیں پس ا ج = ۵ فٹ ب ج = ۱۲ فٹ اور ا ب = ۱۳ فٹ

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



چونکہ $۱۳^2 = ۱۲^2 + ۵^2$ اس لئے زاویہ $\widehat{\text{ا ج ب}}$ قائمہ ہے فرض کرو کہ وزن کی سمت ج ع خارج ہوکر ا ب کو نقطہ د پر ملتی ہے۔ تیز فرض کرو کہ زاویہ ج ب ا = ط کے ہے پس

زاویہ ا ج د = ۹۰° ۔ $\widehat{\text{ب ج د}}$ = $\widehat{\text{ج ب د}}$ = ط ۔

فرض کرو کہ ڈوروں کے تناؤ ک_1 اور ک_2 سے تعبیر ہوتے ہیں۔

بموجب مسئلہ لامی۔

$$\frac{\text{ک}_1}{\text{جب ع ج ب}} = \frac{\text{ک}_2}{\text{جب ع ج ا}} = \frac{٦٥}{\text{جب ا ج ب}}$$

اس لئے
$$\frac{\text{ک}_1}{\text{جب ب ج د}} = \frac{\text{ک}_2}{\text{جب ط}} = \frac{٦٥}{\text{جب } ۹۰^\circ}$$

اس لئے ک_1 = ٦٥ جم ط اور ک_2 = ٦٥ جب ط

لیکن جم ط = $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ب}} = \frac{۱۲}{۱۳}$

اور جب ط = $\frac{\text{ا ج}}{\text{ا ب}} = \frac{۵}{۱۳}$

اس لئے $\text{ک}_{۱}$ = ۶۰ پونڈ اور $\text{ک}_{۲}$ = ۲۵ پونڈ

یا اس طرح سے۔ مثلث ا ج ب کے اضلاع قوتوں $\text{ک}_{۱}$ اور $\text{ک}_{۲}$ اور ۶۵ کی سمت پر بالترتیب عمود ہیں +

$$\therefore \frac{\text{ک}_{۱}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ک}_{۲}}{\text{ا ج}} = \frac{۶۵}{\text{ا ب}}$$

اس لئے $\text{ک}_{۱} = ۶۵\,\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ب}} = ۶۰$

اور $\text{ک}_{۲} = ۶۵\,\frac{\text{ا ج}}{\text{ا ب}} = ۲۵$

عمل ترسیمی سے۔ خط ب ج کو اسقدر بڑھاؤ کہ وہ نقطہ ا میں سے گزرنیوالے خط راس کو و پر ملے تب مثلث ا ج و کے اضلاع تین قوتوں $\text{ک}_{۱}$ اور $\text{ک}_{۲}$ اور وزن کے بالترتیب متوازی ہوں گے پس معلوم ہوا کہ ا و ج قوتوں کا مثلث ہے +

$$\therefore \frac{\text{ک}_{۱}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ک}_{۲}}{\text{ج و}} = \frac{۶۵}{\text{ا و}}$$

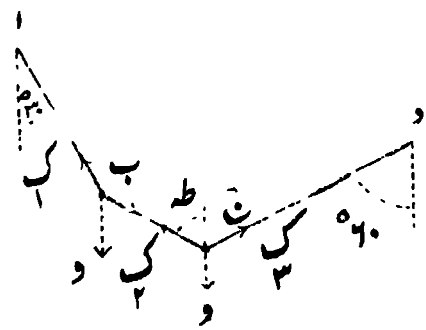
مثال ۲:۔ ایک ڈورا ا ب ج د دو نقاط معینہ ا اور د پہ بندھاہوا ہے اور اس کے دو اور نقطوں ب، ج پر دو مساوی اوزان و بندھے ہیں حالت سکون میں ڈورے ا ب اور ج د خط عمودی سے بالترتیب زاویۂ ۳۰° اور ۶۰° بناتے ہیں۔ ڈورے کے مختلف حصوں کے تناؤ اور ب ج کا میلان خط راس سے دریافت کرو +

فرض کرو کہ ڈورے کے تناؤ $\text{ک}_{۱}$ و $\text{ک}_{۲}$ و $\text{ک}_{۳}$ سے تعبیر ہوتے ہیں

د ب ج خط راس سے زاویہ طہ بناتا ہے +

[اطلاع۔ ڈورا ب ج نقطہ ب کو ج کی طرف کھینچتا ہے اور ج کو ب کی طرف اور تناؤ طول کے ہر ایک نقطہ پر یکساں ہے]

چونکہ ب متوازن ہے اس لئے ضرور ہے کہ اس نقطہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے عمودی اور افقی اجزاے ترکیبی دونوں جداگانہ صفر ہوں (دفعہ ۴۶)



اس لئے کا جم ۳۰° ـ کا جم طہ = و .... (۱)

اور کا جب ۳۰° ـ کا جب طہ = ۰ .... (۲)

اسی طرح چونکہ ج پر قوتیں متوازن ہیں اس لئے

ک$_1$ جم ۶۰° + ک$_2$ جم طہ = و .... (۳)

اور ک$_1$ جب ۶۰° - ک$_2$ جب طہ = ۰ .... (۴)

اگر ک$_1$ کو (۱) اور (۲) سے ساقط کریں تو

و = ک$_2$ [مم ۳۰° جب طہ - جم طہ]

= ک$_2$ [$\sqrt{3}$ جب طہ - جم طہ] .... (۵)

ایسے ہی (۳) اور (۴) میں ک$_1$ کی قیمت رکھنے سے

و = ک$_2$ [مم ۶۰° جب طہ + جم طہ]

= ک$_2$ [$\frac{1}{\sqrt{3}}$ جب طہ + جم طہ] .... (۶)

اس لئے (۵) اور (۶) سے

$\sqrt{3}$ جب طہ - جم طہ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ جب طہ + جم طہ

∴ ۲ جب طہ = ۲ $\sqrt{3}$ جم طہ

∴ مس طہ = $\sqrt{3}$ اور طہ = ۶۰°

طہ کی یہ قیمت مساوات (۵) میں رکھنے سے

و = ک$_2$ [$\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - $\frac{1}{2}$] = ک$_2$

اس لئے اس سے حاصل ہوا کہ

ک$_1$ = ک$_2$ $\frac{\text{جب } 60^\circ}{\text{جب } 30^\circ}$ = و × $\sqrt{3}$

اور (۴) سے ک$_3$ = ک$_2$ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جب } 60^\circ}$ = ک$_2$ = و

پس معلوم ہوا کہ ب ج کا میلان سمت راس سے ۶۰° ہے اور ڈورے کے مختلف حصوں اب اور ب ج اور ج د کے تناؤ بالترتیب $\sqrt{3}$ و اور و اور و ہیں +

امثلہ نمبری (۶)

(۱) دو آدمی ایک وزن و کو دو رسیوں کے ذریعہ جو بوجھ سے بندھی ہوی ہیں اٹھاکر لیجانا چاہتے ہیں۔ ایک رسی کا میلان سمت راس سے ۴۵° ہے اور دوسری کا ۳۰°ہر ایک رسی کا تناؤ دریافت کرو +

(۲) ایک جسم ۲ پونڈ وزنی ۲۵ انچ لمبی رسی کے ذریعہ ایک نقطہ معینہ سے معلق ہے اس پر ایک افقی قوت ف عمل کرتی ہے اور جسم نقطہ معینہ سے گزرنیوالے خط راس سے ۲۰ انچ کے فاصلہ پر حالت توازن میں ہے۔ رسی کا تناؤ اور ف کی قیمت دریافت کرو +

(۳) ایک جسم ۱۳۰ پونڈ وزنی ایک افقی شہتیر سے رسیوں کے ذریعہ معلق ہے رسیوں کے طول ۱ فٹ ۱۴ انچ اور ۵ فٹ ۳ انچ ہیں اور وہ شہتیر کے دو ایسے نقاط پر مربوط ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ۵ انچ ہے۔ رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۴) دو رسیاں طول میں ۶ فٹ اور ۸ فٹ ہیں ان کے ذریعہ ایک ۷۰ پونڈ وزنی جسم معلق ہے رسیوں کے سرے ایک خط افقی میں دو نقاط معینہ پر جن کا باہمی فاصلہ ۱۰ فٹ ہے بندھے ہوے ہیں۔ رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۵) دو رسیوں کے طول بالترتیب ۹ فٹ اور ۱۲ فٹ ہیں

اور ان کے ذریعہ ایک ۶۰ پونڈ وزنی جسم آویزاں ہے رسیوں کے دوسرے سرے دو ایسے نقاط معینہ پر بندھے ہوے ہیں جو خط افقی میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۱۵ فٹ ہے۔ رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۶) ایک رسی چھت سے لٹکی ہوی ہے اور اس کے ذریعہ چار چار پونڈ وزنی تین مساوی اجسام معلق ہیں ایک جسم نچلے سرے سے بندھا ہوا ہے اور باقی دو رسی کے دونوں سروں سے مساوی فاصلوں پر مربوط ہیں۔ رسی کے مختلف حصوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۷) ایک مثلث متساوی الساقین کی شکل میں تین کھونٹیاں ایک دیوار میں اس طرح لگی ہوی ہیں کہ قاعدہ متوازی الافق ہے اور قاعدہ کے مقابل کا زاویہ ۱۲۰° ہے۔ اگر ایک ڈورا جس کے دونوں سروں پر دو مساوی اوزان و مربوط ہوں کھونٹیوں پر سے گزرے تو ہر ایک کھونٹی پر کا دباؤ معلوم کرو +

(۸) ایک دریا کا عرض ۹۶ فٹ ہے اور اس کے مقابل کے کناروں پر دو آدمی ایک کشتی کو وسط دریا میں رسوں کے ذریعہ کھینچے لئے جا رہے ہیں ہر ایک آدمی ۱۰۰ پونڈ وزن کی قوت لگاتا ہے اگر رسے کشتی کے ایک ہی نقطہ پر بندھے ہوں اور ہر ایک کا طول ۶۰ فٹ ہو تو کشتی پر عمل کرنیوالی کل قوتوں کا حاصل دریافت کرو +

(۹) ایک سطح افقی میں دو چکنی متوازی سلاخیں ہیں ان پر سے

ایک رسی گزرتی ہے جس کے سروں پر دو مساوی اوزان بندھے ہوئے ہیں اور ایک تیسرا وزن سلاخوں کے درمیان کسی نقطہ پر بندھا ہے۔اس نظام کی حالت توازن دریافت کرو اور اس صورت میں ہر ایک سلاخ پر کا دباؤ معلوم کرو +

(۱۰) سطح افقی میں دو نقاط پر ایک رسی بندھی ہے اور ۲۰ پونڈ وزنی حلقہ اس پر آزادانہ حرکت کرتا ہے اگر ایک افقی قوت ط حلقے پر عمل کرے اور حالت توازن میں رسی کے مختلف حصے سمت راس سے زاویہ ۴۵° اور ۷۵° بنائیں تو ط کی قیمت دریافت کرو +

(۱۱) دو بلا وزن حلقے ایک چکنے عمودی دائرے پر چڑھے ہوئے حرکت کرسکتے ہیں اور ان میں سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے دونوں سروں سے دو اوزان معلق ہیں اور حلقوں کے درمیان کسی نقطہ سے ایک اور وزن آویزاں ہے اگر حالت توازن میں حلقوں کے فاصلے اوج دائرہ سے ۳۰° ہوں تو اوزان کی باہمی نسبتیں دریافت کرو +

(۱۲) ایک سطح افقی میں دو چکنی کھونٹیاں ا اور ب ہیں ان پر سے ایک رسی گزرتی ہے جسکی سروں پر دو مساوی اوزان جن میں سے ہر ایک ۱۱۲ پونڈ وزنی ہے بندھے ہوئے ہیں اگر ا. ب کے نقطہ تنصیف پر رسی سے ایک اور ۵ پونڈ وزن باندھ دیا جائے تو حالت توازن میں خط اب کے نیچے اس کا فاصلہ دریافت کرو۔ طول ا ب = ۱۰ فٹ۔

اگر چھوٹا وزن رسی کے کسی اور نقطہ پر لگا دیا جائے تو کیا
تغیر ہوگا +

(۱۳) دو رسیوں کے ذریعہ جن کے طول ۷ اور ۲۴ انچ ہیں ایک جسم ۱۰ پونڈ وزنی معلق ہے رسیوں کے دوسرے سرے ایک ۲۵ انچ لمبی سلاخ کے سروں سے بندھے ہوے ہیں اگر سلاخ کو اس طرح سہارا دیا جائے کہ جسم سلاخ کے نقطہ تنصیف میں سے گزرنے والے خط راس میں واقع ہو تو رسی کا تناؤ دریافت کرو +

(۱۴) ایک وزنی زنجیر کے سروں پر دو اوزان ۱۰ اور ۱۶ پونڈ بندھے ہوے ہیں اور وہ ایک چکنی چرخی پر حالت توازن میں ہے اگر زنجیر کا زیادہ سے زیادہ تناؤ ۲۰ پونڈ ہو تو اس کا وزن دریافت کرو +

(۱۵) ایک ۸ فٹ ۹ انچ لمبی زنجیر کا وزن ۱۵ پونڈ ہے اس کے ایک سرے پر ایک وزن ۷ پونڈ بندھا ہوا ہے۔ اور زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر حالت توازن میں ہے۔ دونوں طرف زنجیر کا طول دریافت کرو +

(۱۶) ایک جسم تار کے دائرہ میں پرویا ہوا آزادانہ حرکت کرتا ہے اور ایک رسی کے ذریعہ جس کا طول نصف قطر دائرہ کے برابر ہے اوج دائرہ سے مربوط ہے۔ رسی کا تناؤ اور دائرہ کا عمل معلوم کرو +

(۱۷) ایک یکساں ہموار تیرا معین کی شکل کا ہے۔ اور اس کا

ایک زاویہ ۱۲۰° ہے اگر اس کے مرکز پر دو قوتیں ط اور ق (ط > ق)، قطروں کی سمت میں عمل کریں اور معین کو اس طرح سہاریں کہ اس کا ایک ضلع متوازی الافق ہو تو ثابت کرو کہ ط^۲ = ۳ ق^۲

(۱۸) ایک گھوڑیکی باگ کے سرے دہانہ کے دونوں طرف دو حلقوں میں سے گزرتے ہیں اگر باگ کو دوہرا کرکے سروں کو گھوڑے کے سر کے دونوں طرف نکتے سے دو نقاط معینہ پر باندھ دیا جائے تو معلوم کرو کہ اگر کوچوان باگ کو ط قوت سے کھینچے تو گھوڑے کی زبان پر دہانیکا دباؤ کتنا ہوگا +

(۱۹) تین مساوی بلا وزن ڈورے ایک مثلث متساوی الاضلاع ا ب ج کی شکل میں بندھے ہیں اور وزن و نقطہ ا سے آویزاں ہے اگر مثلث اور وزن کو دو ڈورں کے ذریعہ اس طرح سہارا جائے کہ ب ج متوازی الافق ہو اور ڈورے ب ج سے ۱۳۵° کے زادیئے بنائیں تو ثابت کرو کہ ب ج کا تناؤ و/۲ (۳ - √۳) ہوگا +

(۲۰) تین بلا وزن ڈورے اج و ب ج و اب ایک مثلث متساوی الساقین کی شکل میں بندھے ہیں جس کا راس ج ہے۔ اگر ایک وزن و نقطہ ج سے معلق ہو اور یہ سب نظام دو قوتوں کے ذریعہ جن کی سموت زاویہ ا اور ب کی تنصیف کریں اس طرح سہارا جائے کہ ا ب متوازی الافق ہو تو ا ب کا تناؤ دریافت کرو +

(۲۱) دو نقاط معینہ سے جو ایک ہی خط افقی میں نہیں ہیں ایک بلا وزن رسی کے دوسرے بندھے ہوئے ہیں۔ رسی پر ایک چھوٹا چکنا وزنی حلقہ چڑھا ہوا ہے جو اس پر آزادانہ حرکت کرسکتا ہے۔ حلقے کا مقامِ سکون دریافت کرو +

اگر حلقہ کسی نقطۂ معینہ پر مربوط ہو اور رسی پر حرکت نہ کرسکے تو ایسے معادلات دریافت کرو جن سے رسی کے ہر دو حصوں کے تناؤ کی باہمی نسبت معلوم ہوسکے +

(۲۲) چار کھونٹیاں ایک مسدس منتظم کے چار اعلیٰ نقاط پر لگادی گئی ہیں (مسدس کے دو نچلے نقاط خط افقی میں ہیں) اور ان پر سے ایک رسی کا حلقہ گزرتا ہے جس سے ایک وزن و معلق ہے حلقے کا طول اتنا ہے کہ دو نچلی کھونٹیوں پر جو زاویے بنتے ہیں وہ قائمے ہیں۔ رسی کا تناؤ اور کھونٹیوں پر کا دباؤ معلوم کرو +

(۲۳) بتاؤ کہ بہاؤ کا زور ایک ناؤ کو دریا پار لیجانے میں کس طرح استعمال ہوسکتا ہے یہ مان لو کہ کشتی کا مرکز ایک لمبی رسی کے ذریعہ وسطِ دریا میں ایک نقطۂ معینہ سے بندھا ہوا ہے +

(۲۴) اس کی تحقیق کرو کہ ایک جہاز کو ہوا کی سمت کے قریباً متقابل کس طرح چلاسکتے ہیں +

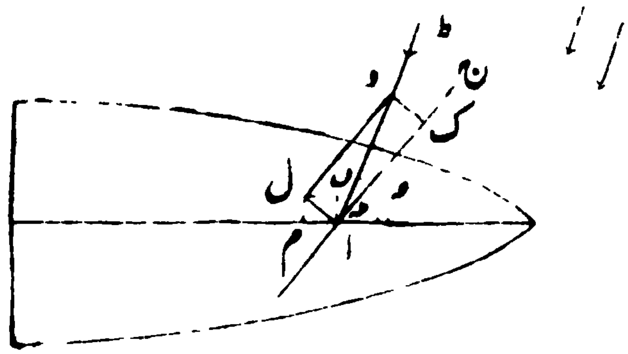
اور ثابت کرو کہ بادبانوں کو اس طرح لگانا چاہیئے کہ وہ جہاز کی ریڑھ اور ہوا کی سمت ظاہری کے درمیانی زاویہ کی

تنصیف کریں تاکہ جہاز کو آگے لیجانیوالی قوت مقدار میں بڑی سے بڑی ہو +

فرض کرو کہ ا ب جہاز کی ریڑھ کی سمت ہے تو حرکت جہاز کی سمت بھی یہی ہوگی اور و ا ہوا کی سمت ظاہری ہے اور زاویہ و ا ب = عہ حادہ ہے۔ نیز فرض کرو کہ بادبان کی سمت ا ج سے تعبیر ہوتی ہے اور ا ج سموت و ا اور ا ب کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب ا ج برابر طہ کے ہے +

فرض کرو کہ ہوا کی قوت بادبان پر ط سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس کو بادبان کے متوازی اور عمودی سمت میں تحلیل کرو چونکہ جزو ترکیبی (ک ا =) ط جم (عہ - طہ) بادبان کے متوازی عمل کرتا ہے اس لئے اس کا اثر جہاز کی حرکت پر کچھ نہیں ہے اور جزو ترکیبی (ل ا =) ط جب (عہ - طہ) جو بادبان کے عمودی سمت میں عمل کرتا ہے دوبارہ دو اجزاے ترکیبی میں تحلیل ہوسکتا ہے یعنی (ن ا =) ط جب (عہ - طہ) جم طہ جوکہ ا ب پر عمود ہے اور (م ا =) ط جب (عہ - طہ) جب طہ جو ا ب کی سمت میں عمل کرتا ہے +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



اول جزو ترکیبی کے عمل سے جہاز کے طول کی عمودی سمت میں حرکت پیدا ہوتی ہے اس کو آڑی حرکت کہتے ہیں اور اس کی مزاحمت بہت کچھ جہاز کی بناوٹ پر منحصر ہے بالعموم قاعدہ جہاز کی شکل و ترکیب اس طرح تجویز کی جاتی ہے کہ اس حرکت کو حتی الامکان کم کردے +

مگر دوسرا جزو ترکیبی ط جب (عہ - ط) جب ط سمت اب میں کبھی صفر نہیں ہوسکتا جب تک کہ بادبان کی سمت جہاز کی ریڑھ کی سمت سے یا ہوا کی سمت ظاہری سے

منطبق نہ ہو یا جب تک کہ زاویہ عہ برابر صفر کے نہ ہو جس صورت میں ہوا جہاز کی سمت کے عین متقابل ہوگی +
اس سے معلوم ہوا کہ جہاز کو آگے لیجانے کے لئے ہوا کی کچھ نہ کچھ قوت ضرور عمل کرتی ہے لیکن جہاز کو گھومنے سے روکنے کے لئے سکان کو ہمیشہ دہنے رکھنا چاہئے +

اس کی یہ قوت = $\frac{1}{2}$ ط [جم (عہ - ۲ طہ) - جم عہ]
اس لئے مقدار اعظم اس وقت ہوگی جب جم (عہ - ۲ طہ) اعظم ہو۔ یعنی جس وقت عہ - ۲ طہ = ۰۔ یعنی جس وقت طہ = $\frac{عہ}{۲}$ یعنی جب بادبان کی سمت ہوا اور جہاز کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے +

(۹۴) **مثالوں کا حل ترسیمی**۔ بعض مسائل ایسے ہوتے ہیں جنکا ترکیب تحلیلی سے حل کرنا نہایت دشوار اور طویل ہوتا ہے لیکن بذریعہ اشکال وہ بآسانی حل ہوسکتے ہیں اس قسم کے سوالات انجنیری اور عملی کاموں میں اکثر واقع ہوتے ہیں اور بالعموم وہ سب کے سب مسائل قوتوں کے مثلث اور قوتوں کے کثیر الاضلاع کی استعانت سے بآسانی حل ہوسکتے ہیں۔
عملی حسابات میں جو آلات کثیر الاستعمال ہیں وہ یہ ہیں پرکار خط کش۔ پیمانے۔ قطری پیمانے اور زاویہ کش یا چاندہ جو زاویوں کے اندازہ کرنے کا ایک اوزار ہے۔ اس طرح سے جو نتائج مستنبط ہوتے ہیں ان میں حسابی صحت نہیں ہوتی لیکن اگر طالب علم احتیاط سے کام لے اور آلات کے

استعمال میں مشاق ہو تو جوابات ایک درجہ اعشاریہ تک بالعموم درست ہو سکتے ہیں +

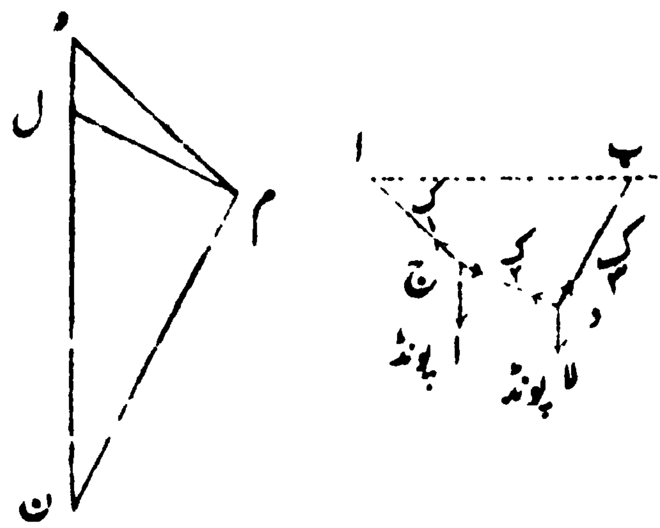
مفصلہ ذیل حل شدہ مثالوں کی اشکال ان کے اصلی نقشہ جات سے چھوٹے پیمانے پر کھینچی گئی ہیں طالب علم کو چاہیئے کہ ہر ایک مثال میں پیمانہ مذکور کے موافق خود شکل بنا کر ان کی تصدیق کرے +

(۵۰) مثال (۱) ایک رسی ا ج د ب کے سرے دو ایسے نقاط ا اور ب پر بندھے ہوئے ہیں جو ایک خط افقی میں واقع ہیں اور جن کا باہمی فاصلہ ۷ فٹ ہے۔ا ج د ج د د ب کے طول بالترتیب ۳ ½ و ۳ و ۴ فٹ ہیں اور نقطہ ج پر ایک پونڈ وزن آویزاں ہے۔ اور ایک ایسی مقدار کا وزن نقطہ د پر لگا دیا گیا ہے کہ زاویہ ج د ب قائمہ ہے۔ اس وزن کی مقدار اور رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

فرض کرو کہ ک و ک۱ و ک۲ مطلوبہ تناؤ ہیں اور لا پونڈ وزن د پر لگایا گیا ہے ایک خط د ل سمت شاقولی میں مساوی ا انچ لو جو نقطہ ج سے لٹکنے والے ایک پونڈ وزن کو تعبیر کرے نقطہ د سے د م متوازی ا ج کے اور ل سے ل م متوازی ج د کے کھینچو +

د ل م ایک قوتوں کا مثلث ہے جس میں د م تناؤ ک کو اور ل م تناؤ ک۲ کو تعبیر کرتے ہیں +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



و ل کو سمت شاقولی میں نیچے کی طرف خارج کرو اور نقطہ م سے م ن متوازی ب د کے کھینچو +

اب چونکہ ل م سے تناؤ ک۲ تعبیر ہوتا ہے اس لئے معلوم ہوا کہ ک۲ کو م ن اور ۷ کو ل ن تعبیر کرتا ہے۔ ناپنے سے معلوم ہوگا کہ

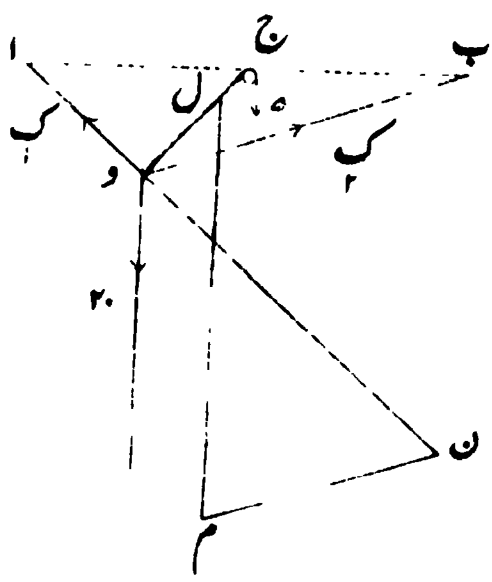
و م = ۳٫۰۵ انچ، ل م = ۲٫۴۹ انچ

و ن = ۱٫۵۱ انچ اور ن ل = ۵٫۶۳ انچ

اس لئے ثابت ہوا کہ نقطہ د پر وزن ۵٫۶۳ پونڈ ہے اور تناؤ بالترتیب ۳٫۰۵ و ۲٫۴۹ و ۵٫۱ پونڈ ہیں +

مثال (۲) ا اور ب دو نقاط ایک خط افقی میں باہم ۱۶ فٹ کے

فاصلہ پر واقع ہیں دو رسیاں ا و اور ب و جن کے طول بالترتیب ۶ اور ۱۲ فٹ ہیں نقطہ و پر ہر ایک وزن مساوی ۲۰ پونڈ سہارتی ہیں ایک تیسری رسی کا ایک سرا نقطہ و پر مربوط ہے اور دوسرا سرا ایک چھوٹی چکنی چرخی ج پر سے گزرکر ایک جسم ۵ پونڈ وزنی سے بندھا ہوا ہے چرخی خط اب کے نقطہ وسط ج پر لگی ہوی ہے ا و اور و ب کے تناؤ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ک۱ اور ک۲ مطلوبہ تناؤ ہیں وج پر ول۔ ا انچ قطع کرو جو رسی وج کے ۵ پونڈ تناؤ کو تعبیر

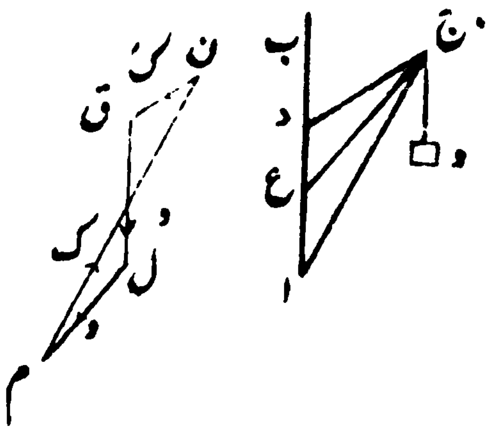
کرے۔ ل م کو سمت شاقولی میں برابر ۴ انچ بناؤ اور نقطہ م میں سے م ن متوازی و ب کے کھینچو کہ وہ ا و ممدودہ کو نقطہ ن پر ملے۔ تب بموجب قوتوں کے کثیر الاضلاع کے خطوط و ن اور ن م تناؤ کپ اور کپ کو تعبیر کریں گے+ ناپنے سے معلوم ہوتا ہے کہ و ن = ۳،۹ انچ اور ن م = ۲،۴۵ انچ

اس لئے کپ = ۵ × ۳،۹ = ۱۹،۵ پونڈ

اور کپ = ۵ × ۲،۴۵ = ۱۲،۲۵ پونڈ

مثال (۳) حمالہ۔ حمالہ کے ضروری اجزا شکل ذیل میں دئے گئے ہیں ا ب ایک سیدھی لاٹھ ہے اور ا ج ایک شہتیر ہے جو سرے ا کے گرد گھوم سکتا ہے اس کو بازو کہتے ہیں ایک لکڑی کی سلاخ یا زنجیر ج د جس کو بند کہتے ہیں اور جو لاٹھ ا ب کے نقطہ د پر لگی ہوی ہے شہتیر ا ج کو سہارتی ہے نقطہ ج پر ایک چرخی ہے اس پر سے ایک زنجیر گزرتی ہے جس کا ایک سرا بوجھ سے بندھا ہوا ہے جس کو اٹھانا منظور ہے اور دوسرے سرے ع پر اٹھانیوالی قوت عمل کرتی ہے یہ سرا اکثر ایک اسطوانہ کے گرد لپٹا ہوا ہوتا ہے۔ بند ج د بعض اوقات متوازی الافق ہوتا ہے اور بالعموم زنجیر ج ع کی سمت اس پر منطبق ہوتی ہے بذریعہ شکل ذیل بازو اور بند میں عمل کرنیوالی قوتیں عمل ترسیمی سے اس طرح معلوم ہوسکتی ہیں+

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



ق ل کو سمت شاقولی میں اس طرح کھینچو کہ وہ موافق کسی پیمانہ کے وزن و کو تعبیر کرے اور پھر ل م کو مساوی ق ل کے اور متوازی ج ع کے کھینچو اور نقطہ م سے م ن متوازی ا ج کے اور ق ن متوازی د ج کے کھینچو۔ تب ق ل م ن قوتوں کا کثیر الاضلاع نقطہ ج کے توازن کو ظاہر کرے گا۔ کیونکہ ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ زنجیر کے تناؤ میں چرخی ج پر گزرنے سے کوئی فرق نہیں آتا اور اس لئے ج ع کا تناؤ برابر وزن و کے ہے اس لئے اگر ا ج کا ثقل ک سے اور ج د کی قوت جاذبہ کَ سے تعبیر ہو تو

$$\frac{\text{ک}}{\text{م ن}} = \frac{\text{کَ}}{\text{ن ق}} = \frac{\text{و}}{\text{ق ل}}$$

اس سے معلوم ہوا کہ تناؤ ک اور کَ دونوں بالترتیب م ن اور ن ق سے موافق اسی پیمانہ مذکورہ کے تعبیر ہوتے ہیں۔جس کے موافق وزن و طول ق ل سے تعبیر ہوتا ہے +

امثلہ نمبری (۷)

امثلہ ذیل کو بذریعہ اشکال حل کرو

(۱) ایک کشتی کو دو شخص ایک دریا کے مقابل کے کناروں سے دو رسیوں کے ذریعہ جو کشتی کے ایک ہی نقطہ پر بندھی ہوی ہیں کھینچے لئے جارہے ہیں۔دریا کا عرض ۵۰ فٹ ہے۔ایک رسی ۳۰ فٹ لمبی ہے اور اس کے ذریعہ ۳۵ پونڈ قوت کشتی پر عمل کرتی ہے دوسری رسی کا طول ۴۵ فٹ ہے۔اس طرح سے کشتی یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں جارہی ہے۔ پانی کی مزاحمت کشتی کے خلاف اور دوسری رسی کا تناؤ دریافت کرو +

(۲) ایک حمالہ کا بازو ۱۰ فٹ ہے اور بند متوازی الافق ہے اور پائین بازو سے عموداً ۶ فٹ اوپر ایک نقطہ پر لگا ہوا ہے اگر ایک ٹن وزن حمالہ سے معلق ہو تو بند کا تناؤ اور بازو کا عمل دریافت کرو +

(۳) ا اور ب دو نقاط معینہ ہیں۔ب نقطہ ا کے نیچے کی طرف واقع ہے اور ان میں افقی اور عمودی فاصلے بالترتیب ۴ فٹ اور ا فٹ ہیں۔دو رسیاں ا ج اور ب ج

طول میں بالترتیب ۵ فٹ اور ۳ فٹ ہیں اور نقطہ ج پر ایک جسم اہنڈرڈ ویٹ وزنی بندھا ہوا ہے۔رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۴) دو نقاط ا اور د پر جو ایک ہی خط افقی میں واقع ہیں ایک بلا وزن رسی ا ب ج د بندھی ہوی ہے اور نقاط ب اور ج سے دو اوزان معلق ہیں۔ حالت توازن میں خط ا د کے نیچے کی طرف نقاط ب اور ج کے فاصلے بالترتیب ۴ اور ۶ فٹ ہیں۔ طول ا ب = ۶ اور ج د = ۸ اور فاصلہ ا د = ۱۴ فٹ۔اگر نقطہ ب پر وزن کی مقدار ۴ پونڈ ہو تو حالت توازن میں نقطہ ج پر وزن کیا ہوگا؟

(۵) ایک ڈھانچہ ا ب ج دو سہاروں ا اور ب پر سطح عمودی میں اس طرح ٹنگا ہوا ہے کہ ا ب متوازی الافق ہے۔ اگر طول ا ب ، ب ج ، ج ا بالترتیب ۱۰ فٹ ۷ فٹ اور ۹ فٹ ہوں اور ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ وزن ج پر رکھا جائے تو نقاط ا اور ب پر کے عمل دریافت کرو اور ڈھانچے کے مختلف حصوں میں عمل کرنیوالی قوتیں بھی دریافت کرو +

(۶) ایک ڈھانچہ ا ب ج دو سہاروں ا اور ب پر اس طرح ٹنگا ہوا ہے کہ ا ب متوازی الافق ہے اور ایک وزن ۲۰۰ پونڈ نقطہ ج سے آویزاں ہے۔اگر ا ب = ۵ فٹ ب ج = ۴ فٹ اور ا ج = ۳ فٹ تو ا ج اور ج ب میں کے تناؤ یا دباؤ دریافت کرو۔ نیز نقاط ا اور ب پر کے

عمل معلوم کرو +

(۷) ایک حالہ کا بازو ۲۰ فٹ ہے بند ۱۶ فٹ اور لاٹھ ۱۰ فٹ۔ اگر ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کا وزن ایک زنجیر کے سرے سے لٹکایا جائے جو حالہ کے بازو کے سرے پر ایک چرخی پر سے گزر کر بند سے منطبق ہوجاتی ہے تو بازو میں کا عمل اور بند کا تناؤ دریافت کرو +

(۸) دفعہ ۵۰ مثال ۳ کی شکل میں بند کی سمت افقی ہے اور زنجیر اس پر منطبق ہوتی ہے۔ اگر و = ۵۰۰ پونڈ اج = ۱۱ فٹ اور د ج = ۵ فٹ تو د ج اور اج میں کی قوتیں دریافت کرو +

(۹) دفعہ ۵۰ مثال ۳ کی شکل میں زاویہ ج د ع = ۴۵° اور زاویہ اج د = ۱۵° اور زنجیر ع ج بازو د ج پر منطبق ہوتی ہے۔ اگر وزن و برابر ایک ٹن کے ہو تو اج اور ج د میں کی قوتیں دریافت کرو +

(۱۰) دفعہ ۵۰ مثال ۳ کی شکل میں د ا = ۱۵ فٹ، دج = ۲۰ فٹ اور اج = ۳۰ فٹ اور نقطہ ج سے وزن ایک ٹن آویزاں ہے جب زنجیر

(۱) بازو ج اپر

(۲) بند ج د پر

منطبق ہو تو ہر ایک صورت میں اجزا اج د ج و د ا میں کے تناؤ یا دباؤ دریافت کرو +

(۱۱) دفعہ ۵۰ مثال ۳ کی شکل میں بازو ا ج طول میں ۲۰ فٹ ہے بند ج د = ۱۸ فٹ ا د = ۱۲ فٹ اور ا ع = ۸ فٹ اگر ۳ ٹن کا وزن زنجیر کے سرے سے لٹکایا جائے تو ا ج اور ج د میں کے تناؤ یا دباؤ دریافت کرو +

(۱۲) چار بلا وزن سلاخوں کو باہم وصل کرنے سے ایک ایسا ڈھانچہ ا ب ج د طیار کیا گیا ہے جس میں سب جوڑ کھینے ہوئے ہیں۔ ا ب = ا د = ۴ فٹ اور ب ج = ج د = ۳ فٹ۔ ایک ۵ فٹ لمبے باریک ڈورے کے ذریعہ جوڑ ج کو ا سے مربوط کردیا گیا ہے۔ سو سو پونڈ کے اوزان ب اور د پر باندھ دیے گئے ہیں اور ڈھانچہ نقطہ ا سے معلق ہے ثابت کرو کہ ا ج میں کا تناؤ ۲۵ پونڈ ہے +

(۱۳) مثال (۱۲) میں رسی ا ج کے بجائے ایک بے وزن سلاخ ب د طول میں ۳ فٹ ڈھانچہ کو مستحکم کرنیکے لئے استعمال کی گئی ہے۔ صرف نقطہ ج پر ۱۰۰ پونڈ وزن ہے باقی ب اور د پر کچھ نہیں ثابت کرو کہ سلاخ ب د میں کا عمل ۷۷ پونڈ ہے +

(۱۴) مثال (۱۲) میں فرض کرو کہ ب اور د پر کوئی اوزان نہیں ہیں اور ڈھانچہ ایک چکنے ہموار میز پر رکھ دیا گیا ہے اور جوڑ ب اور د دو قوتوں سے جن میں سے ہر ایک ۲۵ پونڈ ہے خط ب د کی سیدھ میں ایک دوسرے کی طرف دبائے گئے ہیں ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ۶ء ۳۱ پونڈ وزن

کے برابر ہے +

(۱۵) ایک معین ا ب ج د چار بلا وزن سلاخوں کو ڈھیلے طور پر جوڑنے سے بنائی گئی ہے۔ ڈھانچے کو مستحکم کرنے کے لئے ایک بے وزن سلاخ جس کا طول معین کے ضلع کا نصف ہے ا ب اور ا د کے نقاط تنصیف پر لگادی گئی ہے اگر ڈھانچہ نقطہ ا سے لٹکادیں اور نقطہ ج پر ایک بوجھ ۱۰۰ پونڈ باندھ دیں تو ثابت کرو کہ قطری سلاخ کا عمل ۵ و ۱۵ اپونڈ وزن ہوگا +

باب چہارم

متوازی قوتیں

(۵۱) ابواب دوم و سوم میں ہم ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل دریافت کرنے کے طریقوں پر بحث کرچکے ہیں اس باب میں ہم متوازی قوتوں کی ترکیب پر غور کرینگے +

روز مرّہ زندگی میں سکونیات کے جو مسائل پیش آتے ہیں ان میں متوازی قوتوں کی مثالیں عام ہیں۔ جب دو متوازی قوتیں ایک ہی رخ میں عمل کریں تو وہ موافق کہلاتی ہیں۔ اور جب وہ ایک رخ میں عمل نہ کریں تو وہ مخالف کہلاتی ہیں +

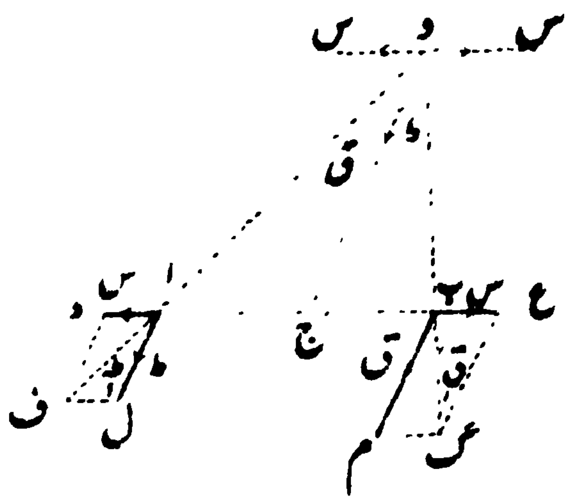
(۵۲) ایک جسم استوار پر دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل دریافت کرو +

صورت اول۔ فرض کرو کہ قوتیں موافق ہیں +

فرض کرو کہ قوتیں ط اور ق جسم کے نقاط ا اور ب پر عمل کرتی ہیں۔ اور فرض کرو کہ وہ خطوط ا ل اور ب م سے تعبیر ہوتی ہیں +

ا ب کو ملاؤ اور ا اور ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ۔ جن میں سے ہر ایک کی مقدار س ہے اور

جو سمت ب ا اور ا ب میں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ خطوط ا د اور ب ع ان کو تعبیر کرتے ہیں۔ یہ دو قوتیں باہم متوازن ہیں اور جسم کے توازن پر ان کا کچھ اثر نہیں + متوازی الاضلاع ا ل ف د اور ب م ع گ کی تکمیل کرو فرض کرو کہ قطر ف ا اور گ ب خارج ہوکر نقطہ و پر ملتے ہیں۔ خط و ج ، ا ل یا ب م کا متوازی کھینچو تاکہ ا ب کو ج پر ملے +



قوتیں ط اور س جو ا پر عمل کرتی ہیں ان کا حاصل ایک قوت ط ہے جو ا ف سے تعبیر ہوتی ہے اس کا نقطہ

عمل ا سے و پر منتقل کرو اسی طرح قوتیں ق اور س جو ب پر عمل کرتی ہیں ان کا حاصل ایک قوت ق ہے جو ب گ سے تعبیر ہوتی ہے اس کے نقطہ عمل کو بھی و پر منتقل کرو۔ قوت ط جو و پر عمل کرتی ہے وہ دو قوتوں میں تحلیل ہوسکتی ہے۔ جن میں سے ایک کی مقدار س اور سمت ا د کے متوازی ہے۔ اور دوسری کی مقدار ط اور سمت و ج ہے +

اسی طرح قوت ق جو و پر عمل کرتی ہے وہ بھی دو قوتوں میں تحلیل ہوسکتی ہے۔ جن میں سے ایک س ا ب ع کے متوازی ہے اور دوسری ق ، و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے +

نیز یہ دونوں قوتیں س جو و پر عمل کرتی ہیں متوازن ہیں۔ پس دونوں اصلی قوتیں ط اور ق جو نقاط ا اور ب پر عمل کرتی ہیں ایک قوت ط + ق کے برابر ہیں۔ جو و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ یعنی ج پر دونوں قوتوں کے متوازی عمل کرتی ہے +

نقطہ ج کا مقام دریافت کرنے کا طریقہ +

چونکہ مثلث و ج ا مثلث ا ل ف کے متشابہ ہے

$$\therefore \frac{\text{و ج}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ل ف}} = \frac{\text{ط}}{\text{س}}$$

یعنی ط × ج ا = س × و ج .... (۱)

اسی طرح چونکہ مثلثیں و ج ب اور ب م گ متشابہ ہیں +

$$\therefore \frac{\text{و ج}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م گ}} = \frac{\text{ق}}{\text{س}}$$

یعنی ق × ب ج = س × و ج .... (۲)

لہذا معادلات (۱) و (۲) سے معلوم ہوا کہ

$$ط \times ن ج ا = ق \times ج ب$$

$$\therefore \frac{ن ج ا}{ج ب} = \frac{ق}{ط}$$

یعنی ن، ا ب کو داخلاً قوتوں کی نسبت معکوس میں تقسیم کرتا ہے +

صورت دوم۔ فرض کرو کہ متوازی قوتیں مخالف ہیں ..

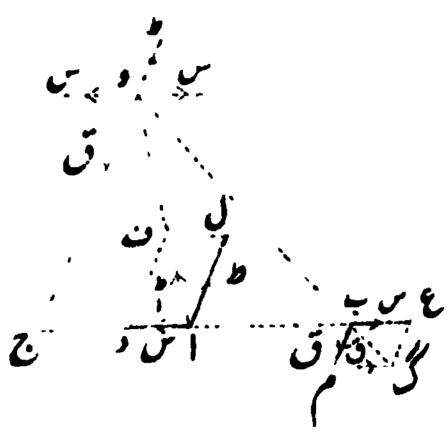
فرض کرو کہ قوتوں ط اور ق میں سے ط بڑی ہے اور دونوں قوتیں جسم کے نقاط ا اور ب پر عمل کرتی ہیں اور خطوط ا ل اور ب م سے تعبیر ہوتی ہیں +

ا ب کو ملاؤ اور ا اور ب پر دو مساوی اور مخالف قوتیں لگاؤ۔ جن میں سے ہر ایک مقدار میں س کے برابر ہو اور وہ سموت ب ا اور ا ب میں بالترتیب عمل کریں۔ فرض کرو کہ ان دو مساوی قوتوں کو خطوط ا د اور ب ن تعبیر کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ دونوں قوتیں باہم متوازن ہیں دہ جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں رکھتی ہیں +

متوازی الاضلاع ا ل ف د اور ب م گ ع کی تکمیل کرو۔ اور قطر ا ف اور گ ب کو اتنا بڑھاؤ کہ و پر ملیں (یہ قطر ہر حالت میں ملیں گے سوائے اس صورت کے جبکہ دونو متوازی ہوں اور اس صورت میں قوتیں ط اور ق برابر ہونگی) و سے و ج، ا ل یا ب م کا متوازی کھینچو کہ ا ب کو ج پر ملے۔ دو قوتیں ط اور س جو نقطہ

ا پر عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل ایک قوت ط ہے۔ جو خط ا ف سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس کا نقطہ عمل و پر منتقل کرو۔
اسی طرح نقطہ ب پر عمل کرنیوالی قوتوں ق اور س کا حاصل ایک قوت ق ہے۔ جو خط ب گ سے تعبیر ہوتی ہے اس کا نقطہ عمل بھی و پر منتقل کرو۔

نقطہ و پر عمل کرنیوالی قوت ط دو قوتوں میں تحلیل ہوسکتی ہے جن میں سے ایک س ہے اور ا د کے متوازی ہے اور دوسری ط ہے اور ج و ممدودہ کی سمت میں عمل کرتی ہے۔



اسی طرح نقطہ و پر عمل کرنیوالی قوت ق دو قوتوں میں تحلیل ہوسکتی ہے جن میں سے ایک س، ب ع کے متوازی ہے

اور دوسری ق، و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے +
نیز دونوں قوتیں س جو و پر عمل کرتی ہیں باہم توازن میں ہیں۔ اس لئے پہلی قوتیں ط اور ق ایک قوت ط-ق کے برابر ہیں۔ جو ج و ممدودہ کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ یعنی جو نقطہ ج پر ط کے متوازی سمت میں عمل کرتی ہے +

نقطہ ج کا مقام معلوم کرنے کا طریقہ +

مثلث و ج ا اور مثلث ن و ا عملاً متشابہ ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{و ج}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ن و}}{\text{و ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ط}}{\text{س}}$$

یعنی ط × ج ا = س × و ج .... (۱)

نیز چونکہ مثلثات و ج ب اور ب م گ متشابہ ہیں +

$$\therefore \frac{\text{و ج}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م گ}} = \frac{\text{ق}}{\text{س}}$$

یعنی ق × ج ب = س × و ج .... (۲)

لہذا معادلات (۱) اور (۲) سے ثابت ہوا کہ

$$\text{ط} \times \text{ج ا} = \text{ق} \times \text{ج ب}$$

$$\therefore \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{ط}}$$

یعنی ج خط ا ب کو خارجاً قوتوں کی نسبت معکوس میں تقسیم کرتا ہے +

خلاصہ۔ اگر دو متوازی قوتیں ط اور ق ایک جسم استوار کے دو نقاط ا اور ب پر عمل کریں تو (۱) ان کا حاصل ایک ایسی قوت ہے جس کا خطِ عمل ان کے خطوطِ عمل کے متوازی ہے نیز جب دونوں متوازی قوتیں موافق ہوں تو ان کے حاصل کی

سمت دونوں کے متوازی اور موافق ہوتی ہے اور جب دونوں متوازی قوتیں مخالف ہوں تو حاصل کی سمت بڑی قوت کے موافق اور دونوں کے متوازی ہوتی ہے +

(۲) حاصل کا نقطہ عمل خط ا ب میں ایک ایسا نقطہ ہے جو اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے

ط × ا ج = ق × ب ج

(۳) جب دونوں قوتیں موافق ہوں تو حاصل کی مقدار دونوں قوتوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے اور جب دونوں قوتیں مخالف ہوں تو حاصل ان کے حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے +

(۵۳) عمل دفعہ گزشتہ کے عدم امکان کی صورت۔

دفعہ گزشتہ کی دوسری شکل میں اگر قوتیں ط اور ق مساوی ہوں تو مثلث ف د ا اور مثلث گ ع ب ہر طرح سے برابر ہوں گے۔ پس زاویہ د ا ف اور ع ب گ برابر ہوں گے اس صورت میں خطوط ا ف اور گ ب متوازی ہوں گے۔ اور و جیسے کسی نقطہ پر وہ نہیں مل سکتے۔ لہٰذا عمل ناممکن ہے +

یعنی کوئی ایسی قوت واحد معلوم نہیں ہوسکتی جو دو مساوی متوازی مخالف قوتوں کے برابر ہو۔ اس پر ہم باب ششم میں بحث کریں گے +

(۵۴) اگر ایک جسم استوار پر بہت سی متوازی اور موافق

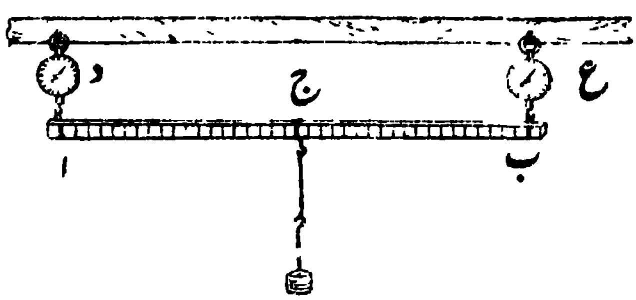
قوتیں عمل کریں تو ہم ان کا حاصل دفعہ ۵۳ کے متواتر استعمال سے معلوم کرسکتے ہیں۔یعنی اول ہم پہلی اور دوسری قوت کا حاصل معلوم کریں۔ پھر اس حاصل اور تیسری قوت کا حاصل اور علیٰ ہذا القیاس +

آخری حاصل کی مقدار تمام قوتوں کے مجموعہ کے برابر ہوگی۔ اگر متوازی قوتیں تمام موافق نہ ہوں تو ان کے حاصل کی مقدار ان کے مجموعہ جبریہ کے برابر ہوگی۔ جبکہ ہر ایک قوت کی علامت مثبت یا منفی مناسب طور پر لی جائے +

دفعہ ۱۱۴ میں متوازی قوتوں کے نظام کا مرکز دریافت کرنے کا عام قاعدہ دیا جائے گا +

(۵۵) دو متوازی قوتوں کا حاصل۔عملی تصدیق

ایک لکڑی کی یکساں مستطیلی سلاخ لو جس کی تراش عمودی ایک ایسا مربع ہو جس کا ضلع ایک انچ یا ذرا زیادہ ہو۔اس سلاخ کے ایک رخ پر ایک انچ یا نصف انچ کے فاصلہ پر درجے لگے ہوئے ہوں جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے +



فرض کرو کہ دو کمانی دار ترازو د اور ع ایک شہتیر سے لٹک رہے ہیں۔ اور سلاخ کے سرے ا اور ب ان ترازوؤں سے آویزاں ہیں۔ اس مقصد کے لئے سالٹر کا گول میزان زیادہ موزوں ہے کیونکہ وزن کے دباؤ پڑنے سے یہ دوسرے میزانوں کی نسبت کم کھچتا ہے +

فرض کرو کہ لکڑی کی سلاخ ا ب پر ایک حلقہ ج ہے۔ جو لکڑی پر آسانی سے حرکت کرسکتا ہے۔ اور اس حلقہ سے ایک کانٹا معلق ہے جس کے ذریعہ اوزان لٹکائے جا سکتے ہیں اور حلقے کو جس مقام پر چاہیں رکھ سکتے ہیں۔ جب حلقہ ج سلاخ ا ب کے نقطہ تنصیف پر ہو اور پیشتر اس کے کہ کوئی اوزان رکھے جائیں۔ اسوقت یہ دیکھ لیا جائے کہ میزانہائے د اور ع کی سوئیاں کن مقامات پر ہیں۔ چونکہ سلاخ موٹائی میں یکساں ہے اس لئے د اور ع کی سوئیاں ایک ہی وزن ظاہر کرینگی۔ فرض کرو کہ ہر ایک ترازو میں یہ وزن ح ہے۔ اب حلقہ ج کے ذریعہ دیگر اوزان معلومہ لٹکاؤ۔ جن کا مجموعی وزن و ہو۔ اور ج کو سلاخ کے کسی مقام ج پر لیجاؤ۔ میزانہائے د اور ع کی سوئیوں کو پھر دیکھو۔ فرض کرو کہ اب سوئیاں اوزان ط اور ق ظاہر کرتی ہیں +

پس اوزان و کے اضافہ سے میزانوں کی سوئیوں میں ط۔ح اور ق۔ ح کے برابر فرق آتا ہے فرض کرو کہ ط۔ ح = ط؍ اور ق-ح = ق؍ یعنی ط؍ اور ق؍ دو قوتیں

د اور ع پر عمل کرتی ہیں یہ دونوں ج پر عمل کرنیوالی قوت و کے ساتھ توازن میں ہیں +

یہ معلوم ہوگا کہ ط اور ق کا مجموعہ و کے برابر ہے ......(۱)

نیز فاصلے اج اور ب ج ناپنے سے معلوم ہوگا کہ

ط × اج = ق × ب ج....................(۲)

یعنی دوسرے الفاظ میں اگر قوتیں ط اور ق نقاط ا اور ب پر عمل کریں۔ تو ان کا حاصل ط + ق ہے اور ج پر عمل کرتا ہے جہاں ط × اج = ق × ب ج

لیکن دفعہ ۵۲ کی صورت اول میں نظری تحقیقات سے بھی ہم اسی نتیجہ پر پہنچ چکے ہیں +

ج کے مقام کو تبدیل کرکے اس تجربہ کو پھر کرو۔ لیکن و وہی رہے۔ ط اور ق کی مقدار میں فرق آئے گا لیکن ان کا مجموعہ ہر حالت میں و رہے گا اور نیز ہر حالت میں ط × اج، ق × ب ج کے برابر ہوگا اسی طرح دفعہ ۵۲ کا مسئلہ ج کے کسی مقام اور و کی کسی مقدار کے لئے ثابت ہوسکتا ہے +

مثال عددی۔ فرض کرو کہ جب کوئی اور وزن نہیں لٹکایا گیا۔ صرف لکڑی کی سلاخ اور دیگر سامان کا وزن ۲ پونڈ ہے تو میزانوں کی سوئیوں سے ایک ایک پونڈ وزن کا اظہار ہوگا اب چار پونڈ وزن کا اضافہ کرو۔ اور ج کو ایسے مقام ج پر لیجاؤ جہاں ترازوؤں کی سوئیوں سے ۴ پونڈ اور ۲ پونڈ وزن ظاہر ہوں +

اس سے معلوم ہوگا کہ نقطہ ا پر (۴-۱) یعنی ۳ پونڈ وزن کی قوت ہے اور ب پر (۲-۱) یعنی ۱ پونڈ وزن کی قوت ہے اور یہ دونوں قوتیں جؔ پر عمل کرنیوالی ۴ پونڈ قوت کے ساتھ توازن میں ہیں اگر لکڑی کا طول ۳ فٹ یعنی ۳۶ انچ ہو تو ناپنے سے معلوم ہوگا کہ ا جؔ = ۹ انچ اور ب جؔ = ۲۷ انچ

یعنی طؔ × ا جؔ = ۳ × ۹

اور قؔ × ب جؔ = ۱ × ۲۷

اور یہ دونوں برابر ہیں +

یعنی اس حالت میں دفعہ ۵۲ صورت اول کی تصدیق ہوگئی +

مخالف متوازی قوتیں۔ اس تجربہ میں نقاط ا اور جؔ اور ب پر عمل کرنیوالی قوتیں طؔ اور و اور قؔ توازن میں ہیں۔ یعنی اوپر کی طرف عمل کرنیوالی قوت طؔ اور نیچے کی طرف عمل کرنیوالی قوت و کا حاصل قؔ کے مساوی اور مخالف ہے +

فاصلے ا ب اور جؔ ب ناپو تو معلوم ہوگا کہ

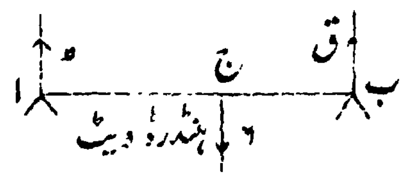
قؔ = و - طؔ

اور طؔ × ا ب = و × جؔ ب

پس دفعہ ۵۲ کی صورت دوم کی تصدیق بھی ہوگئی +

(۵۶) **مثال**۔ ایک افقی سلاخ کا طول ۶ فٹ ہے اور اس کا وزن اس قدر کم ہے کہ نظر انداز ہوسکتا ہے۔ اس کے سرے دو سہاروں پر دھرے ہوئے ہیں۔ اور ایک جسم وزنی ۶ ہنڈرڈویٹ سلاخ کے ایک سرے سے $2\frac{1}{2}$ فٹ کے فاصلہ پر

ٹنگ رہا ہے۔ ہر ایک سرے پر کا عمل دریافت کرو۔ اگر ایک سہارا صرف ایک ہنڈرڈ ویٹ کا وزن سہارنے کے قابل ہو تو معلوم کرو۔ کہ دوسرے سہارے سے زیادہ سے زیادہ کس قدر فاصلہ پر جسم ٹنکایا جاسکتا ہے؟



فرض کرو کہ سلاخ ا ب ہے اور نقاط ا اور ب پر کے عمل ط اور ق ہیں۔ اور فرض کرو کہ جسم نقطہ ج پر ٹنگ رہا ہے جہاں ا ج = ۳ $\frac{۱}{۲}$ فٹ اور ج ب = ۲ $\frac{۱}{۲}$ فٹ قوتیں ط اور ق ۶ ہنڈرڈویٹ کے وزن کے ساتھ توازن میں ہیں۔

پس بموجب دفعہ (۵۲) ط + ق = ۶ .... (۱)

اور $\frac{\text{ط}}{\text{ق}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ا ج}} = \frac{۲\frac{۱}{۲}}{۳\frac{۱}{۲}} = \frac{۵}{۷}$ ...... (۲)

معادلات (۱) و (۲) کو حل کرنے سے ط = $\frac{۵}{۲}$ اور ق = $\frac{۷}{۲}$ یعنی سہاروں کے عمل ۲ $\frac{۱}{۲}$ ہنڈرڈویٹ اور ۳ $\frac{۱}{۲}$ ہنڈرڈویٹ ہیں۔

اور اگر ۱ پ کا عمل ایک ہنڈرڈویٹ سے زیادہ نہیں ہوسکتا تو

لازماً ق = ۵ ہنڈرڈویٹ

پس اگر ا ج = لا

تو ۱/۵ = ب ج / ا ج = (۶ − لا) / لا

∴ لا = ۵ فٹ ۔ یعنی ب ج = ۱ فٹ

امثلہ نمبری (۸)

ذیل کے چار سوالات میں متوازی قوتیں ط اور ق نقاط ا اور ب پر عمل کرتی ہیں۔ اور ج خط ا ب میں ایسا نقطہ ہے جہاں ان قوتوں کا حاصل ح عمل کرتا ہے +

(۱) قوتیں موافق ہیں ۔ حاصل کی مقدار اور مقام دریافت کرو جب کہ

(۱) ط = ۴ اور ق = ۷ اور ا ب = ۱۱ انچ

(۲) ط = ۱۱ اور ق = ۱۹ اور ا ب = ۲½ فٹ

(۳) ط = ۵ اور ق = ۵ اور ا ب = ۳ فٹ

(۲) قوتیں مخالف ہیں حاصل کی مقدار اور مقام دریافت کرو جب کہ

(۱) ط = ۱۷ اور ق = ۲۵ اور ا ب = ۱۸ انچ

(۲) ط = ۲۳ اور ق = ۱۵ اور ا ب = ۴۰ انچ

(۳) ط = ۲۶ اور ق = ۹ اور ا ب = ۲ فٹ

(۳) قوتیں موافق ہیں۔

(۱) اگر ط = ۸ اور ح = ۱۷ اور ا ج = ۴½ انچ تو ق اور ا ب دریافت کرو +

(۲) اگر ق = ۱۱ اور ا ج = ۱۰ انچ اور ا ب = ۸$\frac{۳}{۴}$ انچ تو ط اور ح دریافت کرو +

(۳) اگر ط = ۶ اور ا ج = ۹ انچ اور ج ب = ۱۸ انچ تو ق اور ح دریافت کرو +

(۴) قوتیں مخالف ہیں -

(۱) اگر ط = ۸ اور ح = ۱۷ اور ا ج = ۴$\frac{۱}{۲}$ انچ تو ق اور ا ب دریافت کرو +

(۲) اگر ق = ۱۱ اور ا ج = ۷ انچ اور ا ب = ۸$\frac{۳}{۴}$ انچ تو ط اور ح دریافت کرو +

(۳) اگر ط = ۶ اور ا ج = ۹ انچ اور ا ب ۱۲ انچ تو ق اور ح دریافت کرو +

(۵) دو ایسی موافق متوازی قوتیں دریافت کرو۔ جو ایک دوسرے سے ۲ فٹ کے فاصلہ پر عمل کریں اور جن کا مجموعی اثر ایک ۲۰ پونڈ کی قوت معلومہ کے برابر ہو اور جن میں سے ایک کا خط عمل قوت معلومہ سے ۶ انچ کے فاصلہ پر ہو +

(۶) دو ایسی مخالف متوازی قوتیں دریافت کرو جو ایک دوسرے سے ۸ انچ کے فاصلہ پر عمل کرتی ہوں اور جن کا اثر مجموعی ایک ۳۰ پونڈ قوت کے برابر ہو اور جن میں سے بڑی قوت کا فاصلہ قوت معلومہ سے ۸ انچ ہو +

(۷) دو متوازی قوتیں ط اور ق ایک جسم کے دو نقاط معلومہ پر عمل کرتی ہیں۔ اگر ق بدلکر $\frac{ط^۲}{ق}$ ہوجائے تو ثابت

کرو کہ حاصل کا خط عمل وہی ہوگا جو قوتوں کے باہمی تبادلہ کی حالت میں ہوگا +

(۸) دو آدمی ایک بھاری پیپہ وزنی ۱½ ہنڈرڈ ویٹ ایک ہلکی لکڑی سے لٹکا کر لیجاتے ہیں۔ لکڑی کی لمبائی ۹ فٹ ہے اور اس کے سرے ایک ایک آدمی کے کندھے پر ہیں۔ جس مقام سے یہ لٹک رہا ہے وہ ایک آدمی سے بہ نسبت دوسرے کے ۱ فٹ زیادہ قریب ہے۔ معلوم کرو کہ ہر ایک آدمی کے کندھے پر کس قدر بوجھ پڑتا ہے ؟

(۹) دو آدمیوں میں سے ایک زیادہ مضبوط ہے اور ۱۸۰ پونڈ بوجھ لیجاسکتا ہے دونوں آدمی ایک پتھر وزنی ۲۷۰ پونڈ ایک ۶ فٹ لمبے ہلکے تختہ کے ذریعہ لیجانا چاہتے ہیں۔ دریافت کرو کہ پتھر کو تختے پر کس طرح رکھا جائے کہ زیادہ مضبوط آدمی پر ۱۸۰ پونڈ بوجھ پڑے ؟

(۱۰) ایک ۱۲ فٹ لمبی یکساں سلاخ کا وزن ۱۷ پونڈ ہے اور وہ اپنے ایک نقطہ کے گرد گھوم سکتی ہے اگر سلاخ کے ایک سرے سے ۷ پونڈ بوجھ لٹکا دیا جائے۔ تو سلاخ افقی حالت میں ساکن رہتی ہے تو وہ نقطہ دریافت کرو جس کے گرد سلاخ گھوم سکتی ہے۔ یہ تسلیم کر لیا جائے کہ یکساں سلاخ کا وزن اس کے نقطہ تنصیف پر عمل کرتا ہے +

(۱۱) ایک یکساں سیدھی سلاخ ۳ فٹ لمبی ہے۔ اگر پانچ پونڈ وزن اس کے ایک سرے پر دھر دیا جائے تو اس سرے

سے تین انچ کے مقام پر توازن میں رہتی ہے۔ سلاخ کا وزن دریافت کرو۔

(۱۲) ایک یکساں لکڑی طول میں ۴ فٹ ہے اور وزن میں ۳ پونڈ ہے۔ وہ ایک سہارے پر افقی حالت میں ساکن ہے۔ جب کہ ایک پونڈ کی قوت اس کے ایک سرے پر اوپر کی طرف عمل کرتی ہے۔ لکڑی کے مرکز سے سہارے کا فاصلہ دریافت کرو۔

(۱۳) ایک ۴ فٹ لمبی بھاری سلاخ افقی حالت میں دو کھونٹیوں پر دھری ہے کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ایک فٹ ہے۔ اگر سلاخ کے ایک سرے سے ۱۰ پونڈ کا وزن لٹکایا جائے۔ یا دوسرے سرے سے ۴ پونڈ کا وزن لٹکایا جائے۔ تو ہر حالت میں سلاخ صرف ایک کھونٹی پر افقی حالت میں ساکن رہتی ہے۔ سلاخ کا وزن اور سلاخ کے مرکز سے کھونٹیوں کے فاصلے دریافت کرو۔

(۱۴) ایک لوہے کی یکساں سلاخ طول میں $\frac{۱}{۲}$ ۲ فٹ ہے اور وزن میں ۸ پونڈ ہے یہ سلاخ دو آہنی شہتیروں پر دھری ہے۔ اور شہتیر ایک عمودی دیوار میں نقاط ا اور ب پر گڑے ہیں۔ خط ا ب افقی ہے اور طول میں ۵ فٹ ہے۔ ایک شہتیر پر جو بوجھ پڑتا ہے وہ دوسرے شہتیر پر کے بوجھ سے ۶ پونڈ زیادہ ہے۔ معلوم کرو کہ سلاخ کے سرے شہتیروں سے کس قدر باہر کو نکلے ہوئے ہیں۔

(۱۵) ایک یکساں شہتیر ۴ فٹ لمبا دو سہاروں پر افقی حالت میں دھرا ہے۔ سہاروں کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے۔

اور شہتیر کا ایک سرا ایک سہارے سے ایک فٹ نکلا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک سہارے پر کی قوت دوسری سے دوچند ہے +

(۱۶) ایک سیدھی بے وزن سلاخ ۲ فٹ لمبی دو کھونٹیوں کے بیچ میں افقی حالت میں پڑی ہے کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ۳ انچ ہے۔ اور ایک کھونٹی سلاخ کے ایک سرے پر ہے۔ اور ایک ۵ پونڈ وزن دوسرے سرے سے لٹکایا گیا ہے۔ کھونٹیوں پر کا دباؤ دریافت کرو +

(۱۷) ایک یکساں سلاخ کا وزن و ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنی سطح پر ٹکا ہوا ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک عمودی رسی بندھی ہے۔اس رسی کا دوسرا سرا ایک ایسے نقطہ معینہ پر بندھا ہے جو سطح سے الگ اوپر واقع ہے اور سلاخ افقی حالت میں ہے۔ رسی کا تناؤ دریافت کرو +

(۱۸) ایک شخص ایک گٹھڑی کو ایک لکڑی کے سرے پر لٹکائے لیجا رہا ہے لکڑی اس کے کندھے پر دھری ہے۔ اگر اس کے ہاتھ اور کندھے کے درمیانی فاصلہ میں تبدیلی واقع ہو۔ تو کندھے پر کے دباؤ میں کیا فرق آئے گا؟

(۱۹) ایک شخص ایک ۳ فٹ لمبی لکڑی کے سرے پر ۵ پونڈ وزن لٹکا کر لیجا رہا ہے۔ لکڑی اس کے کندھے پر ہے۔ وہ اپنے ہاتھ اور کندھے کا درمیانی فاصلہ اس طرح بدلتا ہے کہ ایک صورت میں ۱۲ دوسری میں ۱۸ اور تیسری میں ۲۴ انچ ہوتا ہے۔ تینوں صورتوں میں ہاتھ کی قوت اور کندھے پر کا

دباؤ دریافت کرو +

(۲۰) ایک افقی سلاخ پر تین متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کی مقدار ایک پونڈ وزن ہے۔ داہنے ہاتھ کی قوت سمت راس میں اوپر کی طرف عمل کرتی ہے۔ اور باقی دو نیچے کی طرف سمت شاقولی میں عمل کرتی ہیں۔ اور دوسری اور پہلی اور تیسری اور پہلی کے درمیانی فاصلے بالترتیب ۲ فٹ اور ۳ فٹ ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور مقام دریافت کرو +

(۲۱) ایک صندوق کا طول ۳ فٹ ہے اور بلندی ۲ فٹ ہے۔ اور اس کا مرکز ثقل اس کے مرکز شکلی پر ہے۔ اس صندوق کو دو آدمی اس کے نیچے کے رخ کے سامنے اور پیچھے کے کناروں کو پکڑ کر سیڑھیوں پر لیجا رہے ہیں۔ اگر یہ رخ افق سے ۳۰° کا زاویہ بنائے اور صندوق کا وزن ایک ہنڈرڈویٹ ہو۔ تو معلوم کرو کہ ہر ایک شخص پر کس قدر بوجھ پڑتا ہے +

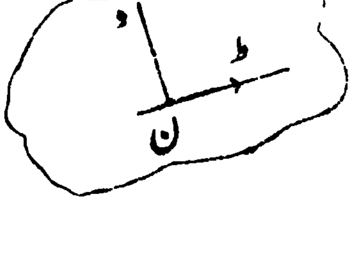
باب پنجم

قوت کا معیارِ اثر

(۵۷) ایک قوت کے معیارِ اثر کا اندازہ ہمیشہ ایک نقطہ کے گرد کیا جاتا ہے +

تعریف۔ اگر کسی نقطہ معلومہ سے ایک قوت کے خط عمل پر عمود کھینچا جائے تو قوت اور عمود کے حاصل ضرب کو اس نقطہ کے گرد قوت کا معیارِ اثر کہتے ہیں +

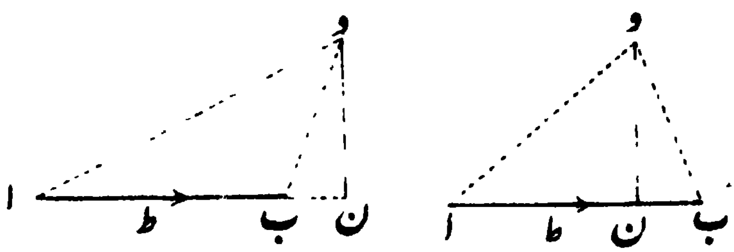
مثلاً ایک قوت ط کا معیارِ اثر نقطہ و کے گرد ط × و ن ہے جہاں و ن قوت ط کے خط عمل پر نقطہ و سے عمود ہے +



یاد رہے کہ قوت ط کا معیار اثر نقطہ و کے گرد کبھی معدوم نہیں ہوتا جب تک کہ خود قوت معدوم نہ ہو۔ یا قوت اس نقطہ میں سے نہ گزرے جس کے گرد معیار اثر کا اندازہ کیا گیا ہے +

(۵۸) معیار اثر کی تعبیر ہندسی۔

فرض کرو کہ قوت ط مقدار اور سمت میں ا ب سے تعبیر ہوتی ہے۔ اور و ایک نقطہ معینہ ہے اور نقطہ و سے و ن خط ا ب یا ا ب ممدودہ پر عمود ہے +



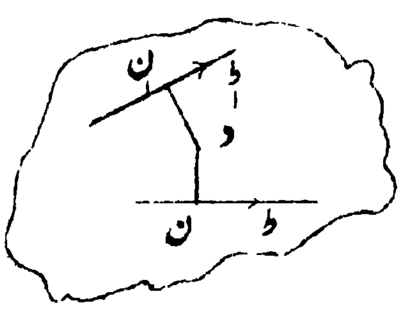
و ا اور و ب ملاؤ +

بموجب تعریف ط کا معیارِ اثر و کے گرد ط × و ن ہے۔ لیکن ا ب × و ن مثلث و ا ب کے رقبہ کا دوچند ہے (کیونکہ یہ ایک ایسے مستطیل کے رقبہ کے برابر ہے۔ جس کا قاعدہ ا ب ہے اور ارتفاع و ن ہے) لہٰذا قوت ط کا معیار اثر نقطہ و کے گرد مثلث و ا ب کے رقبہ کے دوچند ہے

تعبیر ہوتا ہے۔ یعنی معیارِ اثر ایک ایسے مثلث کے رقبہ کا دوچند ہوتا ہے جس کا قاعدہ قوت کا خط تعبیر ہو اور جس کا راس وہ نقطہ ہو جس کے گرد معیارِ اثر لیا جائے +

(۵۹) ایک نقطہ معینہ کے گرد ایک قوت کے معیار اثر کا طبعی مفہوم +

فرض کرو کہ شکل دفعہ (۵۷) میں جسم ایک ٹین کی چادر کا ٹکڑا یا لکڑی کا ایک پتلا تختہ ایک چکنی میز پر پڑا ہے۔ اور فرض کرو کہ جسم کا نقطہ و ایک باریک کیل کے ذریعہ میز پر جڑا ہوا ہے جسم پر ایک قوت ط کا اثر یہ ہوگا کہ اس کو نقطہ و کے گرد گھمائے۔ اور یہ اثر معدوم نہیں ہوگا۔ جب تک کہ (۱) قوت صفر کے برابر نہ ہو (۲) قوت ط نقطہ و میں سے نہ گزرے جس صورت میں فاصلہ و ن صفر ہوگا۔ لہٰذا جسم کو نقطہ و کے گرد گھمانے کی قابلیت کا موزوں معیار ط اور و ن کا حاصل ضرب ہے۔ اس کی تصدیق بذریعہ تجربہ ذیل ہوسکتی ہے +



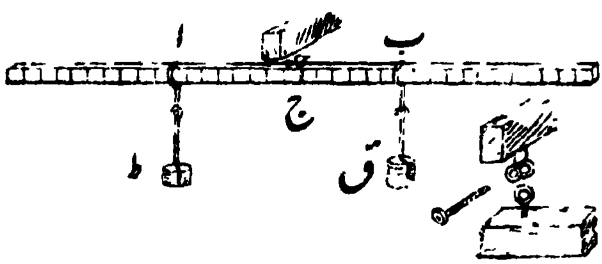
فرض کرو کہ ایک پتلی تختی دو رسیوں کے تناؤ ط اور ط‌ا کے زیر عمل ساکن ہے اور رسیاں اس کے دو نقاطِ معینہ پر بندھی ہیں اور تناؤں کے خطوط عمل تختی کی سطح میں واقع ہیں۔ فرض کرو کہ ط اور ط‌ا کے خطوطِ عمل پر نقطہ و سے و ن اور و ن‌ا عمود ہیں اگر ہم و ن اور و ن‌ا کے طول اور ط اور ط‌ا کی مقدار کی پیمائش کریں تو معلوم ہوگا کہ حاصل ضرب ط × و ن ہر حالت میں حاصل ضرب ط‌ا × و ن‌ا کے مساوی ہے پس اگر قوتوں ط اور ط‌ا کے معیارِ اثر نقطہ و کے گرد مساوی ہوں۔ تو جسم کو اس نقطہ و کے گرد گھمانے کے لئے ان کی قابلیت مساوی اور متقابل ہوگی +

قوتوں ط اور ط‌ا کی پیمائش اس طرح ہوسکتی ہے کہ رسیوں کو ہلکی چکنی چرخیوں پر سے گزار کر ان کے سروں پر اتنے وزن لٹکائے جائیں کہ جسم ساکن رہے۔ یا رسیوں کو دو کمانی دار میزانوں کے کانٹوں کے ساتھ باندھ دیا جائے اور میزانوں کی سوئیوں کا ملاحظہ کرلیا جائے جیسا کہ دفعہ ۲۵ میں کیا گیا تھا +

(۶۰) **تجربہ**۔ اگر ایک جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو اور وہ دو قوتوں کے زیر عمل ساکن رہے تو ثابت کرو کہ ان قوتوں کے معیارِ اثر اسی نقطہ کے گرد مساوی اور متقابل ہوں گے +

سلاخ مستعملہ دفعہ ۵۵ لو اور اس کو نقطہ ج سے اس طرح معلق کرو کہ افقی حالت میں ساکن رہے اگر سلاخ یکساں ہے تو ج نقطہ تنصیف ہوگا۔ اگر یکساں نہیں ہے تو ج اس کا

مرکز ثقل ہوگا (دیکھو باب نہم)
سلاخ کو اس طرح لٹکایا جائے کہ نقطہ ج کے گرد بآسانی تمام گھوم سکے +



متوازی قوتوں کی صورت۔ کوئی سے دو نقطوں ا اور ب پر حلقے لٹکاؤ۔ اور ان کے ذریعے ایسے اوزان معلومہ آویزاں کرو کہ سلاخ پھر افقی حالت میں متوازن ہوجائے +
فرض کرو کہ نقطہ ا پر وزن معلوم بشمولیت وزن حلقہ ط ہے۔ اور ب پر اسی طرح کل وزن ق ہے۔ احتیاط سے ا ج اور ب ج فاصلوں کی پیمایش کرو +
تو معلوم ہوگا کہ حاصل ضرب ط × ا ج اور حاصل ضرب ق × ب ج مساوی ہیں +
اس مسئلہ کی تصدیق دو سے زیادہ قوتوں کی صورت میں بھی اس طرح ہوسکتی ہے۔ کہ بہت سے حلقے سلاخ پر لٹکا دیئے جائیں اور حلقوں سے ایسے اوزان معلومہ لٹکا دئے جائیں کہ

سلاخ افقی حالت میں توازن اختیار کرے +

ہر صورت میں معلوم ہوگا کہ ج کے ایک طرف کے اوزان کے معیاروں کا مجموعہ دوسری طرف کے اوزان کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا +

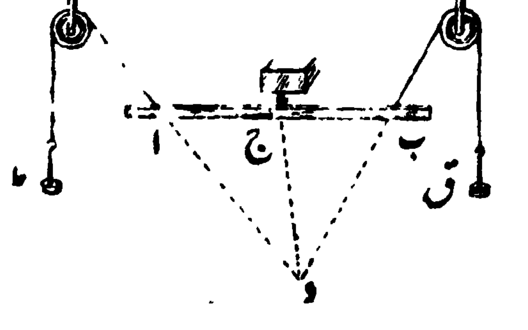
قوتوں کے متوازی نہ ہونے کی صورت

سلاخ کے لٹکانے کا انتظام پیشتر کی طرح کرو۔لیکن نقاط ا اور ب پر رسیاں باندھ کر اور ان کو چرخیوں پر سے گزار کر ان کے دوسرے سروں سے کانٹوں کے ذریعہ سے اوزان معلومہ لٹکاؤ کہ سلاخ افقی حالت میں توازن اختیار کرے +

فرض کرو کہ کانٹوں کے وزنوں کو ملاکر اوزان معلقہ ط اور ق ہیں۔ تو ا اور ب پر رسیوں کے تناؤں کی مقداریں یہی ہونگی +

ج سے د ا اور د ب پر ع اور غ عمود ہیں۔ان کی پیمائش کرو + تو یہ معلوم ہوگا کہ

ط × ع = ق × غ

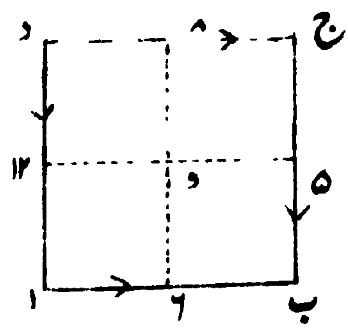


(۶۱) **مثبت اور منفی معیار اثر۔** دفعہ ۵۹ میں اگر تختی پر ایک ہی قوت ط عمل کرے تو اس کو گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی سمت کی متقابل سمت میں گھمائے گی۔ جبکہ گھڑی میز پر اس طرح رکھی جائے کہ اس کا رخ اوپر کی طرف ہو۔ اگر قوت ط صرف ایک ایسی قوت ہو جو تختی پر عمل کرے تو اسے گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں گھمائے گی +

قوت ط کا معیار اثر و کے گرد ایک ایسی سمت میں (مثبت کہلاتا ہے۔ اور قوت ط کا معیار اثر و کے گرد اس سمت میں منفی کہلاتا ہے +

معیاروں کا مجموعہ جبریہ۔ قوتوں کے ایک نظام کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ جبکہ ہر ایک معیار کو اس کی علامت مناسب دی جائے +

مثال۔ ا ب ج د ایک مربع ہے اس کے اضلاع اب اور ج ب اور د ج اور د ا کی سموت میں چار قوتیں بالترتیب ۶ پونڈ، ۵ پونڈ، ۸ پونڈ، ۱۲ پونڈ عمل کرتی ہیں۔



اگر مربع کا ضلع ۴ فٹ ہو تو مربع کے مرکز و کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ معلوم کرو +

د ا اور ا ب کی سموت میں عمل کرنیوالی قوتیں مربع کو سمت

مثبت میں گھمانے کی قابلیت رکھتی ہیں۔ اور د ج اور ج ب کی سموت میں عمل کرنیوالی قوتوں میں سمت منفی میں گھمانے کی قابلیت ہوگی ہر ایک قوت سے و کا عمودی فاصلہ ۲ فٹ ہے۔ اس لئے قوتوں کے معیار بالترتیب یہ ہیں +

۲×۶+ ، ۲×۵− ، ۲×۸− ، ۲×۱۲+

لہٰذا ان کا مجموعہ جبریہ = ۲ (۶ − ۵ − ۸ + ۱۲) یعنی معیار کی دس اکائیاں یعنی و سے ایک فٹ کے فاصلہ پر عمل کرنیوالی ایک پونڈ کی قوت کے معیار سے دس گنا +

(۶۲) مسئلہ۔ اگر دو قوتیں ایک سطح میں عمل کریں تو اُس سطح میں کسی نقطہ کے گرد اُن کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ اسی نقطہ کے گرد اُن کے حاصل کے معیار کے برابر ہوتا ہے +

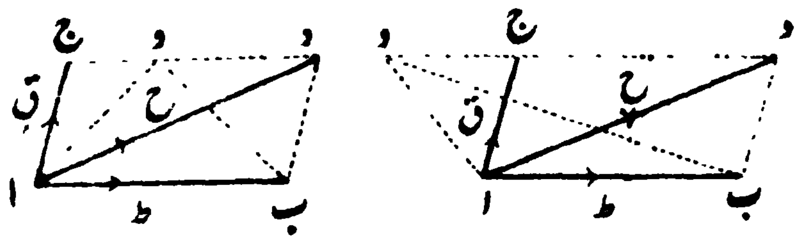
صورت اول۔ فرض کرو کہ قوتیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ دو قوتیں ط اور ق نقطہ ا پر عمل کرتی ہیں اور ان کے معیار نقطہ و کے گرد لئے جاتے ہیں۔ و سے د ج ، ط کی سمت کے متوازی کھینچو تاکہ ق کے خط عمل کو ج پر ملے +

فرض کرو کہ ا ج ، ق کو تعبیر کرتا ہے۔ اور اسی پیمانہ پر فرض کرو کہ ا ب ، ط کو تعبیر کرتا ہے۔ متوازی الاضلاع ا ب د ج کی تکمیل کرو۔ اور و ا اور و ب کو ملاؤ تو ط اور ق کا حاصل ح، ا د سے تعبیر ہوگا +

(۱) اگر و زاویہ د ا ج سے باہر واقع ہے۔ جیسا کہ پہلی شکل میں ہے۔ تو ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ

۲ △ و ا ب + ۲ △ و ا ج = ۲ △ و ا د

کیونکہ ط اور ق کے میار و کے گرد ایک ہی سمت میں ہیں +



چونکہ ا ب اور و د متوازی ہیں اس لئے۔

△ و ا ب = △ ا ج د (اقلیدس م اش ۳۷)

∴ ۲ △ و ا ب + ۲ △ و ا ج = ۲ △ ا ج د + ۲ △ و ا ج = ۲ △ و ا د +

(۲) اگر و زاویہ ج ا د کے اندر واقع ہو جیسا کہ دوسری شکل میں ہے۔ تو ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ

۲ △ ا و ب - ۲ △ ا و ج = ۲ △ ا د د

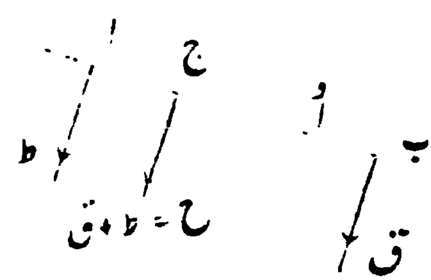
کیونکہ ط اور ق کے میار و کے گرد متقابل سمتوں میں ہیں +

جیسا کہ (۱) میں ثابت ہوا اسی طرح

△ ا و ب = △ و ا ب = △ ا ج د

∴ ۲ Δ ا و ب - ۲ Δ ا و ج = ۲ Δ ا ج و - ۲ Δ و ا ج۔
۲ Δ و ا و +

صورت دوم - فرض کرو کہ قوتیں متوازی ہیں +



فرض کرو کہ ط اور ق دو متوازی قوتیں ہیں اور ح = ط + ق
ان کا حاصل ہے +
فرض کرو کہ نقطہ و جو ان کی سطح میں واقع ہے ہمکو اس کے
گرد معیار کا اندازہ کرنا ہے۔ و سے ایک خط کھینچو۔ جو قوتوں کی
سمت پر عمود ہو اور جو قوتوں ط اور ح اور ق کو بالترتیب
نقاط ا اور ج اور ب پر ملے +
بموجب دفعہ ۲۵ ط × ا ج = ق × ج ب ....(۱)
∴ و کے گرد ط اور ق کے معیاروں کا مجموعہ
= ق × و ب + ط × و ا
= ق (و ج + ج ب) + ط (و ج - ا ج)

= (ط + ق) × وج + ق × ج ب - ط × ا ج

= (ط + ق) × و ج باِمداد مساوات (۱)

اگر نقطہ و جس کے گرد معیاروں کا اندازہ کیا جاتا ہے قوتوں کے درمیان واقع ہو۔ تو قوتوں ط اور ق کے معیاروں کی علامات مخالف ہیں +

اس صورت میں و کے گرد ط اور ق کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ۔

= ط × و ا - ق × و ب

= ط (و ج + ج ا) - ق (ج ب - و ج)

= (ط + ق) و ج + ط × ج ا - ق × ج ب

= (ط + ق) و ج بذریعہ مساوات (۱)

اگر نقطہ کا مقام کوئی اور ہو یا قوتیں متوازی اور مخالف ہوں۔ یہ سب صورتیں طالب علم کو خود حل کرنی چاہئیں +

(۹۳) مسئلہ بالا کی صورت اول کے حل کرنے کا ایک اور طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے +

فرض کرو کہ قوتوں ط اور ق کو خطوط ا ب اور ا ج تعبیر کرتے ہیں۔ اور فرض کرو کہ ا د حاصل ح کو تعبیر کرتا ہے یعنی ا ب د ج متوازی الاضلاع ہے +

فرض کرو کہ قوتوں کی سطح میں و ایک نقطہ ہے۔ و ا کو ملاؤ۔ اور خطوط ب ل اور ج م خط و ا کے متوازی کھینچو تاکہ ا د کو ل اور م پر ملیں +

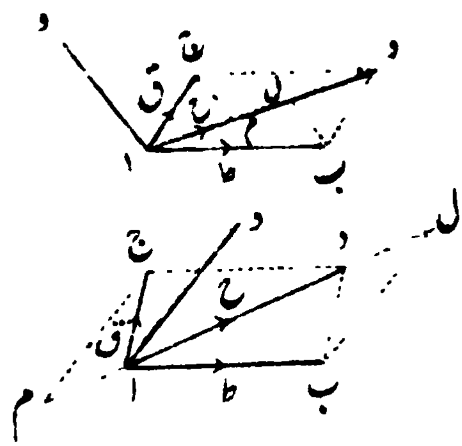
چونکہ مثلث ا ج م کے اضلاع بالترتیب مثلث د ب ل کے

متوازی ہیں۔ اور چونکہ ا ج مساوی ہے ب د کے

∴ ا م = ل د

∴ ∆ د ا م = ∆ د ل د (اقلیدس م ا شس ۳۸)

صورت اول۔ فرض کرو کہ د زاویہ ج ا د کے باہر واقع ہے۔ جیسا کہ پہلی شکل میں ہے +



تو ۲ ∆ د ا ب + ۲ ∆ د ا ج

= ۲ ∆ د ا ل + ۲ ∆ د ا م (اقلیدس م ا شس ۳۷)

= ۲ ∆ د ا ل + ۲ ∆ د ل د

= ۲ ∆ د ا د

پس ط اور ق کے معیاروں کا مجموعہ ح کے معیار کے برابر ہے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ نقطہ د زاویہ ج ا د کے اندر واقع ہے جیسا کہ دوسری شکل میں ہے د کے گرد ط اور ق کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ۔

= ۲ ۵ و ا ب - ۲ ۵ و ا ج

= ۲ ۵ و ا ل - ۲ ۵ و ا م (اقلیدس م ا ش س ۴۰)

= ۲ ۵ و ا ل - ۲ ۵ و ل د

= ۲ ۵ و ا د

= ح کا معیار گرد و کے

(۶۴) اگر نقطہ و جس کے گرد معیار لئے جاتے ہیں حاصل پر واقع ہو تو حاصل کا معیار صفر ہوگا۔ اس صورت میں و کے گرد اجزاے ترکیبی کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ بھی صفر ہوگا۔ یعنی دو قوتوں کے معیار ان کے حاصل کے کسی نقطہ کے گرد مقدار میں مساوی ہوں گے اور علامت میں مخالف +

طالب علم اس مسئلہ کو خود شکل بنا کر حل کرسکتا ہے +

کیونکہ دفعہ ۶۲ میں نقطہ و نقطہ د پر منطبق ہوگا۔ اور ہم کو صرف یہ ثابت کرنا ہے کہ شلث ا ج و اور شلث ا ب و مساوی ہیں۔ اور یہ ایک امر بدیہی ہے +

(۶۵) **معیاروں کا عام مسئلہ**۔ اگر قوتوں کی کوئی سی تعداد ایک جسم استوار پر ایک سطح میں عمل کرے تو سطح کے کسی نقطہ کے گرد تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ ان کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوگا +

فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ر، س .... ہیں۔ اور فرض کرو کہ نقطہ و کے گرد معیاروں کا اندازہ کیا جاتا ہے +

اور فرض کرو کہ ط اور ق کا حاصل ط، ہے

اور ط۱ اور ر کا حاصل ط۲ ہے
اور ط۲ اور س کا حاصل ط۳ ہے
علیٰ ہذالقیاس آخری حاصل تک۔

تو بموجب دفعہ ۶۲ و کے گرد ط اور ق کے معیاروں کا مجموعہ ط۱ کے معیار کے مساوی ہوگا اور ط۱ اور ر کے معیاروں کا مجموعہ ط۲ کے معیار کے مساوی ہوگا +

یعنی ط، ق، ر کے معیاروں کا مجموعہ = ط۲ کے معیار کے

اسی طرح ط۳ کا معیار = ط۲ اور س کے معیاروں کے مجموعہ کے = ط، ق، ر، س کے معیاروں کے مجموعہ کے۔

اسی طرح عمل کو جاری رکھو جب تک کہ تمام قوتیں نہ آجائیں۔ پس آخری حاصل کا معیار = تمام ترکیبی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ جبریہ کے

نتیجہ صریح۔ جیسا کہ دفعہ ۶۴ میں ثابت ہوا۔ یہ ظاہر ہے کہ قوتوں کی کوئی سی تعداد کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ ان کے حاصل کے کسی نقطہ کے گرد صفر ہوتا ہے۔ اور برعکس اس کے اگر کسی نقطہ کے گرد قوتوں کی کوئی سی تعداد کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہو۔ تو یا تو ان کا حاصل صفر ہوگا یعنی قوتیں توازن میں ہونگی۔ اور یا حاصل اس نقطہ میں سے گزریگا۔ جس کے گرد معیار لئے گئے ہیں +

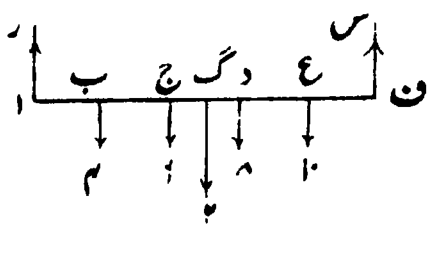
(۶۶) دفعہ سابق کے مسئلہ کی امداد سے ہم قوتوں کے کسی نظام کے حاصل کے خط عمل پر نقاط معلوم کرسکتے ہیں۔ کیونکہ ہم کو

صرف ایسے نقاط معلوم کرنا ہے۔ جن کے گرد قوتوں کے نظام کے میعاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہو۔ اگر کوئی نقطہ ایسا ہو تو حاصل لازماً اس میں سے گزریگا۔ دفعہ ذیل کے سوالات ۲ و ۳ اس اصول کی مثالیں ہیں +

متوازی قوتوں کی صورت میں اگر ایسا نقطہ معلوم ہو تو حاصل کی مقدار اور سمت دونوں معلوم ہو سکتے ہیں +

(۶۷) **مثال۔** (۱) ایک سلاخ ۵ فٹ لمبی ہے اور وہ دو عمودی رسیوں کے سہارے لٹک رہی ہے۔ جو اس کے سروں پر بندھی ہیں۔ اور ایک سرے سے ۱، ۲، ۳، ۴ فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب ۴، ۶، ۸، ۱۰ پونڈ کے وزن سلاخ سے آویزاں ہیں۔ اگر سلاخ کا وزن ۲ پونڈ ہو تو ہر ایک رسی کا تناؤ دریافت کرو +

فرض کرو کہ سلاخ ا ف ہے۔ اور ب، ج، د، ع چار نقاط ہیں جہاں اوزان لٹک رہے ہیں۔ فرض کرو کہ گ سلاخ کا نقطہ وسط ہے۔ ہم یہ مان لیں گے۔ کہ سلاخ کا وزن نقطہ گ پر عمل کرتا ہے +



فرض کرو کہ رسیوں کے تناؤ ر اور س ہیں۔ چونکہ قوتوں کا

حاصل صفر ہے۔ لہٰذا ا کے گرد اس کا معیار بھی صفر ہوگا۔
پس ا کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہوگا +

∴ ۴ × ۱ + ۶ × ۲ + ۲ × ۲½ + ۸ × ۳ + ۱۰ × ۴ − س × ۵ = ۰

∴ ۵ س = ۴ + ۱۲ + ۵ + ۲۴ + ۴۰ = ۸۵

∴ س = ۱۷

اسی طرح ف کے گرد معیار لیکر

۵ ر = ۱۰ × ۱ + ۸ × ۲ + ۲ × ۲½ + ۶ × ۳ + ۴ × ۴ = ۶۵

∴ ر = ۱۳

تناؤ ر بطریق دیگر بھی معلوم ہوسکتا ہے۔ کیونکہ تمام اوزان کا حاصل ۳۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے اور ر اور س کا حاصل ر+س ہے چونکہ یہ دونوں حاصل باہم متوازن ہیں

∴ ر + س = ۳۰

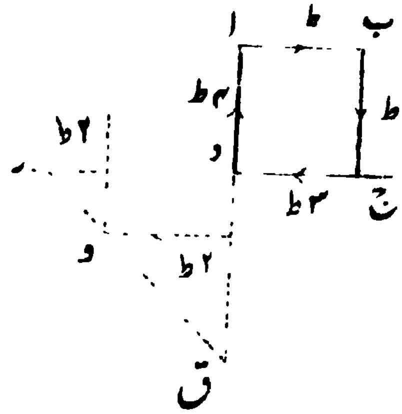
∴ ر = ۳۰ − س = ۳۰ − ۱۷ = ۱۳

مثال (۲) قوتیں ط، ۲ط، ۳ط، ۴ط ایک مربع ا ب ج د کے اضلاع کی سمت میں ایک ہی رخ عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار، سمت اور خط عمل معلوم کرو +

فرض کرو۔ کہ مربع کا ضلع م ہے +

بموجب دفعہ ۵۲ قوتیں ط اور ۳ط ایک متوازی قوت ۲ط کے برابر ہیں۔ جو نقطہ ع پر عمل کرتی ہے۔ جہاں دع = م/۲
اسی طرح قوتیں ۴ط اور ۲ط ایک قوت ۲ط کے برابر ہیں جو نقطہ ف پر عمل کرتی ہے جہاں ف خط ج د پر ایک

ایسا نقطہ ہے کہ د ف = م فرض کرو کہ ان دونوں اجزاے ترکیبی کے خطوط عمل نقطہ و پر ملتے ہیں تو آخری حاصل ایک قوت ۲ ط ۲ کے برابر ہے۔ جو ج ا کے متوازی عمل کرتی ہے۔



یا بطریق ذیل۔ بامداد مسئلہ دفعہ ۶۵ حاصل کا خط عمل بغیر کسی عمل ہندسی کے (جو اکثر طویل ہوتا ہے) معلوم ہوسکتا ہے +

فرض کرو کہ یہ خط عمل ا د اور ج د کو نقاط ق اور ر پر ملتا ہے +

چونکہ ق ایک نقطہ حاصل پر واقع ہے اس لئے ق کے گرد چاروں قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ لازماً صفر ہوگا +

∴ ط (د ق + م) + ۲ ط (م) = ۳ ط × د ق

∴ د ق = ۳م/۲

اسی طرح نقطہ ر معلوم کرنے کے لئے:

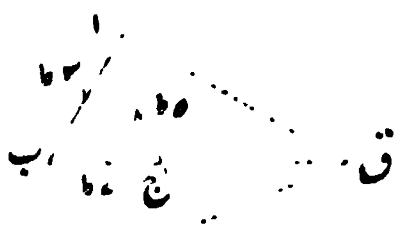
ط × م + ۲ ط (ر د + م) = ۴ ط × ر د

∴ ر د = م/۲

نیز جو اجزاے ترکیبی ج د پر عمود ہیں وہ ۴ ط - ۲ ط یعنی ۲ ط کے برابر ہیں۔ اور ج د کے متوازی اجزاے ترکیبی ۲ ط - ط یعنی ۲ ط کے مساوی ہیں۔ لہذا حاصل کی مقدار ۲ √۲ ط ہے

مثال (۳)، قوتیں ۳ ط، ۷ ط، ۵ ط ایک مثلث مساوی الاضلاع ا ب ج کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج ا کی سمت میں عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار اور سمت اور خط عمل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلث کا ضلع م ہے۔ اور فرض کرو کہ قوتوں کا حاصل ضلع ب ج کو نقطہ ق پر ملتا ہے۔



تو بموجب دفعہ ۶۵ ق کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہوگا۔

∴ ۳ ط × (ق ج + م) جب ۶۰° = ۵ ط × ق ج جب ۶۰°

∴ ق ج = $\frac{۳}{۲}$م

ب ج کی عمودی سمت میں قوتوں کے اجزاے ترکیبی کا مجموعہ

= ۵ ط جب ۶۰° - ۳ ط جب ۶۰° = ط $\sqrt{۱۲}$

نیز ب ج کی سمت میں قوتوں کے اجزاے ترکیبی کا مجموعہ

= ۷ ط - ۵ ط جم ۶۰° - ۳ ط جم ۶۰° = ۳ ط

پس حاصل ط $\sqrt{۱۲}$ کے برابر ہے۔ اور اس کی سمت ب ج سے ایک زاویہ مستا $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ کے مساوی یعنی ۳۰° بناتی ہے۔ اور حاصل ق میں سے گزرتا ہے جہاں ج ق = $\frac{۳}{۲}$ ب ج

امثلہ نمبری (۹)

(۱) ایک مربع ا ب ج د کا ضلع ۴ فٹ ہے۔ اضلاع ج ب اور ب ا اور د ا اور د ب کی سمت میں بالترتیب ۴ اور ۳ اور ۲ اور ۵ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ نقطہ ج کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ فٹ پونڈ کے قریب ترین اعشاریہ تک معلوم کرو +

(۲) ایک مسدس منتظم ا ب ج د ع ف کا ضلع ۲ فٹ ہے۔ اضلاع ا ب، ج ب، د ج، د ع، ع ف کی سمت میں قوتیں ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ پونڈ وزنی بالترتیب عمل کرتی ہیں۔ ا کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ دریافت کرو +

(۳) ایک ۲۰ فٹ لمبی لکڑی کا ایک سرا ایک افقی سطح پر رکھا ہے۔ اور دوسرے سرے سے ایک رسی بندھی ہے جو افق سے ۳۰° کا

زاویہ بناتی ہے۔ اس تنی کو ایک ۳۰ پونڈ وزنی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ اگر لکڑی کو عمودی سمت میں رکھنا منظور ہو تو دریافت کرو کہ سطح افقی سے چار فٹ بلند مقام پر کس مقدار کی افقی قوت لکڑی پر عمل کرے ؟

(۴) ایک یکساں لوہے کی سلاخ کا طول ۶ فٹ اور مقدار مادہ ۹ پونڈ ہے۔ اور اس کے سروں سے ۱۶ اور ۱۲ پونڈ کے اوزان آویزاں ہیں۔ دریافت کرو کہ سلاخ کو کس مقام سے لٹکایا جائے۔ کہ وہ حالت افقی میں ساکن رہے ؟

(۵) ایک یکساں شہتیر کا طول ۱۲ فٹ ہے۔ اور وزن ۵۰ پونڈ ہے اور اس کے سروں سے اجسام وزنی ۲۰ پونڈ اور ۳۰ پونڈ معلق ہیں۔ شہتیر کو کس مقام پر سہارا دیا جائے کہ وہ حالت توازن میں رہے؟

(۶) ایک یکساں ۵ فٹ لمبی سلاخ کے ایک سرے سے ۱، ۲، ۳ اور ۴ فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب ۱، ۲، ۳، اور ۴ پونڈ کے اوزان لٹکائے گئے ہیں۔ اگر سلاخ کا وزن ۴ پونڈ ہے تو سلاخ کس مقام پر متوازن ہوگی ؟

(۷) ایک یکساں سلاخ کا طول ۴ فٹ ہے اور وزن ۲ پونڈ ہے اور اس کے ایک سرے سے ایک فٹ کے فاصلہ پر ایک ایسا مقام ہے۔ جس کے گرد وہ آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اور اس سرے سے ایک ۱۰ پونڈ وزن آویزاں ہے۔ معلوم کرو کہ دوسرے سرے پر کتنا وزن رکھا جائے کہ سلاخ متوازن ہو ؟

(۸) ایک بھاری یکساں شہتیر طول میں ۱۰ فٹ ہے۔ اور وزن میں

۱۰ پونڈ ہے۔ ایک سرے سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر اس کو سہارا دیا جاتا ہے۔ اور اس سرے پر ایک ۲ فٹ کا وزن بھی رکھا جاتا ہے معلوم کرو کہ دوسرے سرے پر کس قدر وزن رکھا جائے کہ شہتیر میں توازن ہو؟

(۹) ایک افقی پل کا طول ۳۰ فٹ ہے اور وزن ۶ ٹن ہے۔ اس کے سروں پر ایک ہی طرح کے سہارے ہیں جن پر وہ قائم ہے۔ معلوم کرو کہ ہر ایک سہارے پر کیا دباؤ ہوگا جبکہ ایک ۲ ٹن وزنی گاڑی (۱) پل کا نصف طول (۲) پل کا دو تہائی طول طے کرچکی ہو؟

(۱۰) دو کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ۱۰ انچ ہے۔ اور ان پر ایک ۲۰ انچ لمبی ہلکی سلاخ اب رکھی ہے۔ اگر نقاط ا اور ب سے اوزان ۲ و اور ۳ و لٹکائے جائیں تو معلوم کرو کہ سلاخ کس طرح رکھی جائے کہ کھونٹیوں کے عمل برابر ہوں؟

(۱۱) ایک ۳ فٹ لمبی ہلکی سلاخ سے دو مساوی وزن آویزاں ہیں۔ ایک وزن ایک سرے سے ۹ انچ کے فاصلہ پر ہے اور دوسرا دوسرے سرے سے ۱۵ انچ کے فاصلہ پر ہے۔ سلاخ دو عمودی رسیوں کے سہارے اٹک رہی ہے جو اس کے سروں سے بندھی ہیں۔ اگر رسیاں ایک ہنڈرڈویٹ وزن سے زیادہ نہ سہار سکیں۔ تو اوزان کی زیادہ سے زیادہ کیا مقدار ہوگی؟

(۱۲) ایک وزنی یکساں شہتیر جس کی مقدار مادہ ۴۰ پونڈ ہے۔ افقی حالت میں دو عمودی رسیوں کے ذریعے لٹک رہا ہے۔ ہر ایک

رسی ۳۵ پونڈ وزن کا تناؤ برداشت کرسکتی ہے۔ ایک جسم جس کا وزن ۲۰ پونڈ ہے شہتیر کے مرکز سے کس قدر فاصلہ پر رکھا جائے کہ اس کے بوجھ سے ایک رسی ٹوٹنے کی حد تک پہنچ جائے؟

(۱۳) ایک یکساں ۱۰ فٹ لمبی سلاخ ا ب زمین پر پڑی ہے اور اس کا وزن ۵۰ پونڈ ہے۔ اگر ایک ۱۰۰ پونڈ وزن اس پر ب سے ۳ فٹ کے فاصلہ پر رکھا جائے۔ تو دریافت کرو کہ ا پر کیا عمودی قوت لگائی جائے کہ وہ سرا زمین سے ذرا اٹھ جائے؟

(۱۴) ایک ۱۶ انچ لمبی سلاخ دو کھونٹیوں پر دھری ہے۔ کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ۹ انچ ہے۔ سلاخ کا مرکز کھونٹیوں کے وسط میں واقع ہے۔ حالت توازن میں خلل ڈالے بغیر جو بڑے سے بڑے اوزان یکے بعد دیگرے دونوں سروں سے لٹکائے جا سکتے ہیں وہ ۴ پونڈ اور ۵ پونڈ ہیں۔ سلاخ کا وزن دریافت کرو۔ اور یہ بھی دریافت کرو کہ سلاخ کے کس مقام پر اس کا وزن عمل کرتا ہے؟

(۱۵) ایک دو فٹ لمبی ہلکی سلاخ ایک قبضے کے گرد جو اس کے ایک سرے پر ہے آزادانہ حرکت کرسکتی ہے وہ ایک پتلے عمودی ڈورے کے ذریعہ افقی حالت میں اس طرح ساکن ہے کہ عمودی ڈورا ایک طرف قبضے سے ۸ انچ کے فاصلہ پر سلاخ سے بندھا ہے اور دوسری طرف سلاخ کے اوپر ایک مقام پر مربوط ہے۔ اگر ڈورا ۹ اونس وزن سے زیادہ برداشت کرنے کے قابل نہ ہو۔ تو معلوم کرو کہ سلاخ کے دوسرے سرے سے زیادہ سے زیادہ کتنا وزن لٹکایا جا سکتا ہے؟

(۱۶) ایک سہ پہیہ (ٹرائی سکل) کا وزن ۵ سٹون ۴ پونڈ ہے۔ اسکے دو بڑے پہیوں کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے۔ اور اس کا تیسرا پہیہ جو چھوٹا ہے۔ وہ دونوں بڑے پہیوں سے تین فٹ پیچھے عین وسط میں ہے۔ اگر مشین کا مرکز ثقل سامنے کے پہیوں سے پیچھے ۹ انچ افقی فاصلہ پر ہو۔ اور سوار وزنی ۹ سٹون کا مرکز ثقل سامنے کے پہیوں سے ۱۲ انچ پیچھے ہو۔ تو زمین پر تینوں پہیوں کا دباؤ معلوم کرو +

(۱۷) ایک سہ پہیہ کا وزن ۲ سٹون ہے۔ اس کے دو بڑے پہیوں کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے۔ اور اس کا تیسرا چھوٹا پہیہ بڑے پہیوں سے ۳ فت ۲ انچ آگے کی طرف عین وسط میں واقع ہے۔ اگر مشین کا مرکز ثقل پچھلے پہیوں سے ایک فٹ آگے کی طرف ہو۔ اور ۱۱ پونڈ وزنی سوار کا مرکز ثقل پچھلے پہیوں سے ۲ انچ آگے ہو تو تینوں پہیوں پر تقسیم وزن دریافت کرو +

(۱۸) ایک گاڑی پر ۴ ہنڈرڈویٹ بوجھ لدا ہے۔ اگر گھوڑے کی پیٹھ پر ۱۰ پونڈ وزنی دباؤ پڑتا ہے اور گاڑی کی دھر اور گھوڑے کی زین میں ۲ فٹ کا فاصلہ ہو تو بوجھ کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو +

(۱۹) ایک مربع ا ب ج د کے اضلاع کی سمت میں بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۲ پونڈ وزنی قوتیں عمل کرتی ہیں تو حاصل کی مقدار، سمت اور خط عمل معلوم کرو +

(۲۰) ا ب ج د ایک مربع ہے اب اور ج ب اور
ا د اور د ج کی سمت میں مساوی قوتیں ط عمل کرتی ہیں۔
ان کا حاصل دریافت کرو +

(۲۱) ایک مربع ا ب ج د کا ضلع انچ ہے۔ اضلاع ا ب
اور ب ج اور د ج اور ا د کی سمت میں بالترتیب ۱، ۲،
۳، ۴ کے متناسب قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ ان کا
حاصل مربع کے ایک قطر کے متوازی ہے۔ اور معلوم کرو کہ حاصل
مربع کے اضلاع کو کہاں قطع کرتا ہے؟

(۲۲) ایک مستطیل ا ب ج د کے اضلاع متصلہ ا ب اور
ب ج بالترتیب ۳ اور ۴ فٹ ہیں ا ب اور ب ج اور
ج د کی سمت میں بالترتیب ۳۰، ۴۰، ۵۰ پونڈ وزن کی قوتیں
عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل دریافت کرو +

(۲۳) تین قوتیں ط، ۲ ط، ۳ ط ایک مثلث مساوی الاضلاع
ا ب ج کے اضلاع ا ب اور ب ج اور ج ا کی سمت
میں عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو
اور حاصل اور ضلع ب ج کا نقطہ تقاطع بھی معلوم کرو +

(۲۴) ا ب ج ایک مثلث متساوی الساقین ہے۔ جس کا زاویہ
ا ۱۲۰° ہے اور ۱، ۱، $\sqrt{3}$ پونڈ وزن کی قوتیں ا ب اور
ا ج اور ب ج کی سمت میں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو
کہ حاصل ب ج کی تنصیف کرتا ہے اور مثلث کے ایک
اور ضلع کے متوازی ہے۔

(۲۵) ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی سمت میں تین قوتیں ایک ہی رخ میں عمل کرتی ہیں۔ جو ا ب اور ب ج اور ج ا کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل مقدار اور سمت میں ۲ ج ا سے تعبیر ہوگا۔ اور اس کا خط عمل ب ج کو ایک ایسے نقطہ لا پر ملیگا جہاں ج لا = ب ج۔

(۲۶) ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کے نقاط تنصیف بالترتیب د، ع، ف ہیں۔ تین قوتیں جو ا د اور $\frac{۲}{۳}$ ب ع اور $\frac{۱}{۳}$ ج ف سے تعبیر ہوتی ہیں۔ ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں جو ا د اور ب ع کے نقطہ تقاطع پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ حاصل، مقدار اور سمت میں $\frac{۱}{۲}$ ا ج سے تعبیر ہوگا۔ اور اس کا خط عمل ب ج کو ۲ اور ۱ کی نسبت میں تقسیم کریگا +

(۲۷) تین قوتیں ایک مثلث کے اضلاع کی سمت میں عمل کرتی ہیں۔ اگر دو قوتوں کا مجموعہ مقدار میں تیسری کے برابر ہو۔ اور رخ میں مخالف ہو۔ تو ثابت کرو کہ تینوں قوتوں کا حاصل مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزریگا +

(۲۸) ایک تار برقی کے کھمبے کے گرد جو تار لپٹا ہوا ہے وہ افقی ہے۔ اور تار کے دونوں طرف کے حصے آپس میں ۹۰° کا زاویہ بناتے ہیں کھمبے کے سہارنے کے لئے ایک اور تار اس کے وسط میں بندھا ہے۔ اور افق سے ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کا تناؤ تار برقی کے تناؤ سے $۲\sqrt{۲}$ گنا ہے +

(۲۹) ایک رسی جس کا طول معلوم ہے ایک ستون کے کسی

مقام پر بندھی ہے۔ اور رسی کے دوسرے سرے کو ایک آدمی قوت معینہ سے کھینچتا ہے۔ معلوم کرو کہ رسی کو ستون کے کس مقام پر باندھا جائے کہ رسی کے تناؤ میں ستون کے گرانے کے لئے زیادہ سے زیادہ قابلیت ہو؟

(۳۰) ایک قوت کی مقدار معلوم ہے۔ اور دو نقاط معلومہ ا اور ب کے گرد اس کے معیار بھی معلوم ہیں محل ہندسی سے اس کا خط عمل معلوم کرو +

(۳۱) دو قوتوں کی مقداریں اور خطوط عمل معلوم ہیں۔ ان کی سطح میں ایسے نقاط کا مقام دریافت کرو جن میں سے ہر ایک نقطہ کے گرد قوتوں کے معیار ایک ہی رخ میں برابر ہوں +

(۳۲) ا ب ایک دائرہ کا قطر ہے۔ اور ب ط اور ب ق دو وتر ہیں۔ جو ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو قوتیں ب ط اور ب ق سے تعبیر ہوں تو ا کے گرد اُن کے معیار برابر ہوں گے +

(۳۳) ایک بائیسکل سوار کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے۔ اور وہ اپنے بائیسکل کے ایک پائدان پر اپنا سارا بوجھ ڈالتا ہے۔ درحالیکہ بیرم خمیدہ سطح افقی میں ہے اور بائیسکل آگے کی طرف حرکت کرنے سے روکا جاتا ہے۔ اگر بیرم خمیدہ کی لمبائی ۱۶ انچ ہو۔ اور زنجیر کے چکر کا نصف قطر ۴ انچ ہو تو زنجیر کا تناؤ معلوم کرو +

باب ششم

جفت

(۶۸) جفت دو ایسی مساوی متوازی مخالف قوتوں سے بنتا ہے۔ جن کے خطوط عمل ایک ہی سیدھ میں نہ ہوں۔ جفت کی دونوں قوتوں کے خطوط عمل کا عمودی فاصلہ جفت کا بازو کہلاتا ہے۔ یعنی بازو وہ عمود ہے جو ایک قوت کے خط عمل کے کسی نقطہ سے دوسری قوت کے خط عمل پر نکالا جائے۔ مثلاً جفت (ط، ط) کا بازو ا ب ہے +

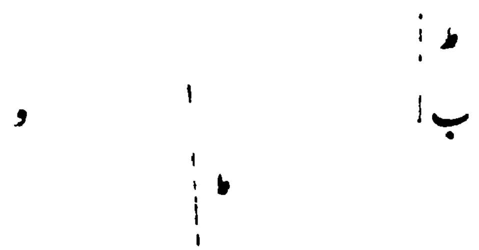


جفت کی ایک قوت اور جفت کے بازو کے حاصل ضرب کو جفت کا معیار اثر کہتے ہیں۔ اس شکل میں جفت کا معیار اثر ط × ا ب ہے۔ شکنجے کے دستہ کو پھرانیوالی قوتیں یا گھڑیال کو

کُنجی دیتے وقت جو قوتیں لگائی جائیں یا دروازہ کھولنے میں دستہ کو پھرانے والی قوتیں جو ہاتھ کے ذریعہ عمل کرتی ہیں۔ یہ سب جفت کی مثالیں ہیں +

(۶۹) اگر ایک جفت کی سطح میں کوئی سا نقطہ لیا جائے تو اس نقطہ کے گرد جفت کی دونوں قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ غیر متبدل ہوگا اور جفت کے معیار کے مساوی ہوگا +

فرض کرو کہ جفت کی دونوں قوتوں میں سے ہر ایک ط ہے اور و ان کی سطح میں ایک نقطہ ہے +



قوتوں کے خطوط عمل پر و ا ب عمود نکالو۔ جو ان کو نقاط ا اور ب پر ملے +

تو و کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ

= ط × و ب - ط × و ا = ط (و ب - و ا) = ط × ا ب

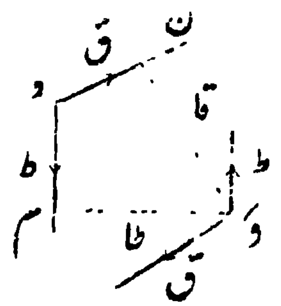
= جفت کے معیار کے۔ لہذا اس کی مقدار میں فرق نہیں آئیگا خواہ کسی نقطہ کے گرد معیار لئے جائیں +

(۷۰) مسئلہ۔ اگر دو جفت ایک ہی سطح میں ایک جسم استوار پر عمل کریں اور ان کے معیار مساوی اور متقابل ہوں تو وہ

متوازن ہوں گے +

فرض کرو کہ ایک جفت کی قوتیں (ط، ط) ہیں اور اس کا بازو طا ہے اور دوسرے جفت کی قوتیں (ق، ق) ہیں اور بازو قا ہے +

صورت اول۔ فرض کرو کہ ایک قوت ط ایک قوت ق کو نقطہ و پر ملتی ہے۔ اور دوسری قوت ط دوسری قوت ق کو نقطہ وَ پر ملتی ہے۔ وَ سے ان دو قوتوں پر جو وَ میں سے نہیں گزرتیں عمود وَم اور وَن نکالو۔ پس ان عمودوں کا طول طا اور قا ہوگا +



چونکہ دونو جفتوں کے معیار مقدار میں مساوی ہیں اس لئے

ط × طا = ق × قا

یعنی ط × وَم = ق × وَن

اس لئے بموجب دفعہ ۶۴ نقطہ و پر عمل کرنیوالی قوتوں ط اور ق کا حاصل نقطہ وَ میں سے گزرتا ہے یعنی و وَ اس

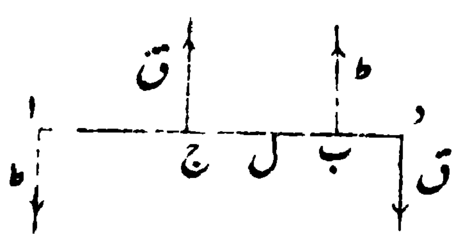
حاصل کی سمت ہے۔ اسی طرح نقطہ وَ پر عمل کرنیوالی قوتوں ط اور ق کے حاصل کی سمت وَو ہے +

نیز یہ دونوں حاصل مقدار میں مساوی ہیں کیونکہ و اور وَ پر عمل کرنیوالی قوتیں برابر ہیں۔ اور ان کے درمیانی زاوے بھی برابر ہیں۔ لہذا یہ دونوں حاصل ایک دوسرے کے اثر کو زائل کرتے ہیں۔ یعنی جفتوں کی چاروں قوتیں متوازن ہیں +

صورت دوم۔ فرض کرد کہ جفتوں کی تمام قوتیں متوازی ہیں۔ اور فرض کرد کہ ایک خط جو ان کی سمت پر عمود ہے۔ ان کو نقاط ا، ب، ج، د پر ملتا ہے۔ جیسا کہ شکل میں ہے۔ چونکہ جفت مساوی ہیں۔ اس لئے ط × ا ب = ق × د ج ....(۱)

فرض کرو کہ نقطہ ج پر عمل کرنیوالی قوت ق اور نقطہ ب پر عمل کرنیوالی قوت ط کے حاصل کا نقطہ عمل ل ہے تو۔

ط × ب ل = ق × ج ل (دفعہ ۵۲) ....(۲)



معادلات (۱) اور (۲) پر عمل تفریق کرنے سے

ط × ا ل = ق × ل د

یعنی نقطہ ا پر عمل کرنیوالی قوت ط اور د پر عمل کرنیوالی قوت ق کے حاصل کا نقطہ عمل بھی ل ہوگا لیکن ہر ایک حاصل کی مقدار ط + ق ہے۔ اور ان کی سمت متقابل ہیں۔پس وہ متوازن ہیں۔ یعنی جفتوں کی چاروں قوتیں متوازن ہیں +

(۱۷) اگر ایک سطح میں دو جفت ایسے ہوں۔ کہ ان کے معیار مساوی اور متقابل ہوں۔ تو چونکہ وہ متوازن ہوتے ہیں۔اسلئے اگر ایک جفت کی قوتوں کی سمتوں کو الٹ دیا جائے تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ اگر ایک سطح میں دو جفت ایسے ہوں کہ ان کے معیار مساوی ہیں۔ تو وہ جفت اثر میں مساوی ہوں گے اس سے یہ نتیجہ بھی نکلتا ہے۔ کہ مساوی معیار والے دو موافق جفت ایک ایسے جفت کے برابر ہوتے ہیں جس کا معیار دوچند ہو +

(۲۷) اگر ایک جسم استوار پر ایک سطح میں بہت سے جفت عمل کریں۔ تو وہ ایک جفت کے مساوی ہوں گے جس کا معیار تمام جفتوں کے معیاروں کے مجموعہ جبریہ کے برابر ہوگا +

فرض کرو کہ ایک جفت کی قوتیں (ط، ط) ہیں اور بازو طا ہے۔ دوسرے جفت کی قوتیں (ق، ق) ہیں۔ اور بازو قا ہے۔ تیسرے جفت کی قوتیں (ح، ح) ہیں اور بازو حا ہے وغیرہ۔ بجائے جفت (ق، ق)، کے ایک ایسا جفت لگاؤ جس کی قوتوں کے خطوط عمل وہی ہوں جو (ط ، ط) کے ہیں۔ اس نئے جفت کی قوتوں میں سے ہر ایک لا ہوگی۔ جہاں

$$لا \times طا = ق \times قا$$ (بموجب دفعہ ۱۷) پس $$لا = ق \times \frac{قا}{طا}$$

اسی طرح بجائے جفت (ح ، ح) کے ایک جفت (ح × حا/طا ، ح × حا/طا) لگاؤ۔ جس کی قوتوں کی سمتیں وہی ہوں۔ جو (ط ، ط) کی ہیں +

باقی جفتوں پر بھی یہی عمل کرو +

پس تمام جفت ایک ایسے جفت کے مساوی ہوں گے۔ جس کی قوتوں میں سے ہر ایک (ط + ق قا/طا + ح حا/طا + ...) ہوگی۔ اور جس کا بازو طا ہوگا +

اس جفت کا معیار = (ط + ق قا/طا + ح حا/طا + ...) × طا

= ط × طا + ق × قا + ح × حا + ... یعنی تمام جفت ایک ایسے جفت کے مساوی ہیں۔ جس کا معیار ان کے معیاروں کے مجموعہ جبریہ کے برابر ہے اگر ترکیبی جفتوں کی علامات مختلف ہوں۔ تو ہر ایک جفت کے ساتھ اس کی اپنی علامت ہوگی لیکن ثبوت یہی ہوگا +

امثلہ نمبری (۱۰)

(۱) ا ب ج د ایک مربع ہے جس کا ضلع ۲ فٹ ہے۔ ا ب اور ب ج اور ج د اور د ا کی سمتوں میں بالترتیب ۱و۳و ۸ و ۵ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اور ا ج اور د ب کی سیدھ میں ۵√۲ اور ۲√۲ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ ایک جفت کے مساوی ہیں جس کا معیار ۱۶ فٹ پونڈ ہے +

(۲) مربع ا ب ج د کے اضلاع ا ب اور ج د کی سمت میں دو قوتیں عمل کرتی ہیں۔ جن میں سے ہر ایک دو پونڈ وزن کے برابر ہے۔ اور اضلاع ا د اور ج ب کی سمت میں دو قوتیں عمل کرتی ہیں۔ جن میں سے ہر ایک ۵ پونڈ کے مساوی ہے۔ اگر مربع کا ضلع ۳ فٹ ہو۔ تو اس جفت کا معیار دریافت کرو۔ جو توازن پیدا کرے +

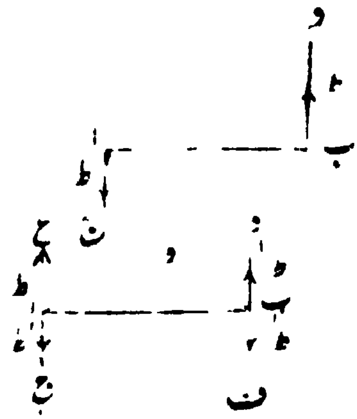
(۳) ا ب ج د ع ف ایک مسدس منتظم ہے۔ اضلاع ا ب، ج ب، د ع، ع ف کی سمت میں بالترتیب ۵، ۱۱، ۵، ۱۱ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اور ج د اور ف ا کی سمت میں دو قوتیں عمل کرتی ہیں۔ جن میں سے ہر ایک لا پونڈ وزن کے مساوی ہے۔ اگر قوتوں میں توازن ہو تو لا معلوم کرو۔

(۴) ا ب ایک ہلکی افقی سلاخ ہے۔ مقام ا پر ایک پونڈ وزن کی قوت شاقولی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اور ب پر ایک پونڈ وزن کی قوت سمت راس میں عمل کرتی ہے۔ اور ایک ۵ پونڈ وزن کی قوت سلاخ کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہوئی نیچے کی طرف عمل کرتی ہے تو معلوم کرو کہ سلاخ کے کونسے مقام پر ایک قوت لگائی جائے کہ توازن پیدا ہو۔ اس قوت کی مقدار اور سمت بھی دریافت کرو +

(۷۴) مسئلہ۔ اگر ایک جسم استوار پر عمل کرنیوالے [illegible] کو یک دوسری متوازی سطح میں اس طرح منتقل کیا جائے [illegible] منتقل شدہ جفت کا بازو پہلے جفت کے بازو کے متوازی [illegible] تو جفت

کے اثر میں کوئی فرق نہیں آئے گا +

فرض کرو۔ کہ دئے ہوئے جفت کی دو قوتیں (ط ، ط) ہیں۔ اور بازو ا ب ہے۔ اور ان کے خطوط عمل ا ج اور ب د ہیں۔



فرض کرو۔ کہ اَ بَ ایک خط ایسا ہے جو ا ب کے متوازی اور مساوی ہے۔ اَ جَ اور بَ دَ بالترتیب ا ج اور ب د کے متوازی کھینچو +

اَ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ط کے برابر لگاؤ۔ جن میں سے ایک اَ جَ کی سمت میں عمل کرے۔ اور دوسری اس کی متقابل سمت اَ ع میں عمل کرے +

اسی طرح بَ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ط ہو۔ اور ایک بَ دَ کی سمت میں عمل کرے اور دوسری اس کے متقابل بَ ف کی سمت میں عمل کرے۔

جسم کے توازن پر ان قوتوں کا کچھ اثر نہیں ہوسکتا +
ا ب اور اَ بَ کو ملاؤ۔ اور فرض کرو کہ وہ و پر ملتے ہیں تو
و دونوں خطوط ا بَ اور اَ ب کا نقطہ وسط ہوگا +
جو قوت ط کہ ب پر عمل کرتی ہے۔ اور قوت ط جو
اَ ع کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ان دونوں کا حاصل ایک
قوت ۲ ط ہے جو نقطہ و پر ب د کے متوازی
عمل کرتی ہے +
اسی طرح جو قوت طَ ا پر عمل کرتی ہے اور قوت ط جو
بَ ف کی سمت میں عمل کرتی ہے ان کا حاصل ایک
قوت ۲ ط ہے جو و پر ا ج کے متوازی عمل کرتی ہے
یہ دونوں حاصل مساوی اور متقابل ہیں۔ لہٰذا متوازن ہیں۔
اب دو قوتیں (ط، ط) باقی رہ گئیں۔ جو نقاط اَ اور بَ پر
سموت اَ جَ اور بَ دَ میں عمل کرتی ہیں۔ یعنے دیئے ہوئے
جفت کی قوتوں کے متوازی۔
نیز اَ جَ اور بَ دَ میں سے گزرنے والی سطح ا ج اور
ب د میں سے گزرنے والی سطح کے متوازی ہے۔ پس
مسئلہ ثابت ہوا +
نتیجہ صریح۔ مسئلہ ہذا اور دفعہ ا۔ سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔
کہ ایک جفت کی بجائے ایک دوسرا جفت ایک متوازی سطح
میں بلا تبدیل اثر استعمال ہوسکتا ہے۔ بشرطیکہ دونوں کے معیار
برابر ہوں +

(۱۴۷) مسئلہ۔ اگر ایک جسم استوار پر ایک ہی سطح میں ایک قوت اور ایک جفت عمل کریں تو ان میں توازن نہیں ہوسکتا بلکہ دونوں ملکر ایک ایسی قوت کے مساوی ہیں جس کی مقدار قوت معلومہ کے مساوی ہے اور سمت اس کی سمت کے متوازی ہے +

فرض کرو کہ جفت کی دونوں قوتوں میں سے ہر ایک ط ہے اور ان کے خطوط عمل و ب اور و ج ہیں۔ اور فرض کرو کہ قوت معلومہ ق ہے (شکل اگلے صفحہ پر دیکھو)

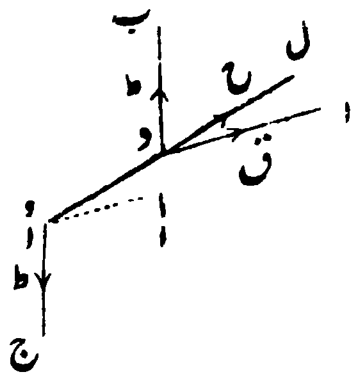
صورت اول۔ اگر قوت ق جفت کی قوتوں کے متوازی نہ ہو تو فرض کرو کہ خارج ہوکر وہ ان میں سے ایک قوت کو نقطہ و پر ملتی ہے +

تو ط اور ق قوتیں جو نقطہ و پر عمل کرتی ہے ایک قوت ح کے مساوی ہیں، جس کی سمت سموت و ا اور و ب کے درمیان کوئی سا خط و ل ہے +

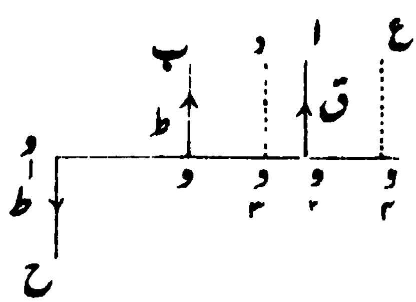
و ل کو ایک طرف یا دوسری طرف خارج کرو۔ تاکہ جفت کی دوسری قوت کو نقطہ وَ پر ملے اور ح کا نقطہ عمل وَ پر منتقل کرو +

خط وَ اَ خط و ا کے متوازی کھینچو۔ تو قوت ح دو قوتوں ق اور ط میں تحلیل ہوسکتی ہے۔ جن میں سے پہلی سمت وَ اَ میں عمل کرتی ہے۔ اور دوسری یعنی ط، وَ ج کی سمت کے متقابل عمل کرتی ہے۔ یہ قوت ط اور جفت کی دوسری قوت ط جو سمت وَ ج میں عمل کرتی ہے۔ آپس میں متوازن ہیں +

پس اس تمام نظام کا حاصل ایک قوت ق ہے۔ جو سمت
و ا۔ میں یعنی اپنی اصلی سمت و ا کے متوازی عمل کرتی ہے +



صورت دوم۔ فرض کرو۔ کہ قوت ق جفت کی قوتوں کے
متوازی ہے +



فرض کرو کہ وو قوت ق کو نقطہ و پر ملتا ہے +

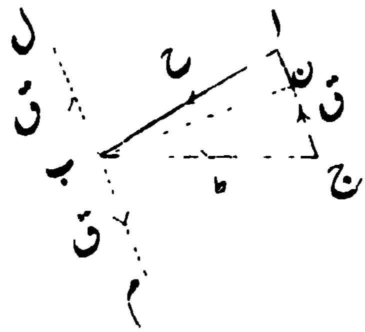
بموجب دفعہ ۵۲ نقطہ و پر عمل کرنیوالی قوت ط اور و۲ پر عمل کرنیوالی قوت ق باہم ایک قوت ط + ق کے برابر ہیں۔ جو ایک نقطہ و۲ پر و ب کے متوازی عمل کرتی ہے۔ اب ایک طرف تو قوت ط + ق کو لو جو نقطہ و۲ پر عمل کرتی ہے۔ اور دوسری طرف اس کی مخالف متوازی قوت ط کو لو جو و۱ پر عمل کرتی ہے ان دونوں کا حاصل ایک قوت ق ہے۔ جو ایک نقطہ و۲ پر و د کے متوازی عمل کرتی ہے۔ پس اس نظام کا حاصل ایک قوت ق ہے جو اپنی اصلی سمت کے متوازی عمل کرتی ہے +

(۵۷) اگر تین قوتیں ایک جسم استوار پر عمل کریں اور ایک مثلث کے اضلاع ایک ہی رخ میں ان تینوں قوتوں کو مقدار سمت اور خط عمل میں فرداً فرداً تعبیر کریں۔ تو وہ ایک جفت کے برابر ہوں گے۔ جس کا معیار مثلث کے دوچند رقبہ سے تعبیر ہوگا۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ط، ق، ح ہیں۔ یعنے مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب قوتوں ط، ق، ح کو تعبیر کرتے ہیں +

نقطہ ب میں سے ل ب م، ا ج کا متوازی کھینچو اور ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ق کے برابر ہو۔ اور ان کی سمتیں ب ل اور ب م ہوں +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



قوتوں کے مثلث کے مسئلہ کے ذریعہ سے قوتیں ط اور ح اور قوت ق جو سمت ب ل میں عمل کرتی ہیں۔ تینوں توازن میں ہیں۔ اب ہمارے پاس صرف دو قوتیں باقی رہیں۔ جن میں سے ہر ایک ق کے برابر ہے۔ اور ایک کی سمت ج ا ہے۔ اور دوسری کی ب م یہ دونوں قوتیں ایک جفت ہیں جس کا معیار ق × ب ن ہے۔ جہاں ب ن نقطہ ب سے ج ا پر عمود ہے۔
نیز ق × ب ن = ج ا × ب ن = دو چند رقبہ مثلث ا ب ج۔

نتیجہ صریح۔ اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ اگر ایک کثیرالاضلاع کے اضلاع ایک ہی رخ میں قوتوں کے ایک ایسے نظام کو فرداً فرداً مقدار سمت اور خط عمل میں تعبیر کریں جو ایک سطح میں ایک جسم استوار پر عمل کرتا ہے۔ تو یہ نظام ایک جفت کے مساوی ہوگا۔ جس کا معیار کثیرالاضلاع کے دو چند رقبہ سے تعبیر ہوگا۔

باب ہفتم

ایک ایسے جسم استوار کا توازن جس پر تین قوتیں ایک ہی سطح میں عمل کرتی ہوں

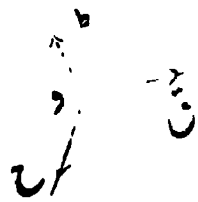
(۷۶) اس باب میں ہم ایک ایسے جسم استوار کے توازن کی سادہ صورتوں پر بحث کریں گے جس پر تین قوتیں ایک ہی سطح میں عمل کرتی ہوں +

ہم کو معلوم ہوگا کہ مثلہ دفعہ ذیل کی مدد سے یہ شرائط ایک ذرہ کی شرائط توازن میں تحویل ہوسکتی ہیں +

(۷۷) **مسئلہ اگر تین قوتیں ایک جسم استوار پر ایک ہی سطح میں عمل کریں اور اس کو ساکن رکھیں تو ضرور ہے کہ وہ ایک نقطہ پر ملیں یا متوازی ہوں +**

اگر سب قوتیں متوازی نہ ہوں تو ان میں سے کم از کم دو لازمًا ایک نقطہ پر ملیں گی فرض کرو کہ وہ باہم ملنے والی قوتیں ط اور ق ہیں اور ان کی سمتیں نقطہ و پر ملتی ہیں۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ تیسری قوت ح بھی نقطہ و میں سے گزریگی +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



چونکہ قوتوں کی کسی تعداد کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ کسی نقطہ کے گرد جو ان کی سطح میں واقع ہو ان کے حاصل کے معیار کے برابر ہوتا ہے اس لئے قوتوں ط ، ق ، ح کے معیاروں کا مجموعہ نقطہ و کے گرد ان کے حاصل کے معیار کے برابر ہوگا۔ لیکن یہ حاصل صفر ہے کیونکہ قوتوں میں توازن ہے اس لئے معلوم ہوا کہ ط ، ق ، ح کے معیاروں کا مجموعہ نقطہ و کے گرد صفر ہے ٭

لیکن ط اور ق دونوں نقطہ و میں سے گزرتی ہیں اس لئے ان کے معیار نقطہ و کے گرد صفر ہیں اس لئے ح کا معیار بھی و کے گرد صفر ہے اب چونکہ ح صفر کے برابر نہیں اس لئے بموجب دفعہ ، ۵ ضرور ہے کہ اس کا [illegible] میں سے گزرے ٭

لہذا معلوم ہوا کہ تینوں قوتیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں

یا بطریق دیگر۔ ط اور ق کا حاصل ایک ایسی

نقطہ و میں سے گزرتی ہے +

لیکن چونکہ ط ، ق ، ح متوازن ہیں۔ اس لئے ط اور ق کے حاصل اور قوت ح میں توازن ہونا چاہیئے +

لیکن دو قوتیں متوازن نہیں ہوسکتی جب تک کہ ان کا خط عمل ایک ہی نہ ہو +

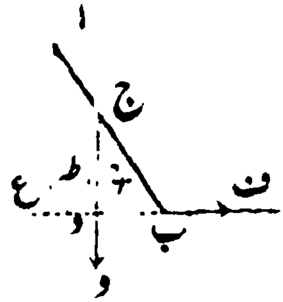
اس سے معلوم ہوا کہ ح کا خط عمل نقطہ و میں سے گزرتا ہے +

(۷۸) ہم دیکھتے ہیں کہ مسئلہ بالا کی مدد سے تین ایسی قوتوں کی شرائطِ توازن جو ایک ہی سطح میں عمل کرتی ہیں بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں کیونکہ ایسی قوتیں ضرور ایک نقطہ میں ملتی ہیں اور اس لئے مسئلہ لامی دفعہ (۴۰) کی استعانت سے یا قوتوں کو دو عمودی سمتوں میں تحلیل کرنے سے یا عمل ترسیمی سے شرائط مطلوبہ بآسانی حاصل ہوسکتی ہیں +

مثال (۱) ایک یکساں وزنی سلاخ کا ایک سرا ا ایک قبضے کے ذریعہ ایک نقطہ معینہ پر نصب کردیا گیا ہے اور اس کے نچلے سرے پر ایک افقی قوت ف عمل کرتی ہے اور اس طرح سے سلاخ حالت سکون میں ہے اور افق کے ساتھ زاویہ ۶۰° کا بناتی ہے قوت ف کی مقدار اور قبضہ کا عمل دریافت کرو +

فرض کرو کہ سلاخ کا نقطہ تنصیف ح ہے اور اس نقطہ میں گزرنیوالا خط راس افقی خط ب ع کو نقطہ د میں ملتا ہے +

فرض کرو کہ سلاخ کا وزن و ہے +



سلاخ پر صرف تین قوتیں عمل کرتی ہیں یعنی قوت ف وزن و
اور قبضہ کا عمل ط

اس لئے یہ تینوں قوتیں لازماً ایک نقطہ پر ملیں گی۔ اب چونکہ ف اور و نقطہ د پر ملتی ہیں اس لئے قبضہ کا عمل سمت د ا میں ہوگا۔ ع ب پر عمود ا ع نکالو اور فرض کرو کہ زاویہ ا د ع برابر ط کے ہے +

تب مس ط = $\frac{اع}{ع د}$ = $\frac{۲ اع}{ع ب}$ = ۲ مس ۶۰° = ۲ $\sqrt{۳}$

نیز بموجب مسئلہ لامی

$$\frac{ف}{جب\ و د ا} = \frac{و}{جب\ ا د ب} = \frac{ط}{جب\ و د ب}$$

یعنی $\frac{ف}{جب\ (۹۰°+ط)} = \frac{و}{جب\ (۱۸۰°-ط)} = \frac{ط}{جب\ ۹۰°}$

∴ ف = و $\frac{جم\ ط}{جب\ ط}$ = و مم ط = $\frac{و}{۲\sqrt{۳}}$ = $\frac{و}{۶}\sqrt{۳}$

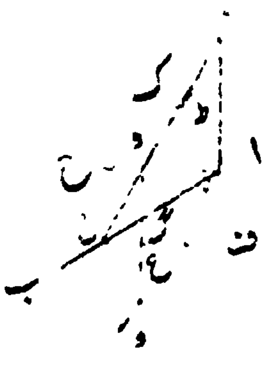
اور ط = و $\frac{۱}{جب\ ط}$ = و $\sqrt{۱+مم^{۲}ط}$ = و $\sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}}$

یا اس طرح۔ مثلث ا د ع کے اضلاع قوتوں کے متناسب ہیں

اس لئے یہ قوتوں کا مثلث ہے پس ط کو ناپ سکتے ہیں اور

$$\frac{ط}{ا\,د} = \frac{ب}{ج\,د} = \frac{و}{ا\,ج}$$

مثال (۲) ایک یکساں سلاخ ا ب سمت راس سے زاویہ ۶۰° کا بناتی ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر لگا ہوا ہے۔ سلاخ کے نقطہ ب سے ۱ فٹ کے فاصلہ پر نقطہ ج پر ایک رسی کا ایک سرا بندھا ہوا ہے اور دوسرا سرا نقطہ ا سے ٹھیک عموداً اوپر دیوار میں ایک حلقہ سے بندھا ہے اور اس طرح سے سلاخ متوازن ہے اگر سلاخ کا طول ۴ فٹ ہو تو حلقے کا مقام اور رسی کا تناؤ اور میلان دریافت کرو +



فرض کرو کہ دیوار کے نقطہ ا پر عمود اور سلاخ کے نقطہ تنصیف گ میں سے گزرنیوالا خط راس دونوں نقطہ و پر ملتے ہیں + تیسری قوت یعنی رسی کا تناؤ کو لازماً نقطہ و میں سے گزرے گا اس لئے ضرور ہے کہ اگر ج و کو خارج کیا جائے تو وہ حلقہ کے مقام د میں سے گزرے +

فرض کرو کہ زاویہ ج د ا برابر ط کے ہے اور افقی خط ج ف خط راس و گ کو ع پر اور دیوار کو ف پر ملتا ہے +

تب مس ط = مس ج و ع = $\frac{ج\,ع}{و\,ع}$ = $\frac{ج\,گ \text{ جب } ج\,گ\,ع}{ا\,ف}$

$$= \frac{۱ \times \text{جب } ۶۰°}{۳ \times \text{جم } ۶۰°} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

∴ ط = ۳۰°

∴ ا ج د = ۶۰° - ط = ۳۰°

لہذا ا د = ا ج = ۳ فٹ جس سے حلقہ کا مقام معلوم ہوتا ہے۔ اگر دیوار کا عمل ح سے تعبیر کریں اور سلاخ کا وزن وَ ہو تو چونکہ مثلث ا و د کے اضلاع قوتوں کے متناسب ہیں اس لئے

$$\frac{ک}{و د} = \frac{ح}{ا و} = \frac{وَ}{د ا}$$

$$∴ ک = وَ \frac{و د}{د ا} = \frac{وَ}{جم ۳۰°} = وَ \times \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$اور ح = وَ \frac{ا و}{د ا} = وَ مس ۳۰° = وَ \times \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

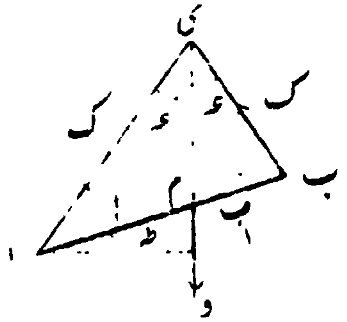
مثال (۳) ایک سلاخ کا مرکز اس کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے طول ا اور ب ہیں سلاخ کے دونوں سرے ایک رسی سے بندھے ہوئے ہیں جس کا طول ل ہے جو ایک چھوٹی چکنی کھونٹی پر سے لٹکتی ہے سلاخ کی حالت سکون اس صورت میں دریافت کرو جبکہ وہ عمودی نہ ہو +

ہدایت۔ مان لو کہ کسی جسم کا مرکز ثقل وہ نقطہ ہے جس پر ہم فرض کرسکتے ہیں کہ اس کا تمام وزن عمل کرتا ہے +

فرض کرو کہ ا ب سلاخ ہے اور م اس کا مرکز ثقل ہے۔ نیز فرض کرو کہ ی کھونٹی ہے اور رسی کے حصوں ا ی اور ی ب کے طول بالترتیب لا اور ھ ہیں +

چونکہ اس جگہ صرف تین قوتیں جسم پر عمل کرتی ہیں اس لئے لازماً وہ ایک نقطہ پر ملیں گی لیکن دونوں رسیوں کے تناؤ نقطہ ی پر ملتے ہیں اس لئے ضرور ہے کہ وزن و کا خط عمل نقطہ

اس نقطے سے گزرے اور ی م ایک خط عمودی ہو +
چونکہ رسی ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے اس لئے اسکے
تناؤ میں کچھ فرق نہیں آتا اور چونکہ وزن و دو مساوی قوتوں کے
حاصل کے ساتھ ملکر متوازن ہے اس لئے ضرور ہے کہ وہ انکے
درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے +



$\therefore \widehat{\text{ای م}} = \widehat{\text{بی م}} = \text{عہ}$ (فرض کرو)

اس لئے $\frac{\text{لا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{ام}}{\text{مب}} = \frac{\text{ا}_{۱}}{\text{ب}_{۱}}$ (اقلیدس م ۶ ش ۳)

نیز $\text{لا} + \text{ھ} = \text{ل}$

اس لئے ان مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوگا +

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}_{۱}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ب}_{۱}} = \frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ا}_{۱}+\text{ب}_{۱}} = \frac{\text{ل}}{\text{ا}_{۱}+\text{ب}_{۱}}$ . . . . (۱)

نیز مثلث ای ب سے

$(\text{ا} + \text{ب}_{۱})^{۲} = \text{لا}^{۲} + \text{ھ}^{۲} - ۲\ \text{لا}\ \text{ھ}\ \text{جم}\ ۲\ \text{عہ}$

$= (\text{لا} + \text{ھ})^{۲} - ۲\ \text{لا}\ \text{ھ}\ (۱ + \text{جم}\ ۲\ \text{عہ})$

$= \text{ل}^{۲} - ۴\ \frac{\text{ل}^{۲}\ \text{ا}_{۱}\ \text{ب}_{۱}}{(\text{ا}_{۱} + \text{ب}_{۱})^{۲}}\ \text{جم}^{۲}\ \text{عہ}$

$\therefore \text{جم}^{۲}\ \text{عہ} = \frac{\text{ل}^{۲} - (\text{ا} + \text{ب}_{۱})^{۲}}{۴\ \text{ل}^{۲}} \times \frac{(\text{ا}_{۱} + \text{ب}_{۱})^{۲}}{\text{ا}_{۱}\ \text{ب}_{۱}}$ . . . . (۲)

اس مساوات سے عہ حاصل ہوتا ہے +

فرض کرو کہ سلاخ کا میلان افق سے ط ہے پس زاویہ ی م ا
= ۹۰° + ط

اور مثلث ا م ی سے

جب (۹۰° + ط) / جب عہ = ای / ام = لا / ا = ل / (ا۱ + ب۱) بموجب (۱)

∴ جم ط = ل جب عہ / (ا۱ + ب۱) جس سے ط حاصل ہوتا ہے +

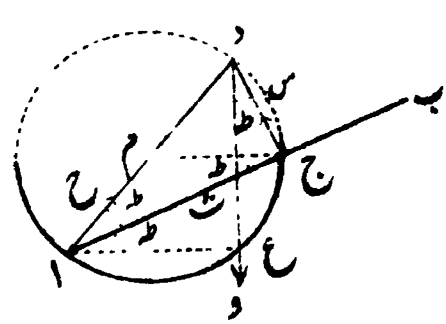
نیز قوتوں کو سمت عمودی میں تحلیل کرنے سے ۲ ک جم عہ = و
جس سے ک حاصل ہوگا +

مثال عددی۔ اگر سلاخ کا طول ۵ فٹ ہو اور رسی کا طول ۷ فٹ ہو اور اگر سلاخ کا مرکز ثقل اس کو ۴ : ۳ کی نسبت میں تقسیم کرے تو ثابت کرو کہ رسی کے دونوں حصے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور سلاخ کا میلان افق سے مس۱ ۱/۷ ہے اور رسی کے تناؤ اور سلاخ کے وزن میں باہمی نسبت ۲۴ : ۲ کی ہے +

مثال (۴) ایک یکساں وزنی سلاخ طول میں ۲ ل ہے اور ایک قائم چکنے نصف کروی پیالے میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا کچھ حصہ پیالے کے اندر اور کچھ حصہ باہر ہے۔ کرہ کا نصف قطر ر ہے اور پیالے کا کنارہ متوازی الافق ہے اور سلاخ کا حرف ایک نقطہ کنارے کو مس کرتا ہے اگر سلاخ کا میلان افق سے ط ہو تو ثابت کرو کہ ۲ ر جم ۲ ط = ل جم ط

فرض کرو کہ شکل ذیل سے کرہ کی وہ تراش عمودی تعبیر ہوتی ہے

جو سلاخ میں سے گزرتی ہے۔ فرض کرو کہ سلاخ ا ب کا مرکز ثقل ش ہے۔ اور پیالے کے کنارے اور سلاخ کا نقطہ تماس ج ہے۔
نقطہ ا پر کا عمل پیالے کے مرکز م کی سمت میں ہے کیونکہ صرف ا د ہی ایک ایسا خط ہے جو نقطہ ا پر پیالے کی سطح پر عمود دار ہو +
نیز نقطہ ج پر کا عمل سلاخ پر عمود ہے کیونکہ اس نقطہ پر صرف یہی ایک ایسی سمت ہے جو پیالے کے کنارے اور سلاخ دونوں پر عمود ہو +
یہ دونوں عمل نقطہ د پر ملتے ہیں نیز بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳۱ یہ ضرور ہے کہ نقطہ د ایک ایسے کرہ پر واقع ہو جس کا ایک حصہ نصف کروی پیالہ ہے +
اس سے معلوم ہوا کہ سلاخ کے نقطہ تنصیف ش میں سے گزرنیوالا خط راس لازماً نقطہ د میں سے گزرے گا۔ نقطہ ا میں سے ا ع متوازی الافق کھینچو کہ وہ د ش کو نقطہ ع پر ملے اور م ج کو ملاؤ



چونکہ م ج اور ا ع متوازی ہیں

∴ م ج ا = ج ا ع = طہ

چونکہ م ج = م ا ∴ م ا ج = م ج ا = طہ

نیز ش د ج = ۹۰° - د ش ج = طہ

اب ا ع = ا ش جم طہ = ل جم طہ

اور ا غ = ا د جم ۲ طہ = ۲ ر جم ۲ طہ

∴ ۲ ر جم ۲ طہ = ل جم طہ جس سے طہ حاصل ہوتا ہے +

نیز بموجب مسئلہ لامی اگر ح اور س نقاط ا اور ج پر کے عملوں کو تعبیر کریں تو

ح / جب طہ = س / جب ا د ش = و / جب ا د ج

یعنی ح / جب طہ = س / جم ۲ طہ = و / جم طہ

مثال عددی۔ اگر ر = (√۳ / ۲) ل

تو طہ = ۳۰° ہوگا اور

ح = س = (√۳ / ۳) و

مثال (۵) ایک شہتیر جس کا مرکز ثقل اس کو دو حصوں ا اور ب میں تقسیم کرتا ہے۔ ایک چکنے کرہ کے اندر پڑا ہے۔ اگر حالت توازن میں شہتیر کا میلان افق سے طہ ہو اور شہتیر کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ عہ ہو تو ثابت کرو کہ

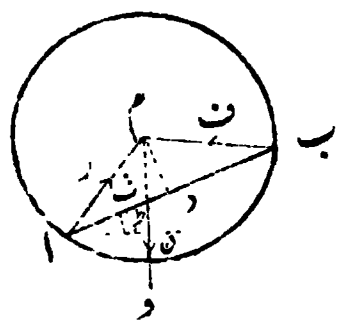
مس طہ = (ب − ا) / (ب + ا) مس عہ

اس صورت میں سلاخ کے سروں پر کے دونوں عمل ر اور ف کرہ کے مرکز م میں سے گزرتے ہیں اس سے ظاہر ہے کہ سلاخ کا مرکز ثقل ش نقطہ م کے عموداً نیچے ہونا چاہیئے +

فرض کرو کہ م ش نقطہ ا میں سے گزرنے والے افقی خط کو نقطہ ن پر ملتا ہے اب پر م د عمود کھینچو +

تب $\widehat{\text{ا م د}} = \widehat{\text{ب م د}} = \text{ع}$

اور $\widehat{\text{د م ش}} = 90^\circ - \widehat{\text{و ش م}} = \widehat{\text{د ا ن}} = \text{ط}$



اس لیے $\frac{\text{ب}'}{\text{ا}'} = \frac{\text{ا ش}}{\text{ش ب}} = \frac{\text{ا د} - \text{ش د}}{\text{ب د} + \text{ش د}}$

$= \frac{\text{م د مس}\ \widehat{\text{ا م د}} - \text{م د مس}\ \widehat{\text{ش م د}}}{\text{م د مس}\ \widehat{\text{ب م د}} + \text{م د مس}\ \widehat{\text{ش م د}}}$

$= \frac{\text{مس ع} - \text{مس ط}}{\text{مس ع} + \text{مس ط}}$

$\therefore$ $\text{مس ط} = \frac{\text{ب}' - \text{ا}'}{\text{ب}' + \text{ا}'}\ \text{مس ع}$ اس مساوات سے ہم کو ط معلوم ہوتا ہے +

نیز بموجب مسئلہ لامی

$\frac{\text{ر}}{\text{جب}\ \widehat{\text{ب م ش}}} = \frac{\text{ف}}{\text{جب}\ \widehat{\text{ا م ش}}} = \frac{\text{و}}{\text{جب}\ \widehat{\text{ا م ب}}}$

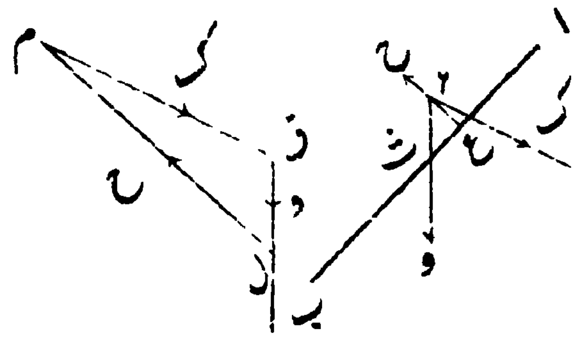
$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جب}\ (\text{ع} + \text{ط})} = \frac{\text{ف}}{\text{جب}\ (\text{ع} - \text{ط})} = \frac{\text{و}}{\text{جب}\ 2\ \text{ع}}$

ان معادلات سے تعامل معلوم ہوتے ہیں +

عددی مثال۔ اگر سلاخ کا وزن ۴۰ پونڈ ہو اور اس کے مقابل کرہ کے مرکز پر ایک زاویہ قائمہ بنے اور اگر سلاخ کا مرکز ثقل اس کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے جن کی باہمی نسبت ۱ : ۲ ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا میلان افق سے مس$^{-1}\frac{1}{3}$ ہے اور تعامل بالترتیب ۸ √۵ اور ۴ √۵ ہیں +

مثال (۶) اس کی تحقیق کرو کہ ایک پتنگ پر عمل کرنیوالی قوتیں اس کو کس طرح توازن میں رکھتی ہیں نیز ثابت کرو کہ پتنگ کی سطح پر کا عمود سمت شاقولی اور ڈورے کی سمت کے درمیان واقع ہونا چاہئیے + فرض کرو کہ پتنگ کا خط وسطی ا ب ہے اور نقطہ ب پر دم بندھی ہوی ہے پتنگ کی سطح اس کاغذ پر عمود دار ہے۔ فرض کرو پتنگ کا مرکز ثقل مع دم کے نقطہ ث ہے۔ پتنگ کے ہر ایک نقطہ پر ہوا کا دباؤ دو اجزاے ترکیبی میں تحلیل ہوسکتا ہے ایک تو پتنگ کی عمودی سمت میں اور دوسرے پتنگ کی سطح میں۔ مگر اس آخری جزو ترکیبی کا پتنگ پر کوئی اثر نہیں اسلئے اس کو خارج کرسکتے ہیں۔ پہلی قسم کے اجزاے ترکیبی ملکر ایک قوت ح کے برابر ہیں جو پتنگ کی سطح پر عمود ہے اور جس کا نقطہ عمل ع نقطہ ث سے ذرا اوپر واقع ہے

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



ح اور و ایک نقطہ د پر ملتے ہیں اور اسی نقطہ میں سے تیسری قوت (یعنی ڈورہ کا تناؤ ک) کو گزرنا چاہیئے۔ خط ق ل کو سمت عمودی میں وزن و کے متناسب اور ل م کو ح د کے متوازی ح کے متناسب کھینچو +

اب چونکہ م ق ل ایک قوتوں کا مثلث ہے اس لئے م ق ڈورے کے تناؤ کو تعبیر کرتا ہے +

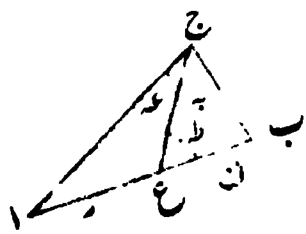
شکل سے ظاہر ہے کہ خط م ق لازماً بہ نسبت خط ل م کے سمت شاقولی ل ق کے ساتھ بڑا زاویہ بناتا ہے یعنی ثابت ہوا کہ پتنگ کی سمت عمودی کو ڈورے کی سمت اور سمت شاقولی کے درمیان واقع ہونا چاہیئے نیز قوتوں کے مثلث سے ظاہر ہے کہ دونوں قوتیں ک اور وہاکی قوت ح سے مقدار میں کم ہیں +

(۷۹) مثلثی مسائل۔ دو مثلثی مسائل علم سکون میں نہایت کارآمد ہیں

وہ یہ ہیں۔ اگر کسی مثلث ا ب ج کے قاعدہ میں ع کوئی نقطہ ہو اور خط ج ع قاعدہ ا ب کو دو حصوں م اور ن میں تقسیم کرے اور زاویہ ج کو دو حصوں عہ اور بہ میں تقسیم کرے اور اگر زاویہ ج ع ب کو طہ سے تعبیر کریں تو

(م + ن) مم طہ = م مم عہ − ن مم بہ ....(۱)

اور (م + ن) مم طہ = ن مم ا − م مم ب ......(۲)



چونکہ م/ن = ا ع/ع ب = ا ع/ع ج × ع ج/ع ب = جب ا ج ع/جب ع ا ج × جب ع ب ج/جب ع ج ب

= جب عہ/جب (طہ − عہ) × جب (طہ + بہ)/جب بہ [چونکہ ع ب ج = ۱۸۰° − (بہ + طہ)]

= جب عہ (جب طہ جم بہ + جم طہ جب بہ)/جب بہ (جب طہ جم عہ − جم طہ جب عہ)

= (مم بہ + مم طہ)/(مم عہ − مم طہ)

∴ م مم عہ − ن مم بہ = (م + ن) مم طہ

نیز م/ن = جب ا ج ع/جب ع ا ج × جب ع ب ج/جب ع ج ب

= جب (طہ − ا)/جب ا × جب ب/جب (طہ + ب)

$$= \frac{\text{(جب ط جم ا − جم ط جب ا) جب ب}}{\text{جب ا (جب ط جم ب + جم ط جب ب)}}$$

$$= \frac{\text{مم ا − مم ط}}{\text{مم ب + مم ط}}$$

$$\therefore \text{(م + ن) مم ط = ن مم ا − م مم ب}$$

ان ضابطوں کے استعمال کی توضیح کے لئے مثال (۵) دفعہ ۷۰ لو
اس میں بہ سبب ضابطہ (۲)

$$\text{(ا + ب}_{\text{ا}}\text{) مم م ش ب = ب}_{\text{ا}}\text{ مم م ا ب − ا مم م ب ا}$$

$$\text{یعنی (ا + ب}_{\text{ا}}\text{) مس ط = ب}_{\text{ا}}\text{ مس ع − ا مس ع}$$

ان کے استعمال کی اور مثالیں کتاب میں آئندہ ملیں گی

امثلہ نمبری (۱۱)

(۱) ایک یکساں سلاخ ا ب وزنی و ایک سطح عمودی میں قبضہ ا کے گرد حرکت کرسکتی ہے سلاخ کا سرا ب ایک رسی کے ذریعہ جو ایک چکنی کھونٹی ج پر سے گزرتی ہے ایک وزن ط سے بندھا ہوا ہے اور ا ج کی سمت عمودی ہے اگر ا ج برابر ا ب کے ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط = و جم ا ج ب}$$

(۲) ایک یکساں سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد حرکت کرسکتی ہے اور ایک افقی قوت مقدار میں نصف وزن سلاخ کے برابر سلاخ کے دوسرے سرے پر عمل کرتی ہے سمت راس سے سلاخ کا میلان دریافت کرو +

(۳) ایک سلاخ ا ب کے نقطہ ا پہ قبضہ لگا ہوا ہے اور

ایک رسی ب ج جو سلاخ سے زاویہ ۴۵° کا بناتی ہے۔ سلاخ کو افقی حالت میں سہارے رکھتی ہے جبکہ سلاخ کے دوسرے سرے ب سے ایک وزن ۱۰ پونڈ آویزاں ہو۔اگر سلاخ کے وزن کو نظر انداز کیا جائے تو رسی کا تناؤ اور قبضے کا عمل دریافت کرو +

(۴) ایک یکساں وزنی سلاخ ا ب کا ایک سرا ا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے نیز ایک رسی کا ایک سرا سلاخ کے نقطہ ج پر بندھا ہوا ہے اور ا ج = $\frac{1}{4}$ ا ب۔رسی کا دوسرا سرا دیوار سے بندھا ہوا ہے۔ اگر سلاخ سمت عمودی سے کوئی زاویہ بنائے تو رسی کا طول دریافت کرو +

(۵) ایک یکساں سلاخ ا ج ب کا وزن و ہے اس کا سرا ا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے۔ اور ب اوپر کا سرا ہے ایک رسی ج د سلاخ کو اس طرح سہارتی ہے کہ د ب متوازی الافق ہے اور ج د دیوار سے زاویہ ۳۰° کا بناتی ہے۔ رسی کا تناؤ اور دیوار کا عمل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ

ا ج = $\frac{1}{4}$ ا ب +

(۶) ایک یکسان سلاخ ا ب کا ایک سرا ا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور ایک رسی ب ج جو ایک طرف عموداً ا کے اوپر نقطہ ج پر اور دوسری طرف سلاخ کے دوسرے سرے ب سے بندھی ہوی ہے۔ سلاخ کو سہارے ہوئے ہے۔ بذریعہ شکل ان قوتوں کے خطوط عمل دیکھاؤ جو سلاخ کو

توازن میں رکھتی ہیں نیز ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ سلاخ کے وزن سے زیادہ ہے +

(۷) ایک یکساں شہتیر اب کا طول معلوم ہے اور اس کا ایک سرا ا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے ایک رسی ج د جو ایک طرف شہتیر کے نقطہ ج پر اور دوسری طرف دیوار کے نقطہ د پر بندھی ہوی ہے شہتیر کو ساکن رکھتی ہے۔ اگر شہتیر کا میلان دیوار سے معلوم ہو تو بتاؤ کہ عمل ہندسی سے رسی ج د کا طول اور نقطہ ا سے نقطہ د کی بلندی کسطرح معلوم ہو سکتی ہے ؟

ثابت کرو کہ اس سوال کے ممکن ہونیکے لئے ضروری ہے کہ اگر ا ج ، $\frac{1}{2}$ اب سے کم ہو تو زاویہ معلومہ ب ا د حادہ ہوگا اور اگر ا ج ، $\frac{1}{2}$ اب سے بڑا ہو تو زاویہ معلومہ ب ا د منفرجہ ہوگا +

(۸) ایک یکساں سلاخ کا طول ا ہے اور وہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور اس کا دوسرا سرا رسی کے ذریعہ دیوار کے ایک نقطہ پر بندھا ہوا ہے۔ اگر رسی کا طول ل ہو تو ثابت کرو کہ حالت توازن میں سلاخ دیوار سے ایک زاویہ ط ایسا بنائے گی جو شرائط مساوات $جم^2 ط = \frac{ل^2 - ا^2}{3 ا^2}$ کو پوری کرے۔ نسبت ا : ل کی حدود دریافت کرو تاکہ توازن ممکن ہو +

(۹) دو رسیاں ا ج ط اور ب ج ط ایک چکنی کھونٹی

ج پر سے گزرتی ہیں اور دو مساوی اوزان ط اور ط ان سے بندھے ہوئے ہیں۔ ایک بھاری شہتیر اب کا وزن و ہے اور اس کا مرکز ثقل ا سے ع فٹ اور ب سے ب فٹ ہے ثابت کرو کہ اب کا میلان افق سے

$$\text{مس}^{-1}\left[\frac{ع-ب}{ع+ب}\ \text{مس}\left(\text{جب}^{-1}\frac{و}{۲ط}\right)\right]$$ ہے +

(۱۰) ایک بھاری یکساں شہتیر دو رسیوں کے ذریعہ جو شہتیر کے سروں پر بندھی ہوئی ہیں ایک نقطہ معینہ سے آویزاں ہے اگر رسیوں اور شہتیر کے طول میں نسبت ۲ : ۳ : ۴ کی ہو تو ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤں اور شہتیر کے وزن میں باہمی نسبت ۲ : ۳ : $\sqrt{۱۰}$ ہوگی +

(۱۱) ایک یکساں وزنی سلاخ کا طول ۱۵ اِنچ ہے اور وہ ایک نقطہ معینہ سے دو رسیوں کے ذریعہ جن کے طول ۹ اور ۱۲ اِنچ ہیں اس طرح معلق ہے کہ سلاخ سمت راس سے زاویہ طہ بناتی ہے ثابت کرو کہ ۲۵ جب طہ = ۲۴ +

(۱۲) ایک یکساں سیدھی سلاخ کا وزن ۳ پونڈ ہے اور وہ ایک کھونٹی سے دو رسیوں کے ذریعہ جو ایک طرف تو کھونٹی سے اور دوسری طرف سلاخ کے سروں سے بندھی ہوئی ہیں لٹکتی ہے رسیوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے اور ایک رسی کا طول دوسرے سے دو چند ہے ان کے تناؤ دریافت کرو +

(۱۳) دو مساوی وزنی کروں کا نصف قطر ایک اِنچ ہے اور وہ ایک ۳ اِنچ نصف قطر کے چکنے کروی پیالے کے اندر ساکن ہیں

ثابت کرو کہ پیالے اور ایک کرہ کے درمیان جو تعامل ہے وہ دو کروں کے باہمی عمل کا دوچند ہے +

(۱۴) ایک کرہ وزن میں و دو ایسی چکنی سطحوں کے درمیان ساکن ہے جن میں سے ایک عمودی ہے اور دوسری سطح عمودی سے زاویہ ھ بناتی ہے۔ سطحوں کے عمل دریافت کرو +

(۱۵) ایک ٹھوس کرہ دو متوازی سلاخوں پر جو ایک ہی سطح افقی میں ہیں ساکن ہے اور سلاخوں کا درمیانی فاصلہ نصف قطر کرہ کے برابر ہے ہر ایک سلاخ کا عمل دریافت کرو +

(۱۶) ایک چکنا کرہ رسی کے سہارے ایک چکنی عمودی دیوار کے ساتھ ساکن ہے رسی کا ایک سرا کرہ کی سطح پر ایک نقطہ سے بندھا ہوا ہے اور دوسرا سرا دیوار کے ایک نقطہ پر مربوط ہے اگر رسی کا طول نصف قطر کرہ کے برابر ہو تو رسی کا میلان سمت راس سے دریافت کرو نیز رسی کا تناؤ اور دیوار کا عمل معلوم کرو +

(۱۷) دیوار میں ایک چکنی کھونٹی پر سے ایک رسی گزرتی ہے اور اس کے سہارے ایک تصویر جس کا وزن معلوم ہے سطح عمودی میں لٹکتی ہے رسی کے سرے دو ایسے نقاط پر باندھ دئے گئے ہیں جو چوکٹے کے اوپر کے کنارے پر مرکز سے برابر فاصلوں پر واقع ہیں۔ نیز کھونٹی پر زاویہ ۶۰° کا بنتا ہے اس صورت میں رسی کا جو تناؤ ہو اس کا مقابلہ رسی کے اس تناؤ سے کرو جبکہ رسی کا طول دو تہائی رہ جائے +

(۱۸) ایک رسی ایک کھونٹی پر سے گزرتی ہے اور ایک تصویر کے دو اوپر کے کونوں سے بندھی ہوی ہے اس کے سہارے تصویر جس کا وزن ۴۰ پونڈ ہے اس طرح لٹکتی ہے کہ اس کے اوپر اور نیچے کے دونوں کنارے متوازی الافق ہیں اور رسی کے دو حصوں کے درمیان کھونٹی پر زاویہ ۶۰° کا بنتا ہے رسی کا تناؤ پونڈوں میں دریافت کرو +

(۱۹) ایک تصویر ایک رسی کے ذریعہ جو ایک کھونٹی پر سے گزرتی ہے اور تصویر کے دو حلقوں سے بندھی ہوی ہے اس طرح ٹنگتی ہے کہ تصویر کا خط وسطی کھونٹی میں سے گزرتا ہے۔ اگر رسی کا طول ۴ فٹ ہو اور حلقوں کو ملانیوالے خط افقی سے کھونٹی کا فاصلہ ۱ فٹ ۶ انچ ہو تو رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ تصویر کا وزن ۱۰ پونڈ ہے +

(۲۰) ایک تصویر کا چوکٹا دو متوازی رسیوں کے سہارے جو ایک طرف دیوار میں دو نقاط سے اور دوسری طرف چوکٹے کی پشت پر دو نقاط سے بندھی ہوی ہیں ایک صاف عمودی دیوار کے ساتھ ٹنگا ہوا ہے۔ ہر ایک رسی کا طول چوکٹے کی اونچائی کے برابر ہے۔ اگر چوکٹے اور تصویر کے مرکز ثقل ایک ہی نقطہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ حالت سکون میں تصویر سطح عمودی سے زاویہ $\text{مس}^{-1}\frac{ب}{۳ا}$ بنائیگی جہاں تصویر کی اونچائی ا سے اور موٹائی ب سے تعبیر ہوتی ہے +

(۲۱) ایک تصویر کو رسی کے ذریعہ ایک عمودی دیوار کے ساتھ

اس طرح لٹکانا مطلوب ہے کہ وہ دیوار سے زاویہ عہ بنائے اور رسی کا ایک سرا دیوار کے ایک نقطہ پر تصویر کے نچلے کنارے سے ح فٹ کی بلندی پر مربوط ہو۔ عمل ہندسیہ سے تصویر کی پشت پر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو جہاں کہ رسی کا دوسرا سرا باندھنا چاہیئے۔ نیز رسی کا طول دریافت کرو +

(۲۲) ایک سلاخ ایک چکنے نصف کروی پیالے کے اندر ساکن ہے کرہ کا نصف قطر ر ہے اور سلاخ کا مرکز ثقل اس کو دو حصوں ا اور ب میں تقسیم کرتا ہے۔ اگر حالت توازن میں سلاخ کا میلان افق سے ط ہو تو ثابت کرو کہ

جب ط = $\frac{ب - ا}{۲\sqrt{ر^۲ - اب}}$ نیز سلاخ اور پیالے کے تعامل معلوم کرو +

(۲۳) ایک وزنی سلاخ ایک چکنے نصف کروی پیالے میں ساکن ہے۔ سلاخ کا طول کرہ کے نصف قطر کے برابر ہے اور سلاخ کا مرکز ثقل اس کے ایک سرے سے طول کے ایک تہائی فاصلہ پر واقع ہے ثابت کرو کہ سلاخ سمت راس سے زاویہ $مس^{-۱}$ (۴ $\sqrt{۳}$) بناتی ہے +

(۲۴) ایک یکساں سلاخ طول میں ۴ انچ ایک چکنے نصف کروی پیالے میں ساکن ہے کرہ کا محور عمود وار ہے اور اس کا نصف قطر $\sqrt{۳}$ انچ ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کے طول کی ایک چوتھائی پیالے سے باہر ہوگی +

نیز ثابت کرو کہ چھوٹی سی چھوٹی سلاخ کا طول جو اس طرح سے ساکن رہ سکتی ہے ۲ $\sqrt{۳}$ انچ ہے +

اشکلہ ذیل عمل ترسیمی سے حل کرو

(۲۵) ایک وزنی شہتیر ا ب طول میں ۱۰ فٹ دو رسیوں کے ذریعہ جو ا اور ب پر بندھی ہوئی ہیں اور بالترتیب افق سے زاوے ۵۵° اور ۵۰° کے بناتی ہیں۔ اس طرح تھما ہوا ہے کہ حالت سکون میں سرا ا بہ نسبت ب کے اونچا ہے اگر ا ب افق سے زاویہ ۲۰° کا بنائے تو شہتیر کے مرکز ثقل کا فاصلہ ا سے دریافت کرو۔ اگر شہتیر کا وزن ۲۰ پونڈ ہو تو رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۲۶) ایک بلا وزن سلاخ ا ب کا طول ۲ فٹ ہے۔ اور اس کا سرا ا ایک ستون میں ایک چکنے جوڑ کے ذریعہ لگا دیا گیا ہے۔ اور اس حالت میں سلاخ متوازی الافق ہے۔ اگر نقطہ د پر (ا د = ۹ انچ) ایک وزن ۱۰ پونڈ ٹکا دیا جائے اور سلاخ کو ایک اور ہلکی بلا وزن سلاخ ج ب کے ذریعہ سہارا جائے جہاں کہ ج نقطہ ا کے عین نیچے واقع ہے اور ا ج = ۶ انچ تو سلاخ ج ب میں کا عمل معلوم کرو +

(۲۷) ایک یکساں شہتیر ا ب ایک نقطہ ج کے گرد حرکت کرسکتا ہے اور ایک ہلکی رسی ا د کے ذریعہ جو ایک طرف تو شہتیر کے سب سے اونچے نقطہ ا پر اور دوسری طرف سمت شاقولی میں نقطہ ج کے نیچے نقطہ د پر بندھی ہوئی ہے توازن میں ہے۔ اگر ا ب = ۳ فٹ ا ج = ۱ فٹ

ج د = ۲ فٹ اور د ا = ۲٫۷ فٹ اور شہتیر کا وزن = ۱۰ پونڈ تو رسی کا تناؤ اور نقطہ ج پر کا عمل دریافت کرو+

(۲۸) ایک بیرم خمیدہ کے دو اجزا ہیں ایک تو افقی سلاخ اب ہے جس کا ایک سرا ا ایک قائم ستون کے ساتھ ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کردیا گیا ہے اور دوسرا جزو ایک سلاخ د ج ہے جو کہ ایک طرف تو سلاخ اب کے نقطہ ج اور دوسری طرف نقطہ ا کے عموداً نیچے ایک نقطہ معینہ د پر قبضوں کے ذریعہ وصل کردیا گیا ہے اگر نقطہ ب پر ا ہنڈرڈویٹ وزن لٹکا دیا جائے تو ا اور ج پر کے عمل معلوم کرو۔یہ معلوم ہے کہ اب = ۶ فٹ اج = ۲ فٹ اور اد = ۳ فٹ۔ سلاخوں کے اوزان نظر انداز کرو+

(۲۹) ایک پتنگ کا وزن ۱۰ پونڈ ہے اور اس کی سطح افق سے زاویہ °۵۰ کا بناتی ہے ہوا کا مجموعی دباؤ پتنگ کے ایک ایسے نقطہ پر عمل کرتا ہے جو اس کے مرکز ثقل سے ۸ اِنچ اوپر واقع ہے نیز رسی اس نقطہ کے ۱۰ انچ اوپر باندھی گئی ہے۔رسی کا تناؤ اور ہوا کا دباؤ دریافت کرو+

باب ہشتم

ایک جسم پر ایک سطح میں عمل کرنے والی قوتوں کے توازن کی عام شرائط

(۸۰) مسئلہ۔ اگر ایک جسم استوار پر ایک سطح میں قوتوں کا کوئی نظام عمل کرے تو وہ ایک قوت واحد۔ یا ایک جفت میں تحویل ہوسکتا ہے +

کوئی سی دو قوتیں جن کی سمتیں ملتی ہیں مسئلہ متوازی الاضلاع کے ذریعہ ایک قوت میں تحویل ہوسکتی ہیں اور بموجب دفعہ (۵۲) دو متوازی قوتیں بھی ایک قوت میں تحویل ہوسکتی ہیں۔ بشرطیکہ وہ مساوی اور مخالف نہ ہوں +

اولاً نظام مفروض کی تمام متوازی قوتوں یا متوازی قوتوں کے مختلف مجموعوں کے حاصل دریافت کرو۔ جو نظام اس طرح حاصل ہو۔ اس کی کسی ایسی دو قوتوں کا حاصل ح، دریافت کرو جو کہ جفت نہیں ہیں اب اس نظام کی کسی تیسری موزوں قوت اور ح، کا حاصل ح، دریافت کرو

پھر کسی چوتھی موزوں قوت اور ح، کا حاصل ح، دریافت کرو۔ اور اسی طرح عمل جاری رکھو تب تک کہ تمام قوتیں ختم نہ ہوجائیں

آخر میں حاصل یا تو ایک قوت واحد ہوگا یا دو متوازی مساوی اور مخالف قوتیں ہونگی جو ایک جفت ہوگا +

(۸۱) مسئلہ۔ اگر قوتوں کا ایک نظام ایک جسم استوار پر ایک سطح میں عمل کرے۔ اور اگر اسی سطح میں تین نقطے ایسے ہوں۔جو ایک ہی خط مستقیم میں نہ ہوں اور ان کے گرد تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ فرداً فرداً صفر ہو۔ تو قوتوں کا نظام توازن میں ہوگا +

بموجب دفعہ سابقہ قوتوں کا کوئی نظام بعد تحویل یا تو ایک قوت واحد کے مساوی ہوگا۔ یا ایک جفت کے۔صورت ہذا میں قوتیں ایک جفت واحد میں تحویل نہیں ہوسکتیں۔کیونکہ اگر ہوسکیں تو ان کے معیاروں کا مجموعہ اس سطح میں کسی نقطہ کے گرد بموجب دفعہ ۶۹ ایک مقدار معین ہوگا۔ جو صفر نہیں ہوگی یہ ہمارے مفروض کے خلاف ہے۔ پس قوتوں کا نظام ایک جفت میں تحویل نہیں ہوسکتا۔ اس لئے قوتوں کا نظام یا تو توازن میں ہوگا یا ایک قوت واحد ط کے برابر ہوگا +

فرض کرو کہ تین نقاط جن کے گرد معیار لئے جاتے ہیں ا، ب، ج ہیں +

چونکہ دفعہ ۶۲ کے بموجب قوتوں کے کسی نظام کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ ان کے حاصل کے معیار کے برابر ہوتا ہے اس لئے ط کا معیار ا کے گرد صفر ہوگا +

پس یا تو ط صفر ہے یا ا میں سے گزرتی ہے +

اسی طرح چونکہ ط کا معیار ب کے گرد صفر ہے۔ اس لئے

یا تو ط صفر ہے یا ب میں سے گزرتی ہے یعنی یا تو ط صفر ہے۔ یا خط اب کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اب چونکہ نقطہ ج کے گرد معیار بھی صفر ہے اس لئے ط یا تو صفر ہے یا نقطہ ج میں سے گزرتی ہے +

لیکن چونکہ نقاط ا، ب، ج ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں۔ اس لئے یہ ممکن نہیں ہے کہ قوت ط خط اب میں بھی عمل کرے اور نقطہ ج میں سے بھی گزرے اسلئے صرف یہ ایک ہی صورتِ امکان باقی رہی۔ کہ قوت ط صفر ہے۔ یعنی یہ کہ قوتیں توازن میں ہیں پس مسئلہ ثابت ہوا +

قوتوں کا نظام اُس صورت میں بھی توازن میں ہوگا۔ جبکہ ذیل کی دو شرطیں پوری ہوں۔ اول۔ یہ کہ قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ دو نقطوں ا اور ب کے گرد علیحدہ علیحدہ صفر ہو۔ دوم۔ یہ کہ اب کی سمت میں قوتوں کے اجزاے تحلیلی کا مجموعہ صفر ہو +

کیونکہ اگر شرط اول پوری ہو۔ تو بموجب ثبوت بالا قوتوں کا حاصل یا تو صفر ہوگا یا سمت اب میں عمل کرے گا اور اگر شرط دوم بھی پوری ہو۔ تو سمت اب میں کوئی حاصل نہیں ہوسکتا۔ یعنی قوتوں کا حاصل صفر ہوگا۔ نیز جیسا کہ دفعہ سابقہ میں ثابت ہوا۔ قوتوں کا حاصل جفت نہیں ہوسکتا۔ پس نظام توازن میں ہوگا +

(۸۲) اگر ایک جسم استوار پر قوتوں کا ایک نظام ایک سطح میں

عمل کرے۔ اور دو خطوط کے متوازی ان کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ علٰحدہ علٰحدہ صفر ہو۔ اور ساتھ ہی کسی ایک نقطہ کے گرد ان کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ بھی صفر ہو تو نظام توازن میں ہوگا +

ثبوت۔ قوتوں کا کوئی سا نظام یا تو ایک قوت واحد میں یا ایک جفت میں تحویل ہوسکتا ہے +

اس صورت میں ایک قوت واحد میں ان کا تحویل ہونا ناممکن ہے۔ کیونکہ دو خطوط کے متوازی ان قوتوں کے اجزائے تحلیل کے مجموعے علٰحدہ علٰحدہ صفر ہیں۔ اس لئے ان کے حاصل کے اجزائے تحلیلی بھی ان دو خطوط کے متوازی صفر ہوں گے۔ پس حاصل صفر ہوگا +

اس نظام کی قوتوں کا ایک جفت میں تحویل ہونا بھی ناممکن ہے۔ کیونکہ اگر ایسا ہوگا۔ تو اس جفت کا معیار اس کی سطح کے کسی نقطہ کے گرد ایک مقدار معین ہوگا۔ جو صفر نہیں ہے۔ یہ ہمارے مفروض کے خلاف ہے لہذا قوتوں کا نظام توازن میں ہوگا +

(۸۳) یہ واضح رہے کہ مسئلہ بالا کے دعوی میں اس امر کا ذکر نہیں ہے کہ کونسی خاص سمتوں میں قوتوں کی تحلیل کی جاے عملاً دو ایسی سمتوں میں تحلیل کرنا مناسب ہوگا۔ جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہوں۔ پس ایک جسم استوار پر ایک سطح میں عمل کرنیوالی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی شرائط حسب ذیل ہیں +

اول۔ کسی خاص سمت میں تمام قوتوں کے اجزائے تحلیلی کے

مجموعہ جبریہ کو صفر کے برابر لکھو +

دوم۔ اس سمت کی سمت عمودی میں تمام قوتوں کے اجزائے تحلیلی کے مجموعہ جبریہ کو صفر کے برابر لکھو +

سوم۔ قوتوں کی سطح میں کسی نقطہ کے گرد تمام قوتوں کے میعاروں کا مجموعہ جبریہ صفر کے برابر لکھو +

شرائط اول و دوم سے یقینی طور پر ظاہر ہے کہ جسم بالتمام حرکت نہیں کرسکتا۔ تیسری شرط سے یہ واضح ہے کہ جسم کسی نقطہ کے گرد گھوم نہیں سکتا +

ایک جسم پر ایک سطح میں عمل کرنیوالی قوتوں کے نظام کا توازن مندرجہ بالا تین سکونی تعلقات کے ذریعہ معلوم ہوسکتا ہے اور سوالات حل کرنے میں نظام کے مختلف اجزا کے تعلقات ہندسیہ کی امداد لی جاسکتی ہے +

کسی خاص صورت میں توازن کی مندرجہ بالا شرائط کا استعمال بہت آسان ہوگا۔ اگر تحلیل کرنے کی سمتوں کا مناسب انتخاب کیا جائے۔ عام طور پر سمت افق اور سمت راس نہایت موزوں ہونگی +

جس نقطہ کے گرد میعار لئے جائیں اس کا مناسب انتخاب بھی ضروری ہے۔ ایسا نقطہ لینا چاہئے کہ میعاروں کی مساوات میں حتی الامکان کم قوتیں داخل ہوں +

(۱۴۸) ہم نے یہ ثابت کیا ہے کہ دفعہ بالا کی شرائط قوتوں کے کسی نظام کے توازن کے واسطے کافی ہیں۔ لیکن یہ

شرائط لازمی بھی ہیں +
فرض کرو کہ ہم کو یہ معلوم ہو کہ صرف پہلی دو شرائط پوری ہوتی ہیں۔ اس حالت میں یہ ممکن ہے کہ قوتوں کا نظام ایک جفت میں تحویل ہوسکے۔ کیونکہ جفت کی قوتیں مساوی اور مخالف ہوتی ہیں اس لئے ان کے اجزاء تحلیلی کا مجموعہ جبریہ خواہ کسی سمت میں لیں صفر ہوگا۔ اس لئے اگر کسی تیسری سمت میں تحلیل کیا جائے۔ تو کوئی زائد شرط حاصل نہیں ہوسکتی اس لئے اس صورت میں توازن ناممکن ہے۔ جب تک کہ تیسری شرط پوری نہ ہو +
اب یہ فرض کرو کہ ایک سمت معینہ میں اجزاء تحلیلی کا مجموعہ جبریہ صفر ہے۔ اور ایک نقطہ معینہ کے گرد معیاروں کا مجموعہ جبریہ بھی صفر ہے۔ اس صورت میں یہ ممکن ہے۔ کہ قوتوں کا نظام ایک ایسی قوت واحد میں تحویل ہوسکے۔ جو سمت معینہ پر عمود ہو۔ اور نقطہ معینہ میں سے گزرے۔ اس سے ثابت ہے کہ اجزائے تحلیلی کا مجموعہ جبریہ ایک اور سمت میں صفر ہونا بھی ضروری ہے
(۸۵) اب ہم توازن کی عام شرائط کی چند مثالیں دیں گے۔ علم سکون کے سوالات حل کرنے میں طالب علم کو ہدایات ذیل پر عمل کرنا چاہیئے +
(۱) شرائط مفروضہ کے بموجب شکل بناؤ +
(۲) جسم یا اجسام پر عمل کرنیوالی تمام قوتوں کو نشانات سے ظاہر کرو اس امر کی احتیاط کرو کہ جس مقام پر ایک جسم

دوسرے پر دباؤ ڈالے۔ وہاں ایک نا معلوم تعامل فرض کرنا ضروری ہے جو بعد میں معلوم ہوگا۔ اگر کوئی سہار نیوالی رسی ہو تو اس میں تناؤ کا نشان دو۔ اور جہاں ایک جسم دوسرے جسم کے ساتھ یا کسی مقام معین پر بذریعہ قبضہ پیوستہ ہو وہاں بھی ایک تعامل مان لو +

(۳) ہر ایک جسم یا اجسام کے نظام پر جو قوتیں عمل کرتی ہوں ان کو علحدہ علحدہ دو مناسب سمتوں میں تحلیل کرکے صفر کے مساوی لکھو۔ عام طور پر سمت افقی اور سمت راس موزوں ہوگی +

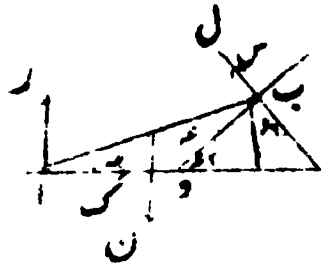
(۴) ایک مناسب نقطہ کے گرد معیاروں کے مجموعہ کو صفر کے مساوی لکھو +

(۵) شکل میں مختلف خطوط اور زوایا کے درمیان جو ہندسی تعلقات ہوں وہ بھی لکھو +

مثال (۱) ایک یکساں وزنی شہتیر کا ایک سرا ایک سطح افقی پر ہے اور دوسرا ایک سطح مائل پر ہے۔ اور یہ شہتیر اس طرح ساکن ہے۔ کہ ایک رسی اس کے اُس سرے کو بندھی ہے۔ جو سطح افقی پر ہے۔ اور رسی کا دوسرا سرا دونوں سطحوں کے خط تقاطع سے بندھا ہے۔ اگر شہتیر سطح افقی سے زاویہ عہ بنائے اور سطح مائل سطح افقی سے زاویہ ۲عہ بنائے۔ تو رسی کا تناؤ اور سطحوں کے عمل دریافت کرو +

فرض کرو کہ اب شہتیر ہے اور او سطح افقی ہے اور وب سطح مائل ہے

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



فرض کرو کہ رسی او کا تناؤ ک ہے اور شہتیر کا وزن ن ہے
اور ا اور ب پر کے عمل ر اور س ہیں ر سمت راس میں
ہے اور س، و ب پر عمود ہے +
افق اور راس کی سمتوں میں تحلیل کرنے سے ؛

ک = س جیب ۲ عہ ....(۱)

ن = ر + س جم ۲ عہ ....(۲)

نیز ا کے گرد معیار لینے سے۔

ن × لا جم عہ = س × ا ب جیب ا ب ل = س × ۲ لا جم عہ .... (۳)

جہاں ۲ لا شہتیر کی لمبائی ہے۔

ان تینوں مساداتوں سے تمام امور متعلقہ توازن معلوم ہوتے ہیں۔

(۳) سے س = ½ ن

∴ (۲) سے ر = ن - ½ ن جم ۲ عہ = ن (۱ - ½ جم ۲ عہ)

نیز (۱) سے ک = ن/۲ جیب ۲ عہ

پس رسی کا تناؤ اور عمل معلوم ہو گئے +
فرض کرو۔ کہ افق سے شہتیر کا میلان معلوم ہونے کی بجائے رسی کا طول ط معلوم ہے۔ مان لو کہ شہتیر کا میلان افق سے تہ ہے +

مساوات (۱) و (۲) میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی +
لیکن معیاروں کی مساوات یہ ہوگی +

ن × لا جم تہ = س × اب × جم ا ب ل = س × ۲ لا جم ا ب و
= س × ۲ لا جم (۲ عہ - تہ) .... (۴)

تہ معلوم کرنے کے لئے مساوات ہندسیہ کی ضرورت ہوگی۔ اور وہ یہ ہے +

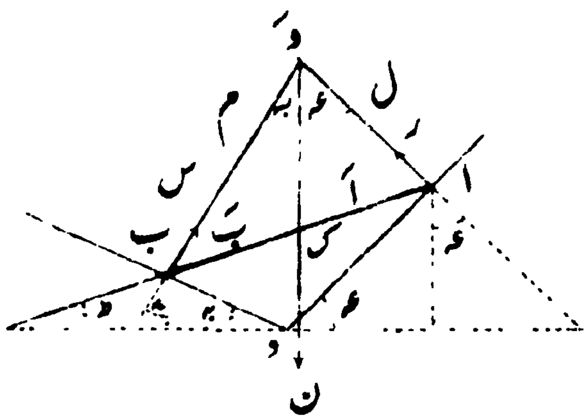
ط / لا ۲ = و ا / اب = جب اب و / جب ا و ب = جب (۲ عہ - تہ) / جب ۲ عہ ..... (۵)

اس آخری مساوات سے تہ معلوم ہوگا اور پھر مساوات (۱)، (۲)، (۴) سے ک، ر، س معلوم ہوں گے +

یہ سوال شہتیر کی سمت اور شہتیر کی عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے بھی حل ہو سکتا تھا۔ لیکن ہر مساوات میں ک، ر، س، ن سب داخل ہوتے۔ اور اوپر کی مساواتوں سے یہ مساواتیں زیادہ پیچیدہ ہوتیں۔ ا کے گرد معیار لینا بھی مناسب تھا۔ کیونکہ شکل میں صرف یہی ایک ایسا موزوں نقطہ ہے۔ جس میں سے جسم پر عمل کرنیوالی دو قوتیں گزرتی ہیں +

مثال (۲) ایک شہتیر کا مرکز ثقل اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کا طول آ اور بؔ ہے۔ شہتیر دو چکنی سطحوں پر

حالت سکون میں پڑا ہے۔ افق سے سطحوں کے میلان بالترتیب
عہ اور بہ ہیں اور سطحوں کا خط تقاطع افقی ہے۔ سطحوں کے
عمل اور افق سے شہتیر کا میلان دریافت کرو +
فرض کرو کہ سطحیں ا و اور ب و ہیں اور شہتیر ا ب ہے۔
جس کا مرکز ثقل ک ہے۔ پس ک ا اور ک ب بالترتیب
اَ اور بَ ہوے۔ فرض کرو کہ ا اور ب پر کے عمل ر
اور س ہیں۔ یہ سطحوں پر عمود ہوں گے اب فرض کرو کہ
شہتیر کا میلان افق سے طہ ہے +



افق اور راس کی سمتوں میں تحلیل کرنے سے
ر جم عہ + س جم بہ = ن ....(۱)
ر جب عہ = س جب بہ ....(۲)
نیز ک کے گرد معیار لینے سے
ر × ک ا × جیب ک ا ل = س × ک ب × جیب ک ب م

لیکن ک ال = ۹۰° - ب ا و = ۹۰° - (عہ - طہ)

اور ک ب م = ۹۰° - ا ب و = ۹۰° - (بہ + طہ)

پس معیاروں کی مساوات کی یہ صورت ہوگئی۔

ر + اَ × جم (عہ - طہ) = س × بَ × جم (بہ + طہ) ....(۳)

مساوات (۲) سے

ر / جب بہ = س / جب عہ = (ر جم عہ + س جم بہ) / (جب بہ جم عہ + جب عہ جم بہ) = ن / جب (عہ + بہ) بموجب (۱)

ان مساواتوں سے ر اور س معلوم ہوں گے۔ پھر ر اور س کی قیمتیں (۳) میں رکھنے سے۔

ا × جب بہ جم (عہ - طہ) = بَ × جب عہ جم (بہ + طہ)

∴ اَ × جب بہ × (جم عہ جم طہ + جب عہ جب طہ)

= بَ × جب عہ × (جم بہ جم طہ - جب بہ جب طہ)

∴ (اَ + بَ) جب عہ جب بہ جب طہ

= جم طہ (بَ × جب عہ جم بہ - اَ × جم عہ جب بہ)

∴ (اَ + بَ) مس طہ = بَ مم بہ - اَ مم عہ ...... (۴)

اس سے طہ معلوم ہوا۔

یا بطرز دیگر۔ چونکہ صرف تین قوتیں جسم پر عمل کرتی ہیں اس لئے یہ سوال باب ہفتم کے طریقہ سے بھی حل ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ضروری ہے کہ تینوں قوتیں ر، س، ن ایک نقطہ وَ پر ملیں اس لئے بموجب دفعہ ۹ ط

(اَ + بَ) مم وَ ک ا = بَ مم بہ - اَ مم عہ

یعنی (اَ + بَ) مس طہ = بَ مم بہ - اَ مم عہ

ج مساوات (۴) سے

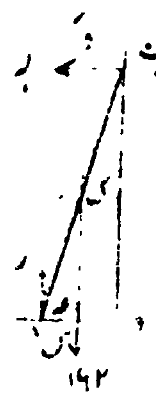
نیز بذریعہ مثلث لامی (دفعہ ۳۰)

$$\frac{ر}{جب\ ب\ و\ ک} = \frac{س}{جب\ ا\ و\ ک} = \frac{ن}{جب\ ا\ و\ ب}$$

یعنی

$$\frac{ر}{جب\ ہ} = \frac{س}{جب\ ع} = \frac{ن}{جب\ (ع + ہ)}$$

مثال (۳) ایک زینہ ۲۵ فٹ لمبا اور ۱۹۲ پونڈ وزنی اس طرح قائم ہے کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر ہے اور دوسرا سرا زمین پر دیوار سے ۷ فٹ کے فاصلہ پر ہے زینے کے نچلے سرے کے متصل ایک کھونٹی زمین میں گڑی ہے جو زینہ کو پھسلنے سے روکتی ہے۔ کھونٹی اور زمین اور دیوار کے عمل دریافت کرو +



فرض کرو کہ زینہ ا ب ہے اور ک اس کا مرکز ہے۔ فرض کرو کہ ر زمین کا عمل ہے اور ہ دیوار کا اور س کھونٹی کا افقی عمل ہے اور زاویہ ک ا و کا نام ع رکھو

تب جم ع = $\frac{ا\ و}{ا\ ب} = \frac{۷}{۲۵}$

اس لئے جب ع = $\sqrt{۱ - \frac{۴۹}{۶۲۵}} = \sqrt{\frac{۵۷۶}{۶۲۵}} = \frac{۲۴}{۲۵}$

اب زینہ پر عمل کرنیوالی قوتوں کے افقی اور عمودی اجزا کو علحدہ علحدہ صفر کے مساوی لکھنے سے

$$ر - ۱۹۲ = ۰$$

$$ہ - س = ۰$$

اور ا کے گرد معیار لینے سے

۱۹۲ × اک جم ع = ر۱ × اب جب ع

∴ ر۱ = ۱۹۲ × ۱/۲ مم ع = ۹۶ × ۷/۲۴ = ۲۸

پس (۱) و (۲) کے ذریعہ ر = ۱۹۲ اور س = ۲۸

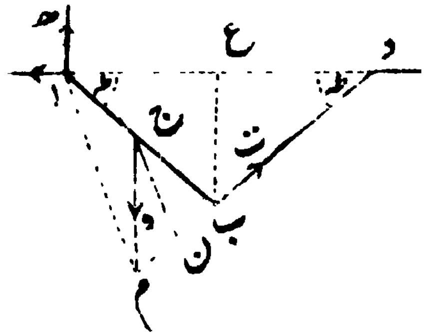
پس مطلوبہ عمل ۲۸، ۱۹۲، ۲۸ پونڈ وزن کے برابر ہیں +

باب ہفتم کے ذریعہ ظاہر ہے کہ ر اور س کا حاصل وَ میں سے گزریگا جو وزن اور ر۱ کے خطوط عمل کا نقطہ تقاطع ہے +

مثال (۴) ایک یکساں سلاخ کے ایک سرے پر قبضہ لگا ہوا ہے اور دوسرے سرے کو ایک رسی سہارے ہوئے ہے۔ سلاخ اور رسی کا میلان افق سے مساوی ہے اور زاویہ طہ کے برابر ہے۔ اگر سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ قبضہ پر کا عمل و/۴ √(۸ + قم ۲ طہ) ہوگا +

فرض کرو کہ سلاخ اب ہے۔ اور ج اس کا نقطہ وسط ہے اور ب و رسی ہے جو ا میں سے گزرنیوالے خط افقی ا د کو د پر ملتی ہے +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت ہے +
قبضہ کا عمل مقدار اور سمت دونوں میں نا معلوم ہے۔
فرض کرو۔ کہ اس عمل کے افقی اور عمودی اجزا لا اور
ھ ہیں۔ جیسا کہ شکل میں نشان دیا گیا ہے۔ ا د پر ب ع
عمود نکالو +

تو ا د = ۲ ا ع = ۲ ا ب جم ط

افقی اور عمودی تحلیل سے

لا = ت جم ط .. .. (۱)

ھ + ت جب ط = و .... (۲)

ا کے گرد معیار لینے سے

و × ا ج × جم ط = ت × ا د × جب ط = ت × ۲ ا ب × جم ط جب ط (۳)

(۳) سے ت = و (ا ج ⁄ ۲ ا ب جب ط) = (و ⁄ ۴ جب ط)

اس لئے بذریعہ (۱) و (۴)

لا = و/۴ م ط اور ھ = و - و/۴ = ۳/۴ و

اس لئے قبضہ پر کا عمل = √(لا² + ھ²)

= و/۴ √(۹ + م² ط)

= و/۴ √(۸ + قم² ط)

اگر د ب، و کی سمت کو م پر ملے تو بموجب باب ہفتم قبضہ پر کے عمل کی سمت ا م ہوگی۔ پس اگر ج ن، ا م کے متوازی ہو تو ج م ن قوتوں کا مثلث ہے +

مثال (۵) ایک یکساں وزنی سلاخ اپنے ایک ثابت سرے کے گرد آزادانہ حرکت کرسکتی ہے، اور اس سرے کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے۔ جو ایک کرہ کو سہارے ہوئے ہے۔ کرہ کا نصف قطر ا ہے۔ اگر سلاخ کا طول ۴ ا ہو۔ اور رسی کا طول ا ہو اور کرہ اور سلاخ کا وزن علٰحدہ علٰحدہ و ہو۔ تو سلاخ اور رسی کا میلان سمت راس سے معلوم کرو۔ اور رسی کا تناؤ بھی معلوم کرو +

فرض کرو کہ س ل سلاخ ہے اور س ج رسی ہے اور ب کرہ کا مرکز ہے اور د وہ نقطہ ہے جہاں سلاخ اور کرہ مس کرتے ہیں +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



کرہ اور سلاخ کے درمیان نقطہ د پر ایک تعامل رہے جو س و پر عمود ہے اور دونوں جسموں پر متقابل سمتوں میں عمل کرتا ہے +

جو قوتیں کہ صرف کرہ پر عمل کرتی ہے۔ توازن میں ہیں اور سلاخ پر عمل کرنے والی قوتیں بھی متوازن ہیں۔چونکہ کرہ پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اس لئے وہ ایک نقطہ پر ملیں گی اور وہ نقطہ کرہ کا مرکز ہے۔ لہذا س ج ب خط مستقیم ہوگا +

فرض کرو کہ سمت عمودی سے سلاخ اور رسی کا میلان بالترتیب طہ اور فہ ہے +

تو جب (طہ + فہ) = $\frac{د ب}{س ب}$ = $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ = $\frac{۱}{۲}$

یعنی طہ + فہ = ۳۰° ....(۱)

سلاخ پر عمل کرنیوالی قوتیں تین ہیں یعنی نقطہ د پر کا عمل اور سلاخ کا وزن اور قبضہ س کا عمل۔ اگر ہم نقطہ س کے گرد معیار لیں تو قبضہ کے عمل سے بچ سکتے ہیں۔ معیاروں کی مساوات یہ ہے

$$\text{و} \times ۲\text{ا} \times \text{جب ط} = \text{ر} \times \text{س د} = \text{ر} \times ۲\text{ا} \times \text{جم } ۳۰^\circ \quad \ldots (۲)$$

اب کرہ کی شرائط توازن سے

$$\frac{\text{ت}}{\text{جب }(\text{فہ} + ۶۰^\circ)} = \frac{\text{ر}}{\text{جب فہ}} = \frac{\text{و}}{\text{جب } ۶۰^\circ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے (۲) و (۳) سے

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جم } ۳۰^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{و}} = \frac{\text{جب فہ}}{\text{جب } ۶۰^\circ}$$

$$\therefore \text{فہ} = \text{ط}$$

اب بذریعہ (۱)

$$\text{ط} = \text{فہ} = ۱۵^\circ$$

ان قیمتوں کو (۳) میں رکھنے سے

$$\text{ت} = \text{و} \frac{\text{جب } ۷۵^\circ}{\text{جب } ۶۰^\circ} = \text{و} \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۶}} = \frac{\text{و}}{۶}(۳\sqrt{۲} + \sqrt{۶}) = ۱٫۱۱۵۴ \times \text{و}$$

$$\text{اور ر} = \text{و} \frac{\text{جب } ۱۵^\circ}{\text{جب } ۶۰^\circ} = \text{و} \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۶}} = \frac{\text{و}}{۶}(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶}) = ۰٫۲۹۸۸ \times \text{و}$$

امثلہ نمبری (۱۲)

(۱) ایک یکساں شہتیر اب جس کا وزن و ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا سرا ا ایک چکنی افقی سطح ا ج پر دھرا ہوا ہے اور دوسرا سرا ب ایک سطح ج ب پر ہے جو پہلی سطح سے ۶۰° کا زوایہ بناتی ہے۔ اگر ایک رسی ج ا جو طول میں

ج ب کے برابر ہے مانع حرکت ہو تو اس کا تناؤ دریافت کرو۔

(۲) ایک زینہ جس کا وزن و ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور دوسرا سرا ایک چکنے فرش پر دھرا ہے۔ اگر زینہ کا میلان افق سے °۶۰ ہو۔ بذریعہ حساب و ترسیم دریافت کرو۔ کہ زینہ کے نچلے سرے پر کتنی افقی قوت لگائی جائے کہ اسے پھسلنے نہ دے؟

(۳) ایک شہتیر وزنی و کا مرکز ثقل ث اس کو دو حصوں اث اور ب ث میں تقسیم کرتا ہے جن کے طول بالترتیب اَ اور بَ ہیں۔ شہتیر ایک سطح عمودی میں ایک چکنے فرش اد پر ایک چکنی عمودی دیوار د ب کے ساتھ ٹکا ہوا ہے ایک رسی ایک طرف تو ایک کانٹے سے بندھی ہے اور دوسری طرف شہتیر کے ایک نقطہ س سے بندھی ہے۔ اگر رسی کا تناؤ ت ہو اور شہتیر اور رسی کے میلان افق سے ط اور فہ ہوں تو ثابت کرو

کہ $$\text{ت} = \text{و} \times \frac{\text{اَ جم ط}}{(\text{اَ} + \text{بَ})\ \text{جب}\ (\text{ط} - \text{فہ})}$$

(۴) ایک زینے کا میلان افق سے ع ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنے فرش پر ہے اور دوسرا سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر ہے۔ اور نچلا سرا ایک رسی کے ذریعہ فرش اور دیوار کے خط تقاطع کے ایک نقطے سے بندھا ہے تو رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ رسی کا تناؤ اس حالت میں بھی

دریافت کرو جبکہ ایک آدمی جس کا وزن زینہ سے نصف ہے زینہ کی دو تہائی چڑھا ہوا ہو +

(۵) ایک یکساں شہتیر وزنی و کا ایک سرا ایک چکنی افقی سطح پر رکھا ہے اور دوسرا سرا جس سے ایک رسی بندھی ہے ایک اور چکنی سطح پر ہے۔ جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اور رسی سطح مائل کی چوٹی پر ایک چرخی پر سے گزرکر سمت شاقولی میں لٹکتی ہے۔ اور ایک وزن ن کے ساتھ بندھی ہے تو ثابت کرو کہ شہتیر ہر حالت میں ساکن رہیگا اگر ۲ ن = و × جب عہ +

(۶) ایک وزنی یکساں شہتیر کے سرے دو چکنی مائل سطحوں پر رکھے ہیں۔ جن کا خط تقاطع افقی ہے اور جن کے میلان افق سے عہ اور بہ ہیں۔ حالت سکون میں شہتیر کا میلان افق سے دریافت کرو اور سطحوں کے عمل بھی معلوم کرو +

(۷) ایک یکساں شہتیر کا ایک چکنا سرا زمین اور ایک عمودی دیوار کے مقام وصل پر رکھا ہے اور دوسرے سرے سے ایک رسی بندھی ہے جو دوسری طرف دیوار میں ایک حلقے سے بندھی ہے رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ اور ثابت کرو کہ اگر رسی کا طول اس قدر ہو جس قدر کہ زمین سے حلقہ کی بلندی ہے تو رسی کا تناؤ شہتیر کے وزن سے نصف ہوگا +

(۸) ایک یکساں سلاخ ب ج وزنی ۲ پونڈ ب کے گرد آزادانہ حرکت کرسکتی ہے اور ایک رسی ا ج ۸ انچ لمبی

اس کو سہارے ہوئے ہے رسی نقطہ ا سے بندھی ہے اور خط ا ب افقی ہے اور طول میں ۱۰ انچ ہے۔ اگر سلاخ کا طول ۶ انچ ہو تو رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ بذریعہ شکل اور پیمائش اس کی تصدیق کرو +

(۹) ایک یکساں سلاخ کے اوپر کے سرے پر قبضہ لگا ہوا ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک رسی کے ذریعہ ایک نقطہ معینہ سے بندھا ہے۔ قبضہ اور نقطہ معینہ ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں اور رسی کا طول قبضہ اور نقطہ معینہ کے فاصلہ کے برابر ہے۔ اگر رسی کا تناؤ سلاخ کے وزن و کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ افق سے سلاخ کا میلان مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ ہے اور قبضہ کا عمل ایک قوت $\frac{و}{۵}\sqrt{۱۰}$ کے برابر ہے جو افق سے زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ بناتی ہے +

(۱۰) ایک سلاخ کے ایک سرے پر قبضہ اس طرح لگا ہوا ہے کہ وہ ایک سطح عمودی میں حرکت کرسکتی ہے اور دوسرے سرے پر ایک وزن بندھا ہے۔ جو سلاخ کے وزن سے نصف ہے۔ اور یہ سرا ایک رسی کے ذریعہ جس کا طول ل ہے ایک نقطہ سے بندھا ہے۔ جو قبضہ کے اوپر کی جانب سمت راس میں بلندی ج پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ $\frac{ل و}{ج}$ ہے جہاں و سلاخ کا وزن ہے +

(۱۱) ا ب ایک یکساں سلاخ ہے جس کا طول ۸ اَ ہے اور وہ سرے ا کے گرد آزادانہ حرکت کرسکتی ہے سرا ا

ثابت ہے۔ ج ایک چکنا حلقہ ہے جس کا وزن سلاخ سے دوگنا ہے۔ اور وہ سلاخ پر چڑھا ہوا ہے اور اِدھر اُدھر سلاخ پر حرکت کرسکتا ہے۔ اور یہ حلقہ ایک رسی ج د کے ذریعہ ایک نقطہ د سے بندھا ہے۔ د اور ا ایک ہی افقی سطح میں واقع ہیں۔ اگر ا د اور ج د میں سے ہر ایک کا طول اَ ہو تو حلقہ کا مقام اور رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ جبکہ یہ نظام توازن میں ہو۔ اور یہ بھی ثابت کرو کہ نقطہ ا پر کا عمل سلاخ پر ایک افقی قوت √۳ و کے برابر ہے جہاں و سلاخ کا وزن ہے +

(۱۲) ایک بے وزن استوار تار قوس دائرہ کی شکل کا ہے اور اس کے محاذی مرکز پر زاویہ عہ بنتا ہے اور دو وزن ف اور ق اس کے سروں پر ہیں اور وہ ایک سطح افقی پر اس طرح ساکن ہے۔ کہ اس کا حدبہ نیچے کو ہے۔ اگر ف سے ملنے والے نصف قطر کا میلان سمت راس سے طہ ہو تو ثابت کرو کہ مس طہ = (ق جب عہ) / (ف + ق جم عہ)

(۱۳) ایک چکنا نصف کروی پیالہ جس کا قطرا ہے اسطرح رکھا گیا ہے۔ کہ اس کا کنارہ ایک چکنی عمودی دیوار کو مس کرتا ہے۔ اور ایک وزنی یکساں سلاخ افق سے ۴۰° کا زاویہ بناتی ہوئی اس طرح متوازن ہے۔ کہ اس کا ایک سرا پیالہ کی اندرونی سطح پر ہے۔ اور دوسرا سرا دیوار کے ساتھ ٹکا ہوا ہے۔ تو ثابت کرو کہ سلاخ کا طول

۱ + ۱/۱۴ت ہونا چاہیئے +

(۱۴) ایک اسطوانی شکل کا برتن جس کی بلندی ۴ انچ ہے اور قطر ۳ انچ ہے۔ ایک افقی سطح پر دھرا ہے اور ایک چکنی یکساں سلاخ ۹ انچ لمبی اس کے اندر رکھکر کنارے کے ساتھ ٹکادی گئی ہے۔ اگر سلاخ کا وزن ۶ اونس ہو تو برتن اور سلاخ کے تعامل دریافت کرو +

(۱۵) ایک باریک حلقہ جس کا نصف قطر ل اور وزن و ہے ایک اسطوانہ (نصف قطر = ر) پر چڑھادیا گیا ہے اور اسطوانہ میں ایک افقی کیل جڑی ہوی ہے۔ جو حلقہ کو گرنے نہیں دیتی۔ حلقہ اور اسطوانہ کے درمیان افقی تعامل دریافت کرو +

(۱۶) ایک گاڑی کے پہئے کا وزن و اور نصف قطر ر ہے اس کے آگے ایک پتھر ہے جس کی بلندی ب ہے۔ پہئے کو ایک افقی قوت ق مرکز پر لگاکر اس پتھر پر سے لیجانا مقصود ہے۔ تو ثابت کرو کہ ق مقدار میں و × $\frac{\sqrt{۲ر ب - ب^۲}}{ر - ب}$ سے ذرا زیادہ ہونی چاہیئے +

(۱۷) ایک یکساں شہتیر جس کا طول ۲ ا ہے۔ اس طرح متوازن ہے۔ کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار کے ساتھ ٹکا ہوا ہے۔ اور اس کے طول کا ایک نقطہ ایک چکنی افقی سلاخ پر دھرا ہے۔ سلاخ دیوار کے متوازی ہے اور دیوار سے اس کا فاصلہ ب ہے۔ تو ثابت کرو کہ سمت راس سے شہتیر کا میلان جب$^{-۱}$ $\left(\frac{ب}{ا}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ ہے +

(۱۸) ایک ہلکا اور باریک ڈورا ایک گول تختی ب ج د کو اس طرح سہارے ہوے ہے۔ کہ ڈورا قوس ب ج د پر گزرتا ہے اور ڈورے کے سرے ایک عمودی دیوار کے نقطہ ا پر باندھے گئے ہیں اور ڈورے کا حصہ ا د دیوار سے مس کرتا ہے اور تختی کی سطح دیوار پر عمود ہے اگر تختی کا وزن و اور نصف قطر ن ہو اور ڈورے کا وہ حصہ جو تختی سے الگ ہے ۲ ب$_1$ ہو۔ تو ثابت کرو کہ ڈورے کا تناؤ $\frac{\text{و}}{2} \times \frac{\text{ن}^2 + \text{ب}_1^2}{\text{ب}_1^2}$ ہے اور د پر کا عمل دریافت کرو +

(۱۹) دو مساوی وزنی یکساں سیدھی سلاخوں کا ایک ایک سرا رسی کے ذریعہ باندھ دیا گیا ہے اور ایک سلاخ کو ایک کھونٹی پر اور دوسری سلاخ کو ایک دوسری کھونٹی پر رکھدیا گیا ہے۔ کھونٹیاں ایک ہی خط افقی میں واقع ہیں۔ اگر کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ہر ایک سلاخ کے طول کے مساوی ہو اور رسی کا طول سلاخ سے نصف ہو۔ تو ثابت کرو کہ سلاخوں کا میلان افق سے طہ ہوگا جہاں ۲جم^{3}طہ = ا

(۲۰) ایک یکساں سلاخ وزنی و کو دو باریک ڈورے سہارے ہوے ہیں اور وہ اس کے سروں سے بندھے ہیں۔ ڈورے چکنی ثابت چرخیوں پر سے گزرتے ہیں اور انکے دوسرے سروں سے وزن و$_1$ اور و$_2$ بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا میلان افق سے جب$^{-1}$ $\frac{\text{و}_1^2 - \text{و}_2^2}{\text{و}\sqrt{2(\text{و}_1^2 + \text{و}_2^2) - \text{و}^2}}$ ہے +

(۲۱) ایک رسی کا طول ۲ ل ہے اور اس کے سرے ایک یکساں سلاخ وزنی و کے سروں سے بندھے ہیں رسی ایک چکنی کھونٹی پر سے گزر کر سلاخ کو توازن میں سہارے ہوے ہے۔ اگر ایک وزن وَ سلاخ کے ایک سرے پر باندھ دیا جائے۔ تو ثابت کرو کہ اگر رسی کو بقدر $\frac{ل وَ}{و + وَ}$ کھونٹی پر سے پھسلا دیں تو ایک اور حالت توازن پیدا ہوگی +

(۲۲) اب ایک سیدھی سلاخ کا طول ۲ط اور وزن ل و ہے اس کا نچلا سرا ایک عمودی دیوار اج کے پایہ کے ساتھ زمین پر ہے۔ ب اور ج، ا سے ایک ہی عمودی بلندی ۲ ی پر واقع ہیں ایک رسی جس کا طول ۲ لا ہے ب اور ج سے بندھی ہے اس رسی پر ایک حلقہ وزنی و آزادانہ حرکت کرسکتا ہے اگر اس نظام کی حالت توازن میں حلقہ رسی کے نقطہ وسط پر ہو۔ تو ثابت کرو کہ

$$لا^2 = ط^2 - ی^2 \times \frac{ل(ل+2)}{2(ل+1)}$$

(۲۳) ایک مربع تختہ ا ب ج د کا ضلع ب ہے۔ دو رسیوں کے حلقے و ا ج و اور و ب د و تختہ کے نیچے سے قطراً گزار کر ایک کانٹے و سے لٹکائے گئے ہیں۔ اگر و کی بلندی تختہ سے ب ہو۔ تو رسیوں کے تناؤ دریافت کرو +

(۲۴) ایک پھاٹک وزنی ۱۰۰ پونڈ کو دو قبضے ایک دوسرے سے تین فٹ کے فاصلہ پر ایک عمودی خط میں لگے ہوئے

ہیں۔ یہ عمودی خط پھاٹک کے مرکز ثقل سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ یہ فرض کرکے کہ پھاٹک کا تمام وزن نچلے قبضہ پر پڑتا ہے۔ قبضوں کے عمل دریافت کرو+

(۲۵) ایک تین سلاخوں کا مثلث حالت افقی میں نصب کیا گیا ہے اور اس پر ایک یکذات کرہ رکھا گیا ہے۔ تو ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ کا عمل اس کے طول کے تناسب ہے+

(۲۶) ایک ہلکا مثلثی ڈھانچہ ا ب ج ایک سطح عمودی میں دو سہاروں ا اور ب پر کھڑا ہے۔ ج اوپر کی طرف ہے۔ ا اور ب ایک خط افقی میں ہیں۔ ج سے ایک وزن ۱۸ پونڈ آویزاں ہے اگر ا ب = ا ج = ۱۸ فٹ اور ب ج = ۵ فٹ تو سہاروں کے عمل دریافت کرو+

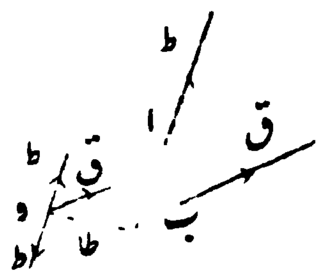
(۲۷) ایک مثلثی ڈھانچے کے اضلاع طول میں ۱۳، ۲۰، ۲۱ انچ ہیں۔ اور سب سے لمبا ضلع ایک چکنی افقی میز پر رکھا ہے۔ اور ایک ۶۳ پونڈ کا وزن مقابل کے زاویہ سے معلق ہے۔ میز پر کے ضلع کا تناؤ دریافت کرو۔ شکل اور پیمایش سے تصدیق کرو+

(۲۸) ایک مجوف کرہ سے جس کا نصف قطر ا ہے ایک ایسا پیالہ بنایا گیا ہے کہ پیالے کے کنارے تک جو نصف قطر کھینچا جائے۔ وہ سمت راس سے زاویہ ع بناتا ہے پیالے کے ایک نقطہ ب تک جو نصف قطر کھینچا جاتا ہے۔ وہ سمت راس سے زاویہ بہ بناتا ہے اگر ایک چکنی یکساں

سلاخ اس طرح ساکن رہے کہ اس کا ایک سرا ب پر ہو اور اس کے طول کا ایک نقطہ پیالے کے کنارے پر ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا طول ہم ا جب ہ قط $\frac{ع - ت}{۲}$ ہے +

(۸۶) دفعات ذیل میں دفعہ ۸۴ کی شرائط توازن کسی قدر مختلف طریقہ سے معلوم کی جائینگی +

(۸۷) اگر ایک جسم استوار پر ایک سطح میں قوتوں کا کوئی نظام عمل کرے۔ تو وہ ایک جفت اور ایک قوت کے مساوی ہوگا۔ قوت کا نقطہ عمل جہاں چاہیں ہوسکتا ہے +
فرض کرو کہ نظام کی ایک قوت ط ہے جو جسم کے نقطہ ا پر عمل کرتی ہے اور ایک نقطہ و جہاں چاہو لے لو



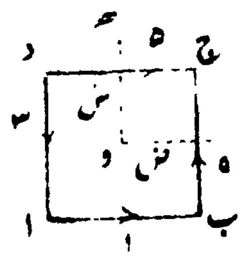
نقطہ و پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو اور ان کے خطوط عمل ط کے متوازی ہوں۔ یہ دو قوتیں جسم کے توازن پر کچھ اثر نہیں رکھتی ہیں +

جو قوت ط کہ ا پر عمل کرتی ہے اور دوسری قوت ط جو نقطہ و پر مخالف سمت میں عمل کرتی ہے یہ دونوں ملکر ایک جفت بنتی ہیں جس کا معیار ط × طا ہے جہاں کہ طا اصلی قوت ط کے خط عمل پر و سے عمود ہے +
پس نقطہ ا پر عمل کرنیوالی قوت ط مساوی ہے ایک مساوی قوت ط کے جو نقطہ و پر عمل کرتی ہے۔ اور ایک جفت کے جس کا معیار ط × طا ہے اسی طرح قوت ق جو نقطہ ب پر عمل کرتی ہے برابر ہے ایک متوازی قوت ق کے جو نقطہ و پر عمل کرتی ہے۔ مع ایک جفت کے جس کا معیار ق × قا ہے جہاں قا نقطہ د سے ق کے خط عمل پر عمود ہے +
یہی عمل نظام کی ہر ایک قوت پر کرو +
پس کل نظام مساوی ہے قوتوں ط، ق، ح ..... کے جو نقطہ و پر اپنی اصلی سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ اور متعدد جفتوں کے۔ یہ سب مساوی ہیں ایک قوت واحد کے جو نقطہ و پر عمل کرتی ہے اور ایک ایسے جفت کے جس کا معیار ط × طا + ق × قا + ... ہے +

(۸۸) دفعہ ۸۴ سے ہمیں معلوم ہے کہ ایک قوت اور ایک جفت دونو ملکر متوازن نہیں ہو سکتے جب تک کہ ان میں سے ہر ایک صفر نہ ہو اس لئے نقطہ و پر عمل کرنیوالی قوتوں ط، ق، ح ...... کا حاصل لازماً صفر ہوگا۔

یعنی بموجب دفعہ ۴۶ دو سمتوں میں ان کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ علٰحدہ علٰحدہ صفر ہوگا نیز معیار ط × طا + ق × قا + ... صفر ہوگا یعنی اگر کوئی بھی نقطہ لیا جائے اس کے گرد تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہوگا +

(۸۹) مثال اب ج د ایک مربع ہے۔ اضلاع اب، ب ج، د ج، دا کی سیدھ میں بالترتیب قوتیں ۱، ۹، ۵، ۳ پونڈ وزنی عمل کرتی ہیں اس نظام کے مساوی جفت اور قوت دریافت کرو۔ جب کہ قوت کا نقطہ عمل مربع کا مرکز ہو +



فرض کرو کہ و مربع کا مرکز ہے اور و لا اور و ھ، ب ج اور ج د پر عمود ہیں۔ اور مان لو کہ مربع کا ضلع ۲ ض ہے +

قوت ۹ مساوی ہے ایک قوت ۹ کے و ھ کی سمت میں اور ایک جفت کے جس کا معیار ۹ ض ہے۔

قوت ۳ مساوی ہے ایک قوت۔ ۳ کے و ھ کی سمت میں اور ایک جفت کے جس کا معیار ۳ ض ہے۔

قوت ۵ مساوی ہے ایک قوت ۵ کے سمت و لا میں اور ایک جفت کے جس کا معیار۔ ۵ ض ہے۔

قوت ۱ مساوی ہے ایک قوت ۱ کے سمت و لا

میں اور ایک جفت سے جس کا معیار ۱ × ض ہے۔ پس ان جفتوں کے حاصل جفت کا معیار ۹ ض + ۳ ض - ۵ ض + ۱ × ض یعنی ۸ ض ہے اور ولا کی سمت میں جزو تحلیلی ۶ ہے اور و ھ کی سمت میں بھی ۶ ہے۔ یعنی قوتوں کا حاصل ۶ ۲√ پونڈ وزن کے برابر ہے جو ضلع اب سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے +

امثلہ نمبری (۱۳)

(۱) ایک مربع کے اضلاع کی سمت میں ایک ہی رخ ۲، ۴، ۶، ۸ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل جفت اور حاصل قوت دریافت کرو۔ جبکہ حاصل قوت مربع کے مرکز میں سے گزرتی ہے +

(۲) اب ج د ایک مربع ہے۔ دا، اب، ب ج، ج د، د ب کی سمتوں میں قوتیں ط، ۳ ط، ۵ ط، ۷ ط، ۹ ۲√ ط عمل کرتی ہیں۔ ا میں سے گزرنے والی قوت اور وہ جفت دریافت کرو جو ملکر اس نظام کے مساوی ہیں +

(۳) ایک مسدس منتظم کے اضلاع اب، ب ج، ج د، د ع، ع ف، ف ا کی سمتوں میں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ پونڈ وزنی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ا میں سے گزرنیوالی قوت اور وہ جفت دریافت کرو۔ جو ملکر اس نظام کے مساوی ہیں +

(۴) ایک ۱۰ پونڈ وزن کی قوت کا مقام دیا ہوا ہے اور

ایک جفت بھی دیا ہوا ہے جس کی دونوں قوتیں چار چار پونڈ وزن کے مساوی ۲ انچ کے فاصلہ پر عمل کرتی ہیں۔ اس نظام کی مساوی قوت واحد معلوم کرو +

مقید الحرکت جسم

(۹۰) جب ایک جسم کے ایک یا زیادہ نقطے ثابت رہیں یعنی حرکت نہ کرسکیں تو اس کو مقید الحرکت جسم کہتے ہیں۔ مثلاً جو سلاخ کہ ایک دیوار میں ایک گردانک کے ذریعہ لگائی جائے وہ مقید الحرکت ہے۔ اگر ایک جسم استوار کے دو نقطے ا اور ب ثابت ہوں۔ تو خط ا ب میں جسم کے تمام نقطے ثابت ہوں گے۔ اور جسم صرف ایک ہی طرح حرکت کرسکتا ہے یعنی محور ا ب کے گرد گھوم سکتا ہے۔ مثلاً دروازہ کا کواڑ جس میں دو قبضے لگے ہیں صرف قبضوں کے خط وصل کے گرد گھوم سکتا ہے۔ اگر ایک جسم کے تین نقطے ثابت رہیں اور تینوں نقاط ایک ہی خط مستقیم میں نہ ہوں تو صریحاً وہ جسم حرکت نہیں کرسکتا +

ہم صرف دو صورتوں پر غور کریں گے۔ اول جبکہ جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو اور اس جسم پر اس ثابت نقطہ میں سے گزرنیوالی کسی سطح میں قوتوں کا کوئی نظام عمل کرے۔ دوم جبکہ جسم صرف اپنے ایک محور ثابت کے گرد حرکت کرسکے اور اس پر ایک ایسی قوتوں کا نظام عمل کرے جن کی سمت

محور پر عمود ہوں +

(۹۱) جب ایک جسم استوار کا ایک نقطہ ثابت ہو اور اس نقطہ میں سے گزرنیوالی کسی سطح میں قوتوں کا ایک نظام اس پر عمل کرے۔ تو وہ جسم اس حالت میں ساکن رہیگا۔ جب اس نقطہ کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہوگا +

جب ایک جسم کا ایک نقطہ ا ثابت ہو جیسا کہ دفعہ ۵۸ کی مثال ۴ میں ہے تو یہ لازم ہے۔ کہ اس نقطے پر ایک روکنے والی قوت ق جسم پر عمل کرے جو قوتوں کے دئے ہوے نظام کے ساتھ ملکر توازن پیدا کرے۔ اسلئے دفعہ ۸۳ کی شرائط توازن صادق آئیں گی +

اگر ہم دو عمودی سمتوں میں تحلیل کریں تو ہم کو دو مساواتیں حاصل ہونگی جن کے ذریعے ہم قوت ق کی سمت اور مقدار معلوم کرسکتے ہیں +

اگر ہم تمام قوتوں کے معیار ا کے گرد لیں تو ہماری مساوات میں قوت ق نہیں آئیگی۔ اس لئے دفعہ ۸۳ کی معیاروں کی مساوات ایک ایسی صورت پکڑیگی جس سے ظاہر ہوگا۔ کہ ا کے گرد قوتوں کے دئے ہوے نظام کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہے +

پس اگر ہمیں قوت ق کو معلوم کرنا منظور نہیں ہے تو جسم کے توازن کے لئے صرف یہی شرط باقی رہی کہ ثابت نقطہ کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہو +

(۹۲) مثال ایک سلاخ ا ب کا ایک سرا ا ثابت ہے۔ اور ب پر ایک قوت سلاخ سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہوئی عمل کرتی ہے۔ اور اسے افقی حالت میں ساکن رکھتی ہے۔ اگر سلاخ یکذات ہو اور اس کا طول ۴ فٹ ہو تو اس کا وزن دریافت کرو +

وزن کا معیار ا کے گرد اور قوت کا معیار ا کے گرد دونو مساوی ہونے چاہئیں +

اگر وزن و ہو تو وزن کا معیار ۲ × و ہوگا اور قوت کا معیار ۱۰ × ۴ جب °۳۰ ہوگا +

∴ ۲ و = ۱۰ × ۴ جب °۳۰ = ۲۰

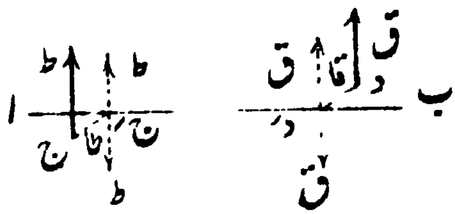
∴ و = ۱۰ پونڈ وزن

(۹۳) جب ایک جسم استوار ایک ثابت محور رکھتا ہو۔ اور اس پر ایسی قوتیں عمل کریں جو محور کی سمت پر عمود ہوں۔ تو یہ جسم ساکن رہیگا بشرطیکہ ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ محور کے گرد صفر ہو +

[اگر ایک قوت محور پر عمود ہو اور محور کو نہ ملے۔ تو اس کا معیار محور کے گرد دو مقداروں کا حاصل ضرب ہوگا۔ ایک قوت۔ دوسری محور اور قوت کا عمودی فاصلہ]

فرض کرو کہ ا ب جسم کا ثابت محور ہے اور جسم پر قوتیں ط، ق ....عمل کرتی ہیں۔ یہ ضروری نہیں ہے کہ یہ قوتیں متوازی ہوں۔ صرف یہ ضروری ہے۔ کہ ان کی سمتیں

محور کی سمت پر عمود ہوں +



ج جَ ایک خط ایسا کھینچو جو محور اور قوت ط پر عمود ہو۔ اور د دَ محور اور ق پر عمود کھینچو۔ فرض کرو کہ ان عمودوں کا طول طا اور قا ہے +

جَ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ۔ جن میں سے ہر ایک ط ہو اور ایک ط کے متوازی اور موافق ہو۔ تو دوسری متوازی اور مخالف ہوگی۔ ج پر عمل کرنیوالی قوت ط اور جَ پر عمل کرنے والی قوتیں (ط، ط) مساوی ہیں ایک قوت ط کے جو اصلی قوت ط کے متوازی اور موافق ہے۔ اور ایک جفت کے جس کا معیار ط × طا ہے +

اسی طرح د پر عمل کرنیوالی قوت ق مساوی ہے ایک قوت ق کے جو دَ پر عمل کرتی ہے اور ایک جفت کے جس کا معیار ق × قا ہے +

باقی قوتوں پر بھی یہی عمل کرو +

اب چونکہ یہہ تمام قوتیں محور کو ملتی ہیں لہذا وہ جسم کو محور کے

گرد گھمانے کے لئے کوئی اثر نہیں رکھتیں۔ محور کو قائم رکھنے والی قوتوں کے ساتھ یہ قوتیں توازن میں ہیں +

بموجب دفعات ۲۷ و ۳۷، کل جفت ایسے جفت کے مساوی ہیں جس کا معیار ط × طا + ق × قا + ... ہے۔ اور وہ ایک ایسی سطح میں عمل کرتا ہے جو محور پر عمود ہے +

پس جسم ساکن رہیگا۔ اگر ط × طا + ق × قا + ... صفر ہو۔ لیکن ط × طا + ق × قا + ... محور کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا +

(۱۴۹) ایک یکساں گول میز وزنی ۸۰ پونڈ چار مساوی پایوں پہ ساکن ہے۔ چاروں پائے اس کے کنارے پر سڈول شکل میں لگائے گئے ہیں۔ ایسا چھوٹے سے چھوٹا وزن دریافت کرو۔ جس کو میز کے کنارے پر لٹکانے سے میز کے الٹنے کی نوبت پہنچ جائے +



فرض کرو کہ میز کا مرکز و ہے اور اع اور ب ف اس کے دو پائے ہیں۔ میز کا وزن و میں سے عمل کریگا اگر وہ وزن جس کو معلوم کرنا مقصود ہے میز کے اس حصہ پر لٹکایا جائے۔ جو ا اور ب کے درمیان ہے۔ تو اگر میز الٹے۔ تو خط ع ف کے گرد گھوم کرالٹے گا۔ نیز الٹنے کی نوبت اس وقت

پہنچے گی۔ جبکہ لٹکتے ہوے وزن کا معیار ع ف کے گرد وہی
ہوگا جو میز کے وزن کا معیار اسی خط کے گرد ہے +
وزن معلق کا اثر اس وقت زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ اسکو
قوس اب کے نقطہ تنصیف م پر لٹکایا جائے۔
فرض کرو کہ و م، اب کو نقطہ ل پر ملتا ہے۔ اور فرض
کرو کہ وزن مطلوب لا ہے۔ ع ف کے گرد معیار لو
ع ف کے گرد معیار لینا وہی ہے جو اب کے گرد معیار
لینا۔ پس معیاروں کی مساوات یہ ہوگی +

لا × ل م = ۸۰ × و ل

ل م = و م ۔ و ل = و ا ۔ و ا جم ۴۵°

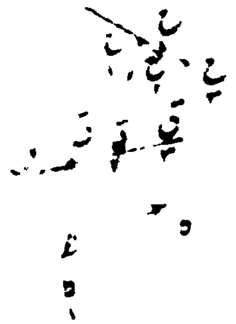
$= و ا (۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}})$

$\therefore$ لا $(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}) \times$ و ا = ۸۰ × و ل = ۸۰ × $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ × و ا

یعنی لا = $\frac{۸۰}{\sqrt{۲} - ۱}$ = ۸۰ $(\sqrt{۲} + ۱)$ = ۱۹۳٫۱ پونڈ وزن

(۹۵) مسئلہ۔ اگر تین قوتیں ایک جسم پر عمل کریں اور اس کو
ساکن رکھیں تو وہ لازماً ایک سطح میں ہونگی
فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ح ہیں +
اور فرض کرو کہ ط اور ق کے خطوط عمل پر کوئی سے
دو نقاط ط۱ اور ق۱ ہیں +
چونکہ قوتیں متوازن ہیں۔ اس لئے جسم کو خط ط۱ ق۱ کے

گرد گھمانے کے لئے ان کا مجموعی اثر کچھ نہیں ہوسکتا۔ لیکن قوتیں
ط اور ق اس خط کو ملتی ہیں
اس لئے فرداً فرداً ان دونو کا
اثر جسم کو طِ قِ کے گرد گھمانے
کے لئے کچھ نہیں ہے +



اس لئے تیسری قوت ح کا
اثر بھی جسم کو طِ قِ کے گرد
گھمانے کے لئے کچھ نہیں ہے پس
خط طِ قِ، قوت ح کو ضرور ملیگا۔
اسی طرح اگر قِ ، قِ .. قوت ق کے خط عمل پر اور
نقاط ہوں تو خطوط طِ قِ ، طِ قِ .. قوت ح کو ملیں گے۔
اس لئے ح لازماً اس سطح میں واقع ہوگا جو نقطہ طِ میں
سے اور ق کے خط عمل میں سے گزرتی ہے یعنی ق
اور ح کے خطوط عمل ایک ایسی سطح میں واقع ہیں جو طِ
میں سے گزرتی ہے +
لیکن طِ ، ط کے خط عمل پر کوئی سا نقطہ ہے۔ اس لئے
یہ سطح ط کے کسی نقطہ میں سے گزرتی ہے یعنی ط کے
خط عمل میں سے گزرتی ہے +
نتیجہ صریح۔ دفعہ ۷۷ کی امداد سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ
تینوں قوتیں یا تو ایک نقطہ پر ملیں گی یا متوازی
ہوں گی +

امثلہ نمبری (۱۴)

۱) ایک مربع یکساں تختہ اپنے ایک کونے سے لٹک رہا ہے۔ اور ایک وزن جو تختے کے وزن سے نصف ہے اس کونے کے متصل کونے سے لٹکایا گیا ہے تختہ کا مقام توازن دریافت کرو۔

۲) ایک مجوف عمودی اسطوانہ جس کا نصف قطر ۲ ا اور بلندی ۳ ا ہے ایک افقی میز پر رکھا ہے اور ایک یکساں سلاخ اس کے اندر اس طرح رکھی گئی ہے کہ سلاخ کا نچلا سرا قاعدہ اسطوانہ کے محیط پر ہے۔اگر سلاخ کا وزن اسطوانہ کے وزن کے مساوی ہو۔تو سلاخ کا طول کس قدر ہو۔کہ اسطوانہ الٹنے کی حد تک پہنچ جائے؟

۳) ایک اسطوانہ جس کی بلندی ب اور قطر ج ہے اوپر سے کھلا ہے۔ اور ایک افقی میز پر دھرا ہے۔ ایک یکساں سلاخ اسطوانہ کے کچھ اندر اور کچھ باہر اس طرح رکھی ہوی ہے۔کہ نیچے اور اوپر کے کناروں کو مس کرتی ہے۔اگر اسطوانہ کا وزن سلاخ کے وزن سے ن گنا ہو تو سلاخ کا طول کیا ہونا چاہیئے تاکہ اسطوانہ الٹنے کی حد تک پہنچ جائے؟

(۴) ایک مربع میز کے چار پائے اس کے اضلاع کے نقاط وسط پر ہیں۔ کتنا بڑے سے بڑا وزن میز کے ایک

کونہ پر رکھا جاسکتا ہے۔ کہ اس کے رکھنے سے میز نہ الٹے؟

(۵) ایک گول میز تین بے وزن پایوں پر کھڑی ہے جو ایک دوسرے سے برابر فاصلے پر کنارے پر لگے ہیں ایک آدمی اس کے ایک پائے کے عین مقابل کنارے پر بیٹھتا ہے۔ میز الٹ کردہ پایوں اور کنارے کے بل گر پڑتا ہے۔ اب وہ آدمی میز کے سب سے اونچے مقام پر بیٹھکر میز کو پھر اٹھا دیتا ہے۔ ثابت کرو۔ کہ میز کا نصف قطر ایک پائے کے طول سے ۲۷ گنا ہے +

(۶) ایک گول میز کا وزن ۱۰ پونڈ ہے اور اس کے تین عمودی پائے محیط کے تین مساوی الابعاد نقاط پر لگے ہیں۔ میز کے کنارے کے کسی نقطہ سے کم از کم کس قدر وزن لٹکایا جائے کہ میز کو الٹانے کے لئے عین کافی ہو +

(۷) ایک چار پائے والے مربع میز کا ایک پایہ ٹوٹ گیا ہے۔ تو معلوم کرو کہ میز کے کس مقام پر میز کے وزن کے برابر وزن رکھا جائے۔ کہ باقی تینوں پایوں پر دباؤ برابر ہو؟

(۸) ایک مربع میز کا وزن ۲۰ پونڈ ہے اور اس کے پائے اس کے اضلاع کے نقاط وسط پر لگے ہوئے ہیں اور تین مساوی وزن جن میں سے ہر ایک میز کے وزن کے برابر ہے۔ اس کے تین کونوں پر رکھے گئے ہیں تو معلوم کرو کہ چوتھے کونے پر بڑے سے بڑا کتنا وزن

رکھا جاسکتا ہے کہ توازن قائم رہے؟

(۹) ایک دھات کے گول تختے کی موٹائی یکساں ہے۔ اور وزن و ہے۔ اس کو اس کے محیط کے کسی نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ایک رسی اس کے محیط پر لپٹی ہوئی ہے اور رسی سے وزن ط لٹکتا ہے۔ تو دریافت کرو کہ نقطہ تعلیق میں سے گزرنے والے قطر کا میلان سمت راس سے کیا ہوگا؟

(۱۰) ایک گول یکساں قرص کا وزن ن و ہے۔ اس کے کنارے کے ایک نقطہ پر ایک ذرہ وزنی و لگادیا گیا ہے قرص پر دو نقطے ا اور ب ایسے ہیں۔ کہ اگر قرص ا سے لٹکایا جائے تو ب سب سے نیچے کا نقطہ ہوگا۔ اور اگر ب سے قرص لٹکایا جائے۔ تو سب سے نیچے کا نقطہ ا ہوگا۔ تو ثابت کرو کہ ا ب کے مقابل کا زاویہ قرص کے مرکز پر ۲ قط$^{-1}$ ۲ (ن + ۱) ہے +

(۱۱) ایک وزنی افقی گول حلقہ تین سہاروں ا، ب، ج پر رکھا ہے حلقہ کا وزن اور مثلث ا ب ج کے زاوئے اور ضلعے دئے ہوئے ہیں۔ سہاروں کے عمل دریافت کرو+

باب نہم

مرکز ثقل

(۹۶) زمین مادہ کے ہر ایک ذرہ کو اپنے مرکز کی طرف کھینچتی ہے اور متحرکات میں ہم کو معلوم ہوگا کہ ہر ایک ذرہ پر زمین کی کشش اس ذرہ کی مقدار مادہ سے متناسب ہوتی ہے +

ہر ایک جسم کو ہم ذروں کا اجتماع خیال کرسکتے ہیں۔ اگر زمین کے مقابلہ میں جسم چھوٹا ہوتو جو خطوط اُس کے ترکیبی ذروں کو زمین کے مرکز کے ساتھ وصل کریں گے وہ تقریباً متوازی ہوں گے اور اس کتاب کی حدود میں ہم اُن کو بالکل متوازی خیال کریں گے +

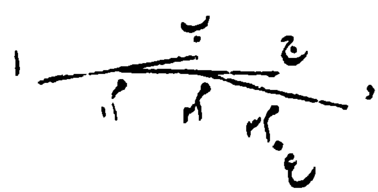
پس معلوم ہوا کہ جسم استوار کے ہر ایک ذرہ پر ایک عمودی قوت نیچے کی طرف عمل کرتی ہے جس کو اس کا وزن کہتے ہیں۔ اب متوازی قوتوں کے عمل ترکیب مندرجہ (دفعہ ۵۲) سے یہ سب قوتیں ملکر ایک ایسی قوت کے برابر ہیں جو ذرّوں کے مجموعہ اوزان کے برابر ہے اور جسم کے کسی خاص نقطے پر عمل کرتی ہے +

مرکز ثقل۔ تعریف۔ کسی جسم کا مرکز ثقل یا ذروں کے کسی نظام کا مرکز ثقل جس میں ذروں کے باہمی فاصلے نامتغیر ہوں

وہ نقطہ ہے جس میں سے جسم یا نظام ذرات کے وزن کا خط عمل ہر حالت میں گزرے +

(۹۷) ہر ایک جسم یا نظام ذرات جس کے ذروں کے باہمی فاصلے نہ بدلیں ایک مرکز ثقل رکھتا ہے +

فرض کرو کہ نظام ذرات ا، ب، ج، د ..... کے اوزان بالترتیب و$_1$، و$_2$، و$_3$ ..... ہیں +



ا ب کو ملاؤ اور اس کو نقطہ م$_1$ پر اس طرح تقسیم کرو کہ ا م$_1$: م$_1$ ب :: و$_2$: و$_1$ - تب بموجب دفعہ ۵۲ متوازی قوتیں و$_1$ اور و$_2$ جو نقاط ا اور ب پر عمل کرتی ہیں دونوں ملکر ایک ایسی قوت (و$_1$ + و$_2$) کے برابر ہیں جو نقطہ م$_1$ پر عمل کرتی ہے - م$_1$ ج کو ملاؤ اور اس کو م$_2$ پر اس طرح تقسیم کرو کہ م$_1$ م$_2$: م$_2$ ج :: و$_3$: و$_1$ + و$_2$ - تب متوازی قوتیں (و$_1$ + و$_2$) اور و$_3$ جو بالترتیب م$_1$ اور ج پر عمل کرتی ہیں ملکر ایک قوت (و$_1$ + و$_2$ + و$_3$) کے برابر ہیں جو م$_2$ پر عمل کرتی ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگر ہم تین قوتوں و$_1$، و$_2$، و$_3$ کو ایک نقطہ م$_2$ پر عمل کرتا ہوا فرض کریں تو اُن کے اثر میں کچھ فرق نہیں آئے گا +

اسی طرح سے م$_2$ د کو نقطہ م$_3$ پر اس طرح تقسیم کرو کہ م$_2$ م$_3$: م$_3$ د :: و$_4$: و$_1$ + و$_2$ + و$_3$ اس سے ہم دیکھتے ہیں

کہ نقاط ا، ب، ج، د پر جو چار اوزان عمل کرتے ہیں اُن کا حاصل ایک عمودی قوت و + و۲ + و۳ + و۴ کے برابر ہے جو نقطہ م۳ پر عمل کرتی ہے +

اسی طرح کا عمل جاری رکھنے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم کسی جسم کے ذرات ترکیبی کے اوزان کو جسم کے کسی ایک نقطۂ خاص پر عمل کرتا ہوا فرض کریں تو اُن کے اثر میں کچھ فرق نہیں آئے گا +

(۹۸) چونکہ متوازی قوتوں کے حاصل دریافت کرنے کا ہندسی عمل صرف ان کی مقدار اور نقطۂ عمل پر موقوف ہے اور قوتوں کی سمت پر نہیں ہے۔ اس لئے جو نقطہ آخرالامر ہمیں اوپر کے عمل سے حاصل ہوتا ہے وہ ہر صورت میں وہی ہوگا خواہ جسم کو کسی زاویہ میں گھما دیا جائے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ جسم کے مختلف حصوں کے اوزان کے خطوط عمل ہمیشہ متوازی رہیں گے اگرچہ مختلف حالتوں میں بلحاظ جسم کے ان کی سمت تبدیل ہوجائے گی +

اس لئے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ جسم کا صرف ایک مرکز ثقل ہوتا ہے کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ جسم کے دو مرکز ثقل م اور م۱ ہیں بشرط ضرورت جسم کو پھراتے جاؤ جب تک کہ م م۱ کی سمت اُفقی نہ ہوجائے۔ جب م م۱ اُفقی ہوگا تو اُس وقت ایک عمودی قوتوں کے نظام کا حاصل دو نقاط م اور م۱ میں سے گزریگا۔ لیکن چونکہ قوتوں کا

حاصل ایک عمودی قوت ہے اس لئے وہ ایک اُفقی خط میں عمل نہیں کرسکتی +

پس معلوم ہوا کہ صرف ایک مرکز ثقل ہوسکتا ہے +

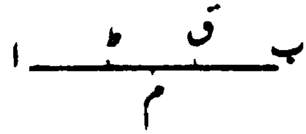
(۹۹) اگر جسم اتنا چھوٹا نہ ہو کہ اُس کے اجزاے ترکیبی کے اوزان باہم متوازی فرض کئے جاسکیں تو ضروری نہیں کہ اس کا مرکز ثقل ہو +

بہر حال جو نقطہ ہمیں عمل دفعہ ۹۷ سے حاصل ہوتا ہے اُس کے کئی مشہور خواص ہیں۔ اس نقطہ کو جسم کا مرکز مادہ یا مرکز جمود کہتے ہیں اگر جسم کی کثافت یکساں ہو تو اس کا مرکز مادہ اس کے مرکز ہندسیہ پر منطبق ہوتا ہے +

(۱۰۰) اب ہم چند سادی شکل کے اجسام کے مرکز ثقل دریافت کریں گے +

اوّل۔ یکساں سلاخ

فرض کرو کہ ا ب ایک یکساں سلاخ ہے اور م اس کا نقطہ تنصیف ہے۔

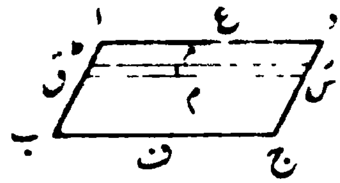


م اور ا کے درمیان سلاخ پر کوئی نقطہ ط لو اور م ب میں ایک ایسا نقطہ ق مقرر کرو کہ م ق = م ط

دو مساوی قدوں ط اور ق کا مرکز ثقل صریحاً م ہے نیز

ہر ایک ذرہ جو م اور ا کے درمیان واقع ہے اس کے
مقابل ایک مساوی ذرہ م سے مساوی فاصلے پر م اور
ب کے درمیان واقع ہے۔ اب ذروں کے ایسے ہر ایک
جفت کا مرکز ثقل م ہے اس لئے معلوم ہوا کہ تمام سلاخ کا
مرکز ثقل م ہے +

(۱۰۱) دوم۔ یکساں متوازی الاضلاع۔ فرض کرو کہ
ا ب ج د متوازی الاضلاع ہے۔ اور ع اور ف اضلاع
ا د اور ب ج کے وسطی نقاط ہیں +



ا د کے متوازی خطوط کھینچنے سے متوازی الاضلاع کو
بہت سے حصوں میں تقسیم کرو اور فرض کرو کہ دو ایسے
متوازی متصل خطوط ط ر اور ق س ہیں۔ ہم
ط ق س ر کو ایک یکساں خطِ مستقیم خیال کر سکتے ہیں
جس کا مرکز ثقل اس کا نقطہ تنصیف م ہے +
اسی طرح سے باقی حصوں کے مرکز ثقل ع ف پر واقع
ہوں گے اور اس لئے تمام شکل کا مرکز ثقل خط ع ف پر
واقع ہوگا +

اسی طرح سے اگر اب کے متوازی خطوط کھینچنے سے ہم متوازی الاضلاع کو حصوں میں تقسیم کریں تو شکل کا مرکز ثقل اضلاع اب اور ج د کے نقاط تنصیف کے خط وصل پر واقع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مرکز ثقل م ان دو خطوط کا نقطہ تقاطع ہے +

نیز م متوازی الاضلاع کے قطروں کا نقطہ تقاطع ہے +

(۱۰۲) دو دفعات گذشتہ کی ترکیب عمل سے ظاہر ہے کہ جب کوئی یکساں جسم اس طرح تقسیم ہوسکے کہ ذرّوں کے جوڑے جسم کے ایک نقطہ م پر متوازن ہوں تو لازماً م جسم کا مرکز ثقل ہوگا۔ پس ایک یکساں دائرہ یا یکساں کرہ کا مرکز ثقل اس کا مرکز ہندسیہ ہوگا +

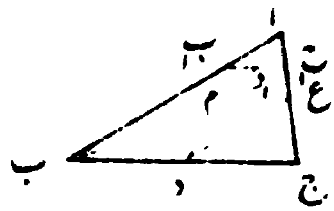
نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی پترے کو کسی ایسے حصوں میں تقسیم کرسکیں جن میں سے ہر ایک کا مرکز ثقل ایک خط مستقیم پہ واقع ہو تو تمام پترے کا مرکز ثقل اس خط پر واقع ہوگا

اسی طرح سے اگر کوئی جسم ایسے حصوں میں تقسیم ہوسکے جن کے مرکز ثقل ایک سطح مستوی پر واقع ہوں تو اُس جسم کا مرکز ثقل اُس سطح پر واقع ہوگا +

(۱۰۳) سوم۔ یکساں مثلثی پترا

فرض کرو کہ اب ج ایک مثلثی پترا ہے اور نسع ب ج اور ج ا کے نقاط تنصیف د اور ع ہیں ا د اور ب ع کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ نقطہ م میں ایک

دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب شلث کا مرکز ثقل م ہوگا +



فرض کرو کہ قاعدہ ج ب کے متوازی کوئی خط ب۱ ج۱ خط وسطی ا د کو نقطہ د۱ پر ملتا ہے۔ اب ہم یہ فرض کرسکتے ہیں جیساکہ ہم نے متوازی الاضلاع کی صورت میں فرض کیا کہ شلث ا ب ج قاعدہ ب ج کے متوازی ب۱ ج۱ جیسے حصوں کی تعداد کثیر سے مکلر بنا ہوا ہے +

چونکہ ب۱ ج۱ اور ب ج متوازی ہیں اس لئے شلثات ا ب۱ د۱ اور ا ب د متشابہ ہیں اسی طرح سے ا د۱ ج۱ اور ا د ج بھی ایک دوسرے کے متشابہ ہیں +

$$\text{اس لئے}\quad \frac{\text{ب}_1\text{د}_1}{\text{ب د}} = \frac{\text{ا د}_1}{\text{ا د}} = \frac{\text{د}_1\text{ج}_1}{\text{د ج}}$$

لیکن ب د = د ج اس لئے ب۱ د۱ = د۱ ج۱ پس معلوم ہوا کہ حصہ ب۱ ج۱ کا مرکز ثقل خط ا د پر واقع ہے +

اسی طرح سے باقی تمام حصوں کے مرکز ثقل خط ا د پر واقع ہوں گے اس لئے شلث کا مرکز ثقل خط ا د پر

واقع ہے +

اسی طرح سے اگر ہم مثلث کو اج کے متوازی حصوں میں تقسیم کریں تو اسی قسم کے استدلال سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ مرکزثقل خط ب ع پر واقع ہے +

لہٰذا معلوم ہوا کہ مرکزثقل مطلوب م ہے چونکہ د ضلع ب ج کا نقطہ وسط ہے اور ع ضلع ج ا کا نقطہ وسط ہے اس لئے د ع متوازی ا ب کے ہے +

اس لئے مثلث م د ع اور م ا ب متشابہ ہیں +

$$\therefore \frac{\text{م د}}{\text{م ا}} = \frac{\text{د ع}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ج ا}} = \frac{1}{2}$$

یعنی ۲ م د = م ا اور ۳ م د = م ا + م د = ا د

$$\therefore \text{م د} = \frac{1}{3} \text{ ا د}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ کسی مثلث کا مرکزثقل اس خط پر واقع ہے جو کسی ضلع کے نقطہ وسط کو مقابل کے راس زاویہ کے ساتھ ملاتا ہے اور اس کا فاصلہ کسی ضلع سے مقابل کے راس کے فاصلے کا $\frac{1}{3}$ ہے +

(۱۰۴) ایک مثلثی پترے کا مرکزثقل وہی ہوگا جو تین ایسے مساوی ذرات کا ہو جو پترے کی بجائے مثلث کے نقاط راس پر رکھے جائیں +

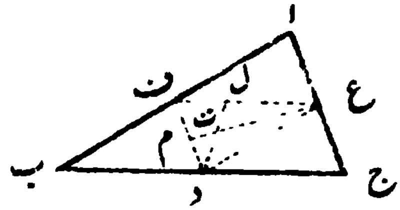
دیکھو شکل دفعہ (۱۰۳) نقاط ب اور ج پر دو مساوی ذروں و اور و کا مرکزثقل ب ج کے نقطہ وسط د پر واقع

ہوگا نیز نقاط و اور ا پر بالترتیب جو ۱، اوزان ۲ و ا دیں
ان کا مرکز ثقل خط د ا کو نسبت ۱ : ۲ میں تقسیم کرے گا لیکن
تپرے کا مرکز ثقل م خط د ا کو نسبت ۱ : ۲ میں تقسیم کرتا ہے
اس سے ثابت ہوا کہ تین مساوی ذروں کا مرکز وہی ہے جو
تپرے کا۔

(۱۰۵) تین سلاخوں کا مثلث

فرض کرو کہ ایک ہی مادہ اور موٹائی کی تین سلاخوں ب ج،
ج ا، ا ب کو باہم وصل کرنے سے ایک مثلث ا ب ج
بنایا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ سلاخوں کے نقاط وسطی د، ع
و ف ہیں۔ د ع، ع ف، ف د کو ملاؤ۔ صریحاً د ع،
ع ف، ف د اضلاع ا ب، ب ج، ج ا کے
نصف ہیں۔ تین سلاخوں کے مرکز ثقل د، ع، ف ہیں +
اس لئے سلاخ ا ب اور ا ج کا مرکز ثقل ایک ایسا نقطہ
ل خط ع ف پر واقع ہے کہ
ع ل : ل ف :: نقطہ ف پر کا وزن : نقطہ ع پر کا وزن۔
:: ا ب : ا ج
:: د ع : د ف
یعنی د ل زاویہ ف د ع کی تنصیف کرتا ہے (اقلیدس
م ۶ ش ۳)
نیز تینوں سلاخوں کا مرکز ثقل لازماً خط د ل پر واقع
ہونا چاہیئے +

اسی طرح سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل خط ع م پر لازماً واقع ہونا چاہیئے جو زاویہ د ع ف کی تنصیف کرتا ہے +

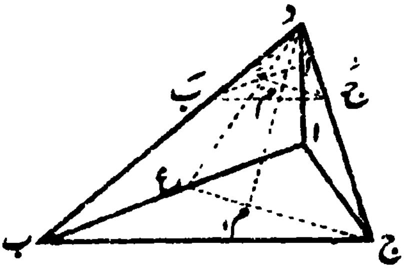


اس لئے نقطہ مطلوبہ خطوط ع م اور د ل کا نقطہ تقاطع ہے۔ لہٰذا یہ مثلث د ع ف کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے +

یعنی نقطہ مطلوبہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے جو سلاخ کے وسطی نقاط کو باہم ملانے سے بنے +

(۱۰۶) پنجم۔ ذو اربعۃ السطوح۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ایک ذو اربعۃ السطوح ہے ع خط ا ب کا نقطہ وسطی ہے اور م قاعدہ ا ب ج کا مرکز ثقل ہے۔

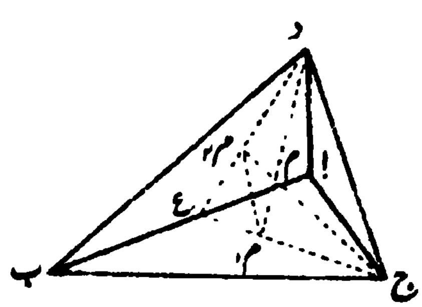


قاعدہ ا ب ج کے متوازی ذو اربعۃ السطوح کی کوئی تراش اَ بَ جَ ہو۔ فرض کرو کہ دع خط اَ بَ کو نقطہ عَ پر قطع کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ د م_1 خط عَ جَ کو نقطہ مَ پر ملتا ہے تب $\frac{\text{عَ مَ}}{\text{ع م}_1} = \frac{\text{د مَ}}{\text{د م}_1}$ تشابہ مثلثوں د عَ مَ اور د ع م_1 سے

$= \frac{\text{جَ مَ}}{\text{ج م}_1}$ تشابہ مثلثوں د مَ جَ اور د م ج سے

$$\therefore \frac{\text{عَ مَ}}{\text{جَ مَ}} = \frac{\text{ع م}_1}{\text{ج م}_1} = \frac{1}{2}$$

اس سے معلوم ہوا کہ تراش اَ بَ جَ کا مرکز ثقل مَ ہے اب اگر ذو اربعۃ السطوح کو قاعدہ ا ب ج کے متوازی شلثوں کا بنا ہوا خیال کریں تو چونکہ ہر ایک مثلث کا مرکز ثقل خط د م پر واقع ہوتا ہے اس لئے تمام کا مرکز ثقل بھی د م_1 پر واقع ہوگا +



اسی طرح سے یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ مرکز ثقل مطلوب نقطہ

ج اور مقابل کے رُخ کے مرکزِ ثقل م کے خط وصل پر واقع ہوگا۔ نیز $م_۲$ خط ع د پر واقع ہے اور اس کو نسبت ۱ : ۲ میں تقسیم کرتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ نقطہ مطلوبہ م خطوط ج $م_۲$ اور د $م_۱$ کا نقطہ تقاطع ہے +

$م_۱ م_۲$ کو ملاؤ

تب $\frac{م\,م_۲}{م\,ج} = \frac{م_۱ م_۲}{د\,ج}$ تشابہ مثلثوں $م\,م_۲\,م_۱$ اور م ج د سے

$= \frac{ع\,م_۱}{ع\,ج}$ تشابہ مثلثوں ع $م_۱ م_۲$ اور ع ج د سے

$= \frac{۱}{۳}$

$\therefore$ م ج = ۳ × م $م_۲$

$\therefore$ $م_۲$ ج = ۴ × م $م_۲$

اسی طرح سے $م_۱$ د = ۴ م $م_۱$

لہٰذا معلوم ہوا کہ ذو اربعۃ السطوح کا مرکزِ ثقل اس خط پر واقع ہے جو کسی رُخ کے مرکزِ ثقل کو مقابل کے راس زاویہ کے ساتھ ملاتا ہے اور اس کا فاصلہ اس رُخ کے مقابل کے راس زاویہ اور رُخ کے درمیانی فاصلہ کا $\frac{۱}{۴}$ ہے +

نتیجہ صریح۔ اگر ذو اربعۃ السطوح کے چاروں کونوں پر چار مساوی ذرے رکھ دئے جائیں تو ان کا مرکزِ ثقل ذو اربعۃ السطوح کے مرکزِ ثقل پر منطبق ہوگا کیونکہ بموجب دفعہ ۱۰۴ اگر مساوی اوزان و مثلث ا ب ج کے نقاط راس پر رکھ دئے

جائیں تو وہ نقطہ م پر جو مثلث ا ب ج کا مرکزثقل ہے ایک وزن ۳ و کے برابر ہوں گے۔ نیز نقطہ م پر کا وزن ۳ و اور د پہ کا وزن و دونوں باہم ایک وزن ۴ و کے برابر ہیں جو نقطہ م پر رکھدیا جائے کیونکہ م خط م د کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کی باہمی نسبت ۱ : ۳ ہے

(۱۰۷) ششم۔ مینار یا مخروطِ مضلع جو کسی قاعدہ پر قائم ہو۔ ٹھوس مخروط۔ دفعہ گزشتہ میں اگر قاعدہ بجائے مثلث ہونے کے ایک شکل مستوی ا ب ج ل م ن ...... ہو جس کا مرکزثقل م ہے تو بعینہ ویسے ہندسی طرز ثبوت سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ مرکزثقل مطلوب د اورم کے خط وصل پر لازماً واقع ہوگا +

نیز سطوح مستویہ د ا م، د ب م، ...... کے ذریعہ کل مینار ایسے متعدد میناروں میں تقسیم ہوسکتا ہے جو مثلثی قاعدوں پر قائم ہوں اور جن کے مرکزثقل ایک ایسی سطح مستوی پر واقع ہوں جو ا ب ج ل .... کے متوازی ہو اور جس کا فاصلہ قاعدہ مینار سے د کے فاصلہ کا $\frac{1}{4}$ ہو۔ اس سے ثابت ہوا کہ مینار مفروض کا مرکزثقل خط م د پر واقع ہے اور اس کو نسبت ۱ : ۳ میں تقسیم کرتا ہے +

اب فرض کرو کہ مینار کا قاعدہ ایک منتظم کثیرالاضلاع ہے اگر اس کے اضلاع کی تعداد کو لاانتہا بڑھایا جائے تو

مستوی قاعدہ دائرہ بن جائے گا اور مینار ایک ٹھوس مخروط ہو جائے گا۔ جس کا راس د ہوگا نیز نقطہ م، قاعدہ مستدیر کا مرکز ہوگا۔

اس سے معلوم ہوا کہ ایک ٹھوس قائم مخروط مستدیر کا مرکز ثقل اس خط پر واقع ہے جو راس مخروط کو قاعدہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔ نیز قاعدہ مخروط سے مرکز مطلوب کا فاصلہ راس کے فاصلہ کی ایک چوتھائی ہے۔

(۱۰۸) ہفتم۔ **مجوف** مخروط کی سطح۔ اگر مخروط کے قاعدہ مستدیر کو لاانتہا حصوں میں تقسیم کیا جائے اور راس مخروط کو نقاط تقسیم سے ملایا جائے تو مخروط کی سطح مثلثی پتروں کی ایک غیر محدود تعداد میں تقسیم ہو جائیگی اور چونکہ ان سب پتروں کے مرکز ثقل ایک ایسی سطح مستوی پر واقع ہیں جو قاعدہ کے متوازی ہے اور جس کا فاصلہ راس مخروط سے قاعدہ کے فاصلہ کا $\frac{۲}{۳}$ ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ تمام مخروط کا مرکز ثقل اس سطح میں واقع ہوگا لیکن جسم کے سڈول پن سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل مخروط کے محور پر واقع ہوگا۔

اس لئے معلوم ہوا کہ مرکز مطلوب وہ نقطہ ہے جہاں محور مخروط سطح مذکورہ کو قطع کرتا ہے اس لئے مرکز مطلوب محور کے اس نقطہ پر واقع ہے جس کا فاصلہ قاعدہ مخروط سے مخروط کے ارتفاع کا $\frac{۱}{۳}$ ہے۔

امثلہ نمبری (۱۵)

(۱) ایک پترے کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اس کے مساوی اضلاع کا طول ۵ فٹ ہے اور قاعدہ ۸ فٹ ہے مثلث کے ہر ایک ضلع سے مرکز ثقل کا فاصلہ دریافت کرو۔

(۲) ایک مثلثی پترے کے اضلاع طول میں ۶، ۸، ۱۰ فٹ ہیں ہر ایک ضلع سے مرکز ثقل کا فاصلہ دریافت کرو۔

(۳) ایک مثلث متساوی الساقین پترے کا قاعدہ ۸ انچ ہے اور مساوی اضلاع میں سے ہر ایک ۵ انچ ہے مثلث کے نقاط راس سے اس کے مرکز ثقل کے فاصلے دریافت کرو۔

(۴) مثلث اب ج کے قاعدہ ب ج کا نقطہ تنصیف د ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور ا ج د کے مراکز ثقل کا باہمی فاصلہ $\frac{1}{3}$ ب ج ہے۔

(۵) ایک بھاری مثلث پترا زمین پر پڑا ہے اگر نقطہ ا پر ایک ایسی عمودی قوت لگائی جائے جو راس مثلث کو زمین سے عین ہلا سکنے کی قابلیت رکھتی ہو تو ثابت کرو کہ وہی قوت نقاط ب اور ج کو ہلا سکنے کے قابل ہوگی

(۶) ایک چکنے مثلثی تختے وزنی ن پر ایک وزن و دھرا ہے اور تین آدمی تختہ کے نقاط راس کو اپنے کندھوں پر

سہارے ہوئے ہیں معلوم کرو کہ ہر ایک آدمی پر کتنا وزن پڑتا ہے۔

(۷) ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راس ایک معین خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ مرکز ثقل بھی یک خط مستقیم پر حرکت کرے گا۔

(۸) ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اُس کا زاویہ راس نا متغیر ہے ثابت کرو کہ اُس کا مرکز ثقل ایک دائرہ کی قوس پر حرکت کرتا ہے۔

(۹) ایک وزن معلوم مثلث کی سطح پر کسی جگہ پر رکھ دیا گیا ہے ثابت کرو کہ نظام کا مرکز ثقل ایک خاص مثلث کے اندر واقع ہے۔

(۱۰) ایک یکساں مساوی الاضلاع مثلثی پترا ایک رسی کے ذریعہ جو ایک ضلع کے ایسے نقطے پر بندھی ہو جو ضلع کو نسبت ۲:۱ میں تقسیم کرتا ہے معلق ہے۔ اس ضلع کا میلان سمت راس سے دریافت کرو۔

(۱۱) ایک یکساں پترا شکل میں مثلث قائم الزاویہ ہے۔ وہ ایک رسی کے ذریعہ جو زاویہ قائمہ پر بندھی ہے۔لٹک رہا ہے۔اگر زاویۂ قائمہ کے اضلاع متصلہ میں سے ایک دوسرے کا ۳ گنا ہو تو ثابت کرو کہ حل توازن میں وتر سمت راس سے زاویہ جبتا $\frac{3}{5}$ بنائے گا۔

(۱۲) ایک یکساں مثلثی پترے کے اضلاع ۳ و ۴ و ۵

انچہ ہیں اور وہ ایک رسی کے ذریعہ جو سب سے لمبے ضلع کے نقطہ وسط پر بندھی ہے لٹک رہا ہے۔ اس ضلع کا میلان سمت راس سے دریافت کرو۔

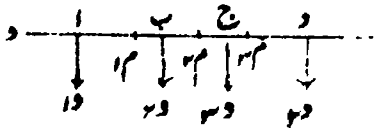
(۱۰۹) مرکز ثقل دریافت کرنے کے عام ضابطے

دفعات ذیل میں ہم ایسے نظام ذرات کا مرکز ثقل دریافت کریں گے۔ جس کے ذروں کے مقام اور اوزان معلوم ہو

مسئلہ۔ ایک نظام کے ذرات ایک خط مستقیم پر واقع ہیں اور اُن کے اوزان $و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ ۔۔۔ $و_ن$ ہیں۔ اگر خط مستقیم کے ایک نقطہ معینہ سے ان کے فاصلے $لا_۱$، $لا_۲$ ۔۔۔ $لا_ن$ ہوں تو اسی نقطہ سے ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ $\bar{لا}$

$$= \frac{و_۱ لا_۱ + و_۲ لا_۲ + و_۳ لا_۳ + \cdots + و_ن لا_ن}{و_۱ + و_۲ + و_۳ + \cdots\cdots + و_ن}$$

فرض کرو کہ ذرے ا، ب، ج، د ۔۔۔۔ ہیں اور فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر جو ذرات $و_۱$ اور $و_۲$ ہیں اُن کا مرکز ثقل نقطہ $م_۱$ پر ہے اور فرض کرو کہ $م_۱$ پر کے ذرات $و_۱ + و_۲$ اور ج پر کے ذرہ $و_۳$ کا مرکز ثقل $م_۲$



ہے اور اسی طرح باقی اور ذروں کے لئے۔

بموجب دفعہ ۹۶ $\text{و}_1 \times \text{ا م}_1 = \text{و}_2 \times \text{م}_1\text{ب}$

$\therefore \text{و}_1 (\text{و م}_1 - \text{و ا}) = \text{و}_2 (\text{و ب} - \text{و م}_1)$

اس لئے $(\text{و}_1 + \text{و}_2) \times \text{و م}_1 = \text{و}_1 \times \text{و ا} + \text{و}_2 \times \text{و ب}$

یعنی $\text{و م}_1 = \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2}{\text{و}_1 + \text{و}_2}$ . . . . (۱)

نیز چونکہ م_1 اور ج پر کے اوزان $(\text{و}_1 + \text{و}_2)$ اور و_3 کا مرکز ثقل م_2 ہے اس لئے

$$\text{و م}_2 = \frac{(\text{و}_1 + \text{و}_2)\, \text{و م}_1 + \text{و}_3 \times \text{و ج}}{(\text{و}_1 + \text{و}_2) + \text{و}_3}$$

$$= \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \text{و}_3 \text{لا}_3}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3} \quad \text{بموجب (۱)}$$

اسی طرح $\text{و م}_3 = \frac{(\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3) \times \text{و م}_2 + \text{و}_4 \times \text{و د}}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \text{و}_4}$

$$= \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \text{و}_3 \text{لا}_3 + \text{و}_4 \text{لا}_4}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \text{و}_4}$$

اسی طرح عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \text{و}_3 \text{لا}_3 + \cdots + \text{و}_{\text{ن}} \text{لا}_{\text{ن}}}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \cdots + \text{و}_{\text{ن}}}$$

خواہ نظام مفروض میں ذرات کی تعداد کچھ ہی ہو۔

بطریق دیگر۔ ضابطہ مندرجہ بالا دفعہ ۹۵ کی مدد سے بھی حاصل ہو سکتا ہے نظام کے ذرات سے متوازی قوتوں کا ایک ایسا نظام حاصل ہوتا ہے جس کا حاصل اُن کے مجموعہ یعنی $\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \ldots \text{و}_{\text{ن}}$ . . . کے برابر ہے نیز اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ کسی نقطہ کے گرد جو ان کی

سطح میں واقع ہو۔ ان کے حاصل کے معیار کے برابر ہے لیکن نقطہ معینہ و کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ

$\text{و}_1\,\text{لا}_1 + \text{و}_2\,\text{لا}_2 + \cdots + \text{و}_n\,\text{لا}_n$ ہے۔

نیز اگر مرکز ثقل کا فاصلہ نقطہ و سے $\overline{\text{لا}}$ ہو تو حاصل کا معیار $(\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots + \text{و}_n)\,\overline{\text{لا}}$ ہے اس لئے

$$\overline{\text{لا}}\,(\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots + \text{و}_n) = \text{و}_1\,\text{لا}_1 + \text{و}_2\,\text{لا}_2 \cdots \text{و}_n\,\text{لا}_n$$

یعنی
$$\overline{\text{لا}} = \frac{\text{و}_1\,\text{لا}_1 + \text{و}_2\,\text{لا}_2 + \cdots + \text{و}_n\,\text{لا}_n}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots + \text{و}_n}$$

(۱۱۰) مثال (۱) ایک ۵ پونڈ وزنی سلاخ اب کا طول ۲ فٹ ہے اور اُس کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اگر اُس کے نقاط تثلیث ج اور د ہوں اور نقاط ا، ج، د اور ب پر بالترتیب ذرات ۱، ۲، ۳، اور ۴ پونڈ وزنی رکھے جائیں تو معلوم کرو کہ سلاخ کا کونسا نقطہ سہارا جائے کہ سلاخ ہر حالت میں ساکن رہ سکے یعنی نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سلاخ کا مرکز ثقل م ہے اور دفعہ سابقہ کا نقطہ معینہ و سلاخ کے سرے ا پر واقع ہے۔ مقادیر لا_1، لا_2، لا_3 اور لا_4 اس صورت میں بالترتیب صفر، ۸، ۱۶، ۱۲، اور ۲۴ انچہ ہیں۔

اس لئے اگر لا نقطہ مطلوبہ ہو تو

$$\text{ا لا} = \frac{۲۴ \times ۴ + ۱۶ \times ۳ + ۱۲ \times ۵ + ۸ \times ۲ + ۰ \times ۱}{۴ + ۳ + ۵ + ۲ + ۱}$$

$$= \frac{۲۲۰}{۱۵} = ۱۴\tfrac{۲}{۳} \text{ انچ}$$

مثال (۲) اگر مثال سابقہ میں نقطہ ب پر کے جسم کی بجاے ایک اور جسم رکھدیا جائے تو اس نا معلوم جسم کا وزن دریافت کرو تاکہ نیا مرکز ثقل سلاخ کے نقطہ تنصیف پر ہو۔

فرض کرو کہ ل وزن مطلوب ہے۔ چونکہ نئے مرکز ثقل کا فاصلہ ا سے ۱۲ انچہ ہے اس لئے۔

$$۱۲ = \frac{۲۴ \times \text{ل} + ۱۶ \times ۳ + ۱۲ \times ۵ + ۸ \times ۲ + ۰ \times ۱}{\text{ل} + ۳ + ۵ + ۲ + ۱}$$

$$= \frac{۲۴\text{ل} + ۱۲۴}{\text{ل} + ۱۱}$$

$$\therefore ۱۲\text{ل} + ۱۳۲ = ۱۲۴ + ۲۴\text{ل}$$

$$\therefore \text{ل} = \tfrac{۲}{۳} \text{ پونڈ}$$

مثال (۳) ایک سلاخ کا طول ۲ فٹ اور وزن ۳ پونڈ ہے اور اس کے ایک سرے پر ایک کرہ پیوستہ ہے جس کا نصف قطر ۲ انچہ اور وزن ۱۰ پونڈ ہے اس مرکب جسم کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

فرض کرو کہ و ا سلاخ ہے اور $\text{م}_۱$ اس کا نقطہ وسطی اور $\text{م}_۲$ کرہ کا مرکز ہے تب

$$\text{و م} = \frac{۳ \times \text{و م}_۱ + ۱۰ \times \text{و م}_۲}{۱۰ + ۳}$$

لیکن و م۱ = ۱۲ انچ ، و م۲ = ۲۶ انچ

$$\therefore \text{و م} = \frac{۲۶ \times ۱۰ + ۱۲ \times ۳}{۱۰ + ۳} = \frac{۲۹۶}{۱۳} = ۲۲\frac{۱۰}{۱۳} \text{ انچ}$$

امثلہ نمبری (۱۶)

(۱) ایک سیدھی سلاخ کا طول ۱ فٹ اور مقدار مادہ ۱ اونس ہے اس کے ایک سرے پر ایک اونس سیسہ بندھا ہوا ہے اگر سلاخ کے ایک اور نقطہ پر جس کا فاصلہ سلاخ کے دوسرے سرے سے کل طول کا $\frac{۱}{۴}$ ہو ایک اونس سیسے کا ایک اور ٹکڑا باندھ دیا جائے تو اس نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۲) ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ فٹ اور مقدار مادہ ۲ انس ہے اس کے ایک سرے سے ۳، ۱۵، اور ۲۱ انچ کے فاصلوں پر تین حلقے ہیں جن میں سے ہر ایک کی مقدار مادہ ۳ اونس ہے معلوم کرو کہ سلاخ کے کس نقطے پر نظام متوازن ہوگا۔

(۳) ایک یکساں سلاخ اب کا طول ۴ فٹ اور وزن ۳ پونڈ ہے، ایک پونڈ وزن نقطہ ا پر لگا دیا گیا ہے، ۲ پونڈ ایک ایسے نقطہ پر جو ا سے ۱ فٹ کے فاصلہ پر ہے، ۳ پونڈ ا سے ۲ فٹ کے فاصلہ پر، ۴ پونڈ ا سے ۳ فٹ کے فاصلہ پر، اور ۵ پونڈ نقطہ ب پر تو نظام کے مرکز کا فاصلہ نقطہ ا سے دریافت کرو۔

(۴) ایک دوربین کی تین نلیاں ہیں جو ایک دوسرے کے اندر ہیں۔ ہرایک نلی کا طول ۱۰ انچ ہے اور اُن کے اوزان بالترتیب ۸، ۷، ۶ اونس ہیں اگر ہرایک نلی کو بالتمام باہر نکال لیا جائے تو اس حالت میں دوربین کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۵) ایک سیدھی سلاخ پر ۱۲ وزنی ذرات ایک ایک انچ کے برابر فاصلوں پر رکھے گئے ہیں اگر اُن کے اوزان بالترتیب ۱، ۲، ۳ ...... ۱۲ گرین ہوں تو اُن کا مرکز ثقل دریافت کرو سلاخ بلا وزن ہے۔

(۶) ایک خطِ مستقیم کے مساوی الابعاد نقاط پر ایسے اوزان رکھے گئے ہیں جو بالترتیب ۱، ۴، ۹ اور ۱۶ کے متناسب ہیں ان کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

(۷) ایک یکساں سلاخ کے دو مساوی حصے ہیں ایک حصہ کسی ایک دھات کا اور دوسرا دوسری دھات کا بنا ہوا ہے اور سلاخ ایک ایسے نقطے پر متوازن ہے جس کا فاصلہ ایک سرے سے سلاخ کے کل طول کا $\frac{1}{3}$ ہے۔ دھاتوں کی مساوی مقداروں کے اوزان کا مقابلہ کرو۔

(۸) ایک سطح مائل کا طول ۳ فٹ اور اس کا زاویہ میلان ۶۰° ہے اوزان ۶، ۵، ۴ اور ۸ اونس سطح پر بالترتیب ایک ایک فٹ کے فاصلہ پر رکھے گئے ہیں اور آخری وزن سب سے اوپر ہے ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ قاعدہ سطح مائل سے

دریافت کرو۔

(۹) ایک یکساں سلاخ اب کا طول ن انچ اور وزن (ن + ۱) و ہے سلاخ پر اوزان و، ۲و، ۳و ... ن و نقطہ ا سے ۱، ۲، ۳، ...... ن انچ کے فاصلوں پر بالترتیب لگا دیئے گئے ہیں سلاخ اور اوزان کے مرکز ثقل کا فاصلہ نقطہ ا سے دریافت کرو۔

(۱۰) ایک سلاخ کا طول ۱۰ فٹ ہے اور اس کے ایک سرے سے ایک پونڈ وزن لٹکتا ہے اگر سلاخ کے دوسرے سرے سے ۱۵ پونڈ وزن لٹکا دیا جائے تو سلاخ ایک ایسے نقطے پر متوازن ہوتی ہے۔ جس کا فاصلہ اس سرے سے ۳ فٹ ہو، اگر ۸ پونڈ کا وزن اس سرے سے لٹکایا جائے تو نقطہ توازن کا فاصلہ اس سرے سے ۴ فٹ ہوتا ہے سلاخ کا وزن اور مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

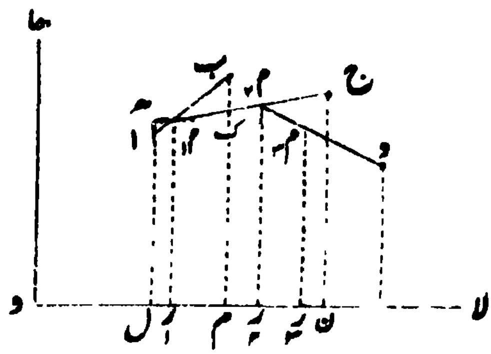
(۱۱) مسئلہ-ایک نظام کے ذرے و۱، و۲، و۳ ...... و‌ن ایک سطح میں واقع ہیں اور دو معین خطوط مستقیم و لا اور و ھا اسی سطح میں متقاطع علی القوائم ہیں اگر و لا سے ذرات کے فاصلے ھ۱، ھ۲، ھ۳ .... ھن سے اور ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ ھَ سے تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ

$$\bar{ھ} = \frac{و_1 ھ_1 + و_2 ھ_2 + \dots\dots + و_ن ھ_ن}{و_1 + و_2 + \dots\dots + و_ن}$$

اسی طرح سے اگر خط و ھا سے ذروں کے فاصلے لا۱،

$لا_۲$ ، $لا_۳$ . . . . . $لا_ن$ ہوں اور اُن کے مرکز ثقل کا فاصلہ $\bar{لا}$ ہو تو

$$\bar{لا} = \frac{و_۱ لا_۱ + و_۲ لا_۲ + ... + و_ن لا_ن}{و_۱ + و_۲ + ... + و_ن}$$



فرض کرو کہ ا ، ب ، ج . . ذرے ہیں اور ال ، ب م ، ج ن . . . . . . خط و لا پر عمود ہیں فرض کرو کہ ذرات $و_۱$ ، $و_۲$ کا مرکز ثقل $م_۱$ ہے اور $م_۱$ پر کے وزن $(و_۱ + و_۲)$ اور ج پر کے وزن $و_۳$ کا مرکز ثقل $م_۲$ ہے اور علیٰ ہذالقیاس خط و لا پر عمود $م_۱ ر_۱$ ، $م_۲ ر_۲$ . . . کھینچو اور نقطہ $م_۱$ میں سے خط ھ $م_۱$ ک متوازی و لا کے اس طرح کھینچو کہ ال اور ب م کو نقاط ھ اور ک میں ملے اب چونکہ $م_۱$ مرکز ثقل $و_۱$ اور $و_۲$ کا ہے اس لئے

$$\frac{ا م_۱}{م_۱ ب} = \frac{و_۲}{و_۱} \quad (\text{دفعہ } ۹۶)$$

نیز مثلث ا $م_۱$ ھ اور ب $م_۱$ ک متشابہ ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{ھ ا}}{\text{ب ک}} = \frac{\text{ا م}_1}{\text{م}_1\text{ ب}} = \frac{\text{و}_2}{\text{و}_1}$$

لیکن $\text{ھ ا} = \text{ھ ل} - \text{ا ل} = \text{م}_1\text{ ر}_1 - \text{ھ}_1$

اور $\text{ب ک} = \text{ب م} - \text{ک م} = \text{ھ}_2 - \text{م}_1\text{ ر}_1$

$$\therefore \frac{\text{م}_1\text{ ر}_1 - \text{ھ}_1}{\text{ھ}_2 - \text{م}_1\text{ ر}_1} = \frac{\text{و}_2}{\text{و}_1}$$

اس لئے $\text{و}_1 (\text{م}_1\text{ ر}_1 - \text{ھ}_1) = \text{و}_2 (\text{ھ}_2 - \text{م}_1\text{ ر}_1)$

$$\therefore \text{م}_1\text{ ر}_1 = \frac{\text{و}_1\text{ ھ}_1 + \text{و}_2\text{ ھ}_2}{\text{و}_1 + \text{و}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اسی طرح سے چونکہ نقاط م_1 اور ج پر کے اوزان $(\text{و}_1 + \text{و}_2)$ اور و_3 کا مرکز ثقل م_2 ہے۔

اس لئے $$\text{م}_2\text{ ر}_2 = \frac{(\text{و}_1 + \text{و}_2) \times \text{م}_1\text{ ر}_1 + \text{و}_3\text{ ھ}_3}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3}$$

$$= \frac{\text{و}_1\text{ ھ}_1 + \text{و}_2\text{ ھ}_2 + \text{و}_3\text{ ھ}_3}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3}$$ بموجب (۱)

اسی طرح عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\bar{\text{ھ}} = \frac{\text{و}_1\text{ ھ}_1 + \text{و}_2\text{ ھ}_2 + \cdots\cdots + \text{و}_n\text{ ھ}_n}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots\cdots + \text{و}_n}$$

نیز چونکہ مثلث $\text{ا م}_1\text{ ھ}$ اور $\text{ب م}_1\text{ ک}$ متشابہ ہیں اس لئے

$$\frac{\text{ھ م}_1}{\text{م}_1\text{ ک}} = \frac{\text{ا م}_1}{\text{م}_1\text{ ب}} = \frac{\text{و}_2}{\text{و}_1}$$

لیکن $\text{ھ م}_1 = \text{ل ر}_1 = \text{و ر}_1 - \text{و ل} = \text{و ر}_1 - \text{لا}_1$

اور $\text{م}_1\text{ ک} = \text{ر}_1\text{ م} = \text{و م} - \text{و ر}_1 = \text{لا}_2 - \text{و ر}_1$

$$\therefore \text{و}_1 (\text{و ر}_1 - \text{لا}_1) = \text{و}_2 (\text{لا}_2 - \text{و ر}_1)$$

اس لئے $و_ب = \frac{و_1 لا_1 + و_2 لا_2}{و_1 + و_2}$

حسب سابق عمل کرنے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$\bar{لا} = \frac{و_1 لا_1 + و_2 لا_2 + \cdots\cdots + و_ن لا_ن}{و_1 + و_2 + \cdots\cdots + و_ن}$$

مسئلہ ہذا کا دعویٰ ذرا مختلف صورت میں اس طرح بھی بیان ہو سکتا ہے۔

ذروں کی کسی تعداد کے مرکز ثقل کا فاصلہ کسی ایسے خط سے جو اُن کی سطح میں واقع ہو ایک ایسی کسر کے برابر ہے جس کا نسب نما اوزان کے مجموعہ کے برابر ہو۔ اور شمار کنندہ ایسی رقموں کا مجموعہ ہو جن میں سے ہر ایک حاصل ضرب دو اجزاء کا ہو۔ ایک تو کسی ذرہ کا وزن۔ دوسرے خطِ معین سے اس ذرے کا فاصلہ۔ دوسرے الفاظ میں مرکز ثقل کا فاصلہ ذرات کے فاصلوں کے اوسط کے برابر ہے۔

(۱۱۲) ضابطہ دفعہ گزشتہ دفعہ ۹۳ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ چونکہ کل اوزان کا حاصل $(و_1 + و_2 + و_3 \cdots\cdots + و_ن)$ اوزان کے مرکز ثقل م پر عمل کرتا ہے۔

اُس لئے اگر خط و لا کو ثابت محور فرض کریں تو اس حاصل کا معیار اس محور کے گرد کل ترکیبی اوزان کے معیاروں کے مجموعہ کے برابر ہوگا

لیکن حاصل کا معیار $(و_1 + و_2 + \cdots\cdots + و_ن)\, \bar{ھ}$ ہے۔

اور اوزان کے معیاروں کا مجموعہ $و_1 ھ_1 + و_2 ھ_2 + و_3 ھ_3 + ... + و_ن ھ_ن$ ہے۔

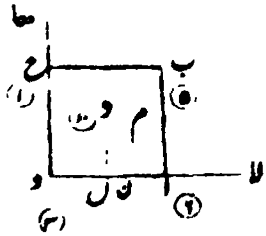
$$\text{اس لئے } \bar{ھ} = \frac{و_1 ھ_1 + و_2 ھ_2 + ... + و_ن ھ_ن}{و_1 + و_2 + ... + و_ن}$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\bar{لا} = \frac{و_1 لا_1 + و_2 لا_2 + ... + و_ن لا_ن}{و_1 + و_2 + ... + و_ن}$$

(۱۱۳) ایک مربع پترے کا وزن ۱۰ پونڈ ہے اور اُسکے نقاط الزوایا پر ایسے ذرات لگے ہوے ہیں جن کے اوزان بالترتیب ۳، ۶، ۵ اور ۱ پونڈ ہیں اگر پترے کا ضلع ۲۵ انچ ہو تو اس نظام کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مختلف ذرات نقاط الزوایا و، ا، ب، ج پر دھرے ہوے ہیں اور دو ثابت خطوط جن سے فاصلے ناپے جاتے ہیں و ا اور و ج ہیں



پترے کا وزن مرکز د پر عمل کرتا ہے فرض کروکہ م مرکز مطلوب ہے اور د ل اور م ن خط و لا پر عمود ہیں نقاط و، ا، ب، ج، د کے فاصلے خط و لا سے صریحاً ۰، ۰، ۲۵، ۲۵ اور ۱۲ ½ انچ ہیں

$$\therefore \text{م ن} = \bar{\text{ہ}} = \frac{12\frac{1}{2}\times 10 + 25\times 1 + 25\times 5 + 0\times 6 + 0\times 3}{10+1+5+6+3}$$

$$= \frac{275}{25} = 11 \text{ انچ}$$

نیز ذرات کے فاصلے خط و ھا سے بالترتیب ۰، ۲۵، ۲۵، ۰، ۰ اور ۱۲ ½ انچ ہیں۔

$$\therefore \text{و ن} = \bar{\text{ا}} = \frac{12\frac{1}{2}\times 10 + 0\times 1 + 25\times 5 + 25\times 6 + 0\times 3}{10+1+5+6+3}$$

$$= \frac{400}{25} = 16 \text{ انچ}$$

اس لئے نقطہ مطلوب اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ نقطہ و سے خط و ا پر ۱۶ انچ قطع کریں اور پھر اس پر ۱۱ انچ طول کا ایک عمود قائم کریں۔

مثال (۲) ایک بے وزن مثلث متساوی الساقین و ا ب کا قاعدہ و ا طول میں ۶ انچ ہے اور اس کی ہر ایک ساق ۵ انچ ہے نقاط و، ا، ب پر ذرات ۱، ۲، ۳ پونڈ وزنی رکھے گئے ہیں نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

فرض کروکہ ثابت خط و لا خط و ا پر منطبق ہوتا ہے اور و ھا، و ا پر عمود ہے۔

فرض کروکہ خط و ا پر ب ل عمود ہے تب و ل = ۳ انچ اور ل ب $= \sqrt{25 - 3^2} = 4$ انچ

اس لئے اگر م مرکز ثقل مطلوب ہو اور خط و لا پر عمود م ن نکالا جائے تو

$$و ن = \frac{۳ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۰ \times ۱}{۳ + ۲ + ۱} = \frac{۱۳}{۶} = ۲\frac{۱}{۶} \text{ انچ}$$

$$\text{اور } ن م = \frac{۴ \times ۳ + ۰ \times ۲ + ۰ \times ۱}{۳ + ۲ + ۱} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \text{ انچ}$$

پس نقطہ مطلوبہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ و سے خط و ا پر فاصلہ $۲\frac{۱}{۶}$ انچ ناپو اور پھر خط و ا پر ایک ۲ انچ لمبا عمود قائم کرو۔

(۱۱۴) متوازی قوتوں کا مرکز

دفعات ۱۰۹ اور ۱۱۱ کی ترکیبوں اور ضابطوں کی مدد سے صرف اوزان کا مرکز ثقل ہی نہیں دریافت ہو سکتا بلکہ متوازی قوتوں کے حاصل کے مقام کی تحقیق بھی ہوسکتی ہے۔ حاصل کی مقدار ان قوتوں کے مجموعہ کے برابر ہوگی لیکن ہر ایک قوت کے ماقبل اس کی مناسب علامت رکھنی چاہئے۔ صرف ایک صورت میں تسلی بخش نتیجہ حاصل نہیں ہوتا یعنی جب قوتوں کا مجموعہ جبریہ صفر ہو اس حالت میں قوتوں کا حاصل صفر ہوگا اور ضوابط دفعہ ۱۱۱ سے یہ حاصل ہوگا کہ لا = ∞ اور قہ = ∞ اس صورت میں متوازی قوتوں کا نظام بموجب دفعہ ۵۳ ایک جفت کے برابر ہوگا۔

امثلہ نمبری (۱۷)

۱) ایک مربع کے نقاط الزوایا پر ذرات ۱، ۲، ۳، ۴ پونڈ وزنی رکھے گئے ہیں مربع کے مرکز سے مرکز ثقل کا فاصلہ دریافت کرو۔

۲) ایک مربع ا ب ج د کے مقابل کے کونوں پر دو مساوی اوزان ہر ایک دو پونڈ وزنی رکھے ہوئے ہیں اور نقاط ب اور د پر اوزان ا اور ۰ پونڈ دھرے ہیں ان کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۳) ایک افقی مربع کے کونوں پر ذرات وزنی ۵، ۶، ۹، ۸ پونڈ دھرے ہیں مربع کا ضلع ۲۰ انچ ہے معلوم کرو کہ ایک قوت واحد کس جگہ لگائی جائے کہ نظام توازن میں رہ سکے؟

(۴) ایک مربع میز پر پانچ اوزان ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ پونڈ رکھے گئے ہیں میز کے ایک سرے سے اُن کے فاصلے ۲، ۴، ۶، ۸ اور ۱۰ انچ ہیں اور متصل کنارے سے یہ فاصلے بالترتیب ۳، ۵، ۰، ۹، اور ۱۱ انچ ہیں ان دو کناروں سے مرکز ثقل کے فاصلے دریافت کرو۔

(۵) ایک مثلث مساوی الاضلاع کا ضلع ا ہے اور اُس کے کونوں پر اوزان ۱، ۲، ۳ پونڈ رکھے ہوئے ہیں اُن کے مرکز ثقل کا فاصلہ پہلے وزن سے دریافت کرو اگر اوزان ۱۱، ۱۳، ۹ کے متناسب ہوں تو بھی یہ فاصلہ دریافت کرو۔

(۶) ایک مساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کا ضلع ۲ فٹ ہے نقاط ا، ب، ج پر اوزان رکھے گئے ہیں جو ۲،۱،۵ کے متناسب ہیں اور اضلاع ب ج، ج ا اور ا ب کے نقاط تنصیف پر ایسے اوزان رکھے گئے ہیں جو ۲، ۴، ۶ کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ ب سے ۲۰ انچ ہے۔

(۷) ایک وزن دار مثلثی پترے کے نقاط الزوایا اور اضلاع کے نقاط تنصیف پر مساوی اوزان رکھے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۱ اونس ہے ان کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

(۸) ایک مثلث ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے ا ب کا طول ۱۲ انچ اور ا ج کا ۱۵ انچ ہے نقاط ا، ج و ب پر اوزان رکھے گئے ہیں جو بالترتیب ۲، ۳، ۴ کے متناسب ہیں ب اور ج سے مرکز ثقل کے فاصلے دریافت کرو۔

(۹) ایک مثلث کے نقاط الزوایا پر ذرات ۴، ۱، ۱ پونڈ وزنی رکھے گئے ہیں ثابت کرو کہ ذروں کا مرکز ثقل مثلث کے مرکز ثقل اور اس کے ایک راس زاویہ کے درمیانی فاصلے کی تنصیف کرتا ہے۔

(۱۰) ایک مثلث ا ب ج کے نقاط الزوایا پر تین وزن رکھے گئے ہیں اگر ان کا مرکز عمود ا اور ب ج کے نقطہ تنصیف کے عین وسط میں واقع ہو تو وزنوں کی باہمی نسبتیں

دریافت کرو۔

(۱۱) ایک مثلث کے نقاط الزوایا ا، ب، ج پر اوزان ۲، ۳، ۴ پونڈ رکھے گئے ہیں ان کا مرکز ثقل م دریافت کرو نیز ثابت کرو کہ قوتیں ۲ م ا، ۳ م ب، ۴ م ج توازن میں ہیں۔

(۱۲) ایک یکساں مثلثی تختی ا ب ج کا وزن ۳ پونڈ ہے۔ نقاط ا، ب، ج پر اوزان ۲، ۳، ۵ پونڈ رکھے گئے ہیں کل نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۳) ایک یکساں مثلث تختی کے نقاط الزوایا ا، ب، ج پر اوزان ۲، ۲، ۱ پونڈ بالترتیب رکھے ہوے ہیں۔ تختی کا وزن ۳ پونڈ اور اس کا مرکز ثقل م ہے ثابت کرو کہ نظام کا مرکز ثقل م ج کا نقطہ وسط ہے۔

(۱۴) ایک منتظم مسدس کے نقاط الزوایا پر ایک ہی رُخ میں اوزان ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، اور ۲ پونڈ رکھے ہوے ہیں ان کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۵) ایک مسدس منتظم کے نقاط الزوایا پر ایک ہی رخ میں بالترتیب ایسے اوزان رکھے ہوے ہیں جو ۵، ۴، ۶، ۲، ۷ اور ۳ کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ اُن کا مرکز ثقل مسدس کے مرکز ثقل پر منطبق ہوتا ہے۔

(۱۶) چھ اوزان ۱، ۵، ۳، ۴، ۲، اور ۶ کے متناسب ہیں اور اُن کو ایک مسدس منتظم کے نقاط الزوایا پر بالترتیب ایک ہی رُخ میں رکھا گیا ہے ثابت کرو کہ ان کا مرکز ثقل

وہی ہے جو مسدس کا ہے۔

(۱۷) اگر ایک مسدس منتظم کے نقاط الزوایا پر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ کے متناسب اوزان کو بالترتیب ایک ہی رخ میں رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ اس دائرہ کے مرکز سے جو مسدس کے گرد بنایا جائے دائرہ کے $\frac{1}{7}$ نصف قطر کے برابر ہو گا۔

(۱۸) ایک مربع کے نقاط الزوایا پر ایک ہی رخ میں متوازی قوتیں ۱ : ۳ : ۵ : ۷ عمل کرتی ہیں مربع کے مرکز سے اس نقطہ کا فاصلہ دریافت کرو جس پر انکا حاصل عمل کرتا ہے۔

(۱۹) ایک متوازی الاضلاع کے زاویے ایک ہی رخ میں ا، ب، ج، د، ہیں اور موافق متوازی قوتیں جو ۶، ۸، ۱۲، ۱۰ کے متناسب ہیں۔ ا، ب، ج، د پر عمل کرتی ہیں تو ثابت کروکہ ان متوازی قوتوں کا حاصل اور مرکز وہی رہے گا۔ اگر ان کی بجائے متوازی قوتیں ۸، ۱۲، ۱۶، ۴ کے متناسب ہوں اور اضلاع اب، ب ج، ج د، اور د ا کے نقاط تنصیف پر بالترتیب عمل کریں۔

(۲۰) متوازی قوتوں ط، ۲ ط، ۳ ط، ۴ ط، ۵ ط، ۶ ط کے نقاط عمل کے فاصلے ایک نقطہ معینہ سے ایک ہی سیدھ میں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ہیں قوتوں کا مرکز دریافت کرو۔

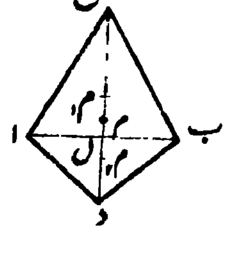
(۲۱) ایک مثلث کے نقاط الزوایا ا، ب، ج پر تین

متوازی قوتیں ط، ق، ر جو بالترتیب مثلث کے اضلاع
آ، بَ، جَ کے متناسب ہیں عمل کرتی ہیں اُن کے
حاصل کی مقدار اور مقام دریافت کرو۔

(۱۱۵) ایک جسم کے دو مختلف حصوں کے مرکز ثقل دئے ہوئے ہیں کل جسم کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دونوں مرکز م۱ اور م۲ معلوم ہیں اور دونو
حصوں کے وزن و۱ اور و۲ ہیں نقطہ مطلوبہ م بموجب
دفعہ ۹۰ خط م۱ م۲ کو اس طرح تقسیم کرتا ہے۔ کہ
م۱ م : م م۲ :: و۲ : و۱ دفعہ ۱۰۹ کی مدد سے بھی
نقطہ م حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ قاعدہ ا ب کے اوپر نیچے دو مثلث متساوی الساقین
ج ا ب اور د ا ب
بنائے گئے ہیں ان کے ارتفاع
بالترتیب ۱۲ اور ۶ انچ ہیں خط
ا ب سے ذو اربعۃ الاضلاع
ج ا د ب کے مرکز ثقل کا
فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ قاعدہ ا ب پر عمود ج ل د ہے جو اس کو
نقطہ ل پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ مثلث ج ا ب و

د اب کے مرکز ثقل بالترتیب م$_۱$ اور م$_۲$ ہیں۔ اس لئے

ج م$_۱$ = $\frac{۲}{۳}$ × ج ل = ۸

اور ج م$_۲$ = ج ل + ل م$_۲$ = ۱۲ + ۲ = ۱۴

مثلثوں کے اوزان اُن کے رقبوں یعنی

$\frac{۱}{۲}$ اب × ۱۲ اور $\frac{۱}{۲}$ اب × ۶ کے متناسب ہیں اگر

تمام شکل کا مرکز ثقل م ہو تو

$$\text{ج م} = \frac{\triangle\,\text{ج اب} \times \text{ج م}_۱ + \triangle\,\text{د اب} \times \text{ج م}_۲}{\triangle\,\text{ج اب} + \triangle\,\text{د اب}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{اب} \times ۱۲ \times ۸ + \frac{۱}{۲}\,\text{اب} \times ۶ \times ۱۴}{\frac{۱}{۲}\,\text{اب} \times ۱۲ + \frac{۱}{۲}\,\text{اب} \times ۶} = \frac{۴۸ + ۴۲}{۶ + ۳} = \frac{۹۰}{۹} = ۱۰$$

اس لئے ل م = ج ل − ج م = ۲ انچ

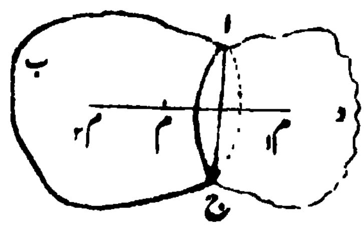
اس نتیجہ کی بخوبی تصدیق ایک پتلے مقوے میں سے شکل مندرجۂ بالا کاٹنے سے ہو سکتی ہے۔

(۱۱۶) تمام جسم کا مرکز ثقل اور اُس کے ایک حصے کا مرکز ثقل دیا ہوا ہے باقی حصے کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل جسم اب ج د کا مرکز ثقل م ہے اور حصہ ا د ج کا م$_۱$ ہے۔

فرض کرو کہ کل جسم کا وزن و ہے اور حصہ اج د کا و$_۱$ ہے یعنی و$_۲$ (= و − و$_۱$) حصہ اب ج کا وزن ہے

فرض کرو کہ حصہ ا ب ج کا مرکز ثقل م۲ ہے چونکہ دونوں حصوں سے ملکر پورا جسم بنتا ہے اس لئے ضرور ہے کہ نقاط م۱ اور م۲ پر کے اوزان و۱ اور و۲ کا مرکز ثقل نقطہ م پر ہو۔



اس لئے م لازماً خط م۱ م۲ پر واقع ہوگا اور
و۱ × م م۱ = و۲ × م م۲ ہوگا۔
اس لئے اگر م اور م۱ معلوم ہوں تو ہمیں م۲ خط م۱ م کو م۲ تک اس طرح خارج کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

م م۲ = و۱/و۲ × م م۱
= و/(و۱ - و) × م م۱

نقطہ مطلوبہ دفعہ ۱۰۹ کی مدد سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

مثال (۱) ایک گول تختی کا نصف قطر ر ہے اور اسمیں سے ایک ایسا دائرہ کاٹ لیا گیا ہے جس کا قطر تختی کے نصف قطر کے برابر ہے۔ باقی کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

چونکہ دائروں کے رقبوں کی آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کی ہو۔

∴ کٹے ہوئے حصہ کا رقبہ : کل دائرہ کا رقبہ :: (ر/۲)^۲ : ر^۲ :: ۱ : ۴

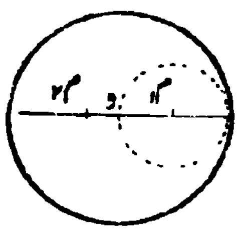
اس سے معلوم ہوا کہ کٹا ہوا حصہ کل کا ¼ ہے اور باقی حصہ کل کا ¾ ہے۔ یعنی و۱ = ⅓ و۲

اب چونکہ تمام تحتی حصص و۱ اور و۲ سے ملکر بنتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ وہ نقطہ و پر متوازن ہوں گے۔

اس لئے و۲ × و م۲ = و۱ × و م۱

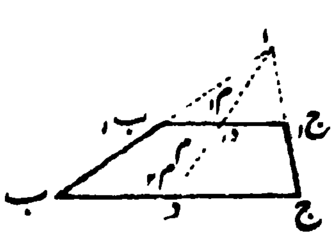
= ⅓ و۲ × ½ ر

∴ و م۲ = ⅙ ر



اس کی تصدیق تجربہ سے ہو سکتی ہے۔

مثال (۲) ایک مثلث پترے اب ج کا ایک چوتھائی رقبہ قاعدہ ب ج کے متوازی ایک خط کھینچنے سے قطع کیا گیا ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ٹکڑا اب۱ج۱ کاٹ دیا گیا ہے۔ یعنی

△ اب۱ج۱ : △ اب ج :: ۱ : ۴

بموجب اقلیدس م ۶ ش ۱۹ چونکہ مثلث اب۱ج۱ اور

اب ج متشابہ ہیں اس لئے۔

$$\triangle\,\text{اب}_1\text{ج} : \triangle\,\text{اب ج} :: \text{اب}_1^2 : \text{اب}^2$$

$$\therefore\ \text{اب}_1^2 : \text{اب}^2 :: ۱ : ۴$$

اور اس لئے $\text{اب}_1 = \frac{۱}{۲}\,\text{اب}$

اس نے $\text{ب}_1\text{ج}_1$ خطوط اب، اج اور اد کی تنصیف کرتا ہے۔

فرض کرو کہ م اور م_1 بالترتیب مثلث اب ج اور $\text{اب}_1\text{ج}_1$ کے مرکز ثقل ہیں نیز و_1 اور و_2 بالترتیب کٹے ہوئے ٹکڑے اور باقی ماندہ حصے کے اوزان یعنی $\text{و}_2 = ۳\,\text{و}_1$

اب چونکہ اوزان و_2 اور و_1 جو بالترتیب نقاط م_2 اور م_1 پر عمل کرتے ہیں نقطہ م پر متوازن ہیں اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۹

$$\text{د م} = \frac{\text{و}_1 \times \text{د م}_1 + \text{و}_2 \times \text{د م}_2}{\text{و}_1 + \text{و}_2} = \frac{\text{د م}_1 + ۳\,\text{د م}_2}{۴} \quad \ldots\ldots(۱)$$

لیکن $\text{د م} = \frac{۱}{۳}\,\text{د ا} = \frac{۲}{۳}\,\text{د د}_1$

اور $\text{د م}_1 = \text{د د}_1 + \frac{۱}{۳}\,\text{د}_1\text{ا} = \text{د د}_1 + \frac{۱}{۳}\,\text{د د}_1 = \frac{۴}{۳}\,\text{د د}_1$

اس لئے بموجب (۱) $۴ \times \frac{۲}{۳}\,\text{د د}_1 = \frac{۴}{۳}\,\text{د د}_1 + ۳\,\text{د م}_2$

$$\therefore\ \text{د م}_2 = \frac{۴}{۹}\,\text{د د}_1$$

اس نتیجہ کی تصدیق بذریعہ تجربہ بآسانی ہو سکتی ہے۔

امثلہ نمبری (۱۸)

[ذیل کے سوالوں میں سے بعض کی تصدیق طالب علم کو

بذریعہ تجربہ کرنی چاہئے۔ اس مطلب کے لئے نہایت موزوں سوالات ۱، ۲، ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۶، ۱۸، ۱۹ ہیں]

(۱) ایک یکساں سلاخ کا طول ۱ فٹ ہے اس کو توڑ کر دو حصے کئے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب ۵ اور ۷ انچ ہیں ان حصوں کو اس شکل T میں جوڑ دیا گیا ہے اس میں بڑا حصہ عمودی ہے اس نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۲) ایک مقوے کے دو مستطیلی ٹکڑوں کے طول بالترتیب ۶ اور ۸ انچ ہیں اور عرض ۲ اور $2\frac{1}{2}$ انچ ہیں ان کو ایک میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ وہ مس کرتے ہیں اور ایک دوسرے پر چڑھے ہوئے نہیں ہیں اگر ان کو ملاکر رکھنے سے یہ شکل T پیدا ہو جس میں لمبا حصہ عمودی ہو تو اس نظام کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۳) ایک بھاری شہتیر کے دو حصے ہیں ان کے طولوں کی باہمی نسبت ۳ : ۵ ہے اور ان کے وزنوں کی ۴ : ۱ تو شہتیر کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۴) ایک مستطیل کے دو اضلاع دوسرے دو اضلاع کے دو چند ہیں لمبے ضلعوں میں سے ایک پر مثلث مساوی الاضلاع بنایا گیا ہے جو شکل مستطیل اور مثلث سے ملکر بنتی ہے اس کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۵) ایک مقوے کا ٹکڑا ا ب ع ج د ایسا ہے کہ ا ب ج د

ایک مربع ہے اور ب ج پر ب ع ج مثلث
متساوی الساقین ہے اگر مربع کا ضلع ۱۲ انچ ہو اور مثلث
کا ارتفاع ۶ انچ ہو تو خط ا د سے مقوے کے مرکز
ثقل کا فاصلہ دریافت کرو۔

(۶) ایک قائم الزاویہ مثلث متساوی الساقین کے اضلاع
پر باہر کی طرف مربعے بنے ہوئے ہیں ثابت کرو کہ جو
شکل اس طرح سے بنتی ہے اس کا مرکز ثقل ایک
ایسے خط پر واقع ہے جو مثلث کے وتر کی تنصیف
کرتا ہے اور زاویہ قائمہ میں سے گزرتا ہے۔ نیز ثابت کرو
کہ مرکز ثقل اس خط کو نسبت ۱ : ۲۶ میں تقسیم کرتا ہے۔

(۷) دو یکساں کروں کے قطر ۶ اور ۱۲ انچ ہیں اگر وہ
ایک ہی چیز کے بنے ہوئے ہوں اور انھیں باہم
اچھی طرح سے جوڑ دیا جائے تو ان کے مرکز ثقل کا
مقام دریافت کرو۔

(۸) ایک متوازی الاضلاع کے قطر اس کو چار مساوی
حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اگر ان میں سے ایک
حصہ کاٹ دیا جائے تو باقی شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۹) کسی متوازی الاضلاع کے متقابل اضلاع کے نقاط
تنصیف کو ملانے سے اس کو چار حصوں میں تقسیم
کیا گیا ہے اگر ان میں سے ایک حصہ کاٹ دیا جائے تو
باقی شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۰) اگر ایک مربع شکل کو متصل اضلاع کے نقاط وسطی کی سیدھ میں کاٹ کر مثلثی حصے کو جدا کردیا جائے تو مربع کا جو حصہ باقی رہے اسکا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۱) ایک مثلث کے قاعدہ کے متوازی خط مستقیم کھینچنے سے اس کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ حصہ کاٹ دیا گیا ہے۔ باقی شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۲) ایک مثلث متساوی الاضلاع ا ب ج کا ضلع ۶ انچ ہے اور اس کا مرکز ثقل و ہے اگر مثلث و ب ج کو کاٹ دیا جائے تو باقی شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۳) اگر ایک مثلث ا ب ج سے تین مساوی مثلث ا ر ق، ب ف ر، اور ج ق ف کاٹ دیئے جائیں تو ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج اور ف ق ر کے مرکز جمود ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

(۱۴) ایک مثلث متساوی الساقین کا زاویہ ا قائمہ ہے م اس کا مرکز ثقل ہے اور ضلع ب ج برابر آ کے ہے اس کا حصہ م ب ج کاٹ دیا گیا ہے باقی شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ نقطہ ا سے دریافت کرو۔

(۱۵) ایک ہی قاعدہ ب ج پر دو مثلث ا ب ج اور آ ب ج بنے ہوے ہیں دوسرے مثلث کا راس آ پہلے مثلث کے اندر واقع ہے اگر راس آ

اس رقبہ کا مرکز ثقل ہو جو دو مثلثوں کے درمیان گھرا ہؤا ہے تو آ کا مقام دریافت کرو۔

(۱۶) ایک مثلث معلوم ا ب ج میں سے نقاط الزوایا ب اور ج کے متقابل کے اضلاع کے متوازی خط کھینچنے سے دو ایسے مثلث کاٹ دئے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کا رقبہ کل کا $\frac{1}{m}$ ہے اور جن کے نقاط راس ب اور ج ہیں باقی شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۷) بتاؤ کہ ایک مربع پترے میں سے ایک ایسی مثلث شکل کس طرح کاٹی جائے کہ اس کا قاعدہ مربع کا ایک ضلع ہو اور کاٹنے کے بعد باقی شکل کا مرکز ثقل اس مثلث کے راس پر واقع ہو۔

(۱۸) ایک دھات کے یکساں مربع پترے کا ضلع ۱۰ انچ ہے اگر پترے میں ایک سوراخ کردیا جائے جس کا رقبہ ۳ مربع انچ ہو اور جس کے مرکز کا فاصلہ پترے کے مرکز سے $\frac{1}{2}$ ۲ انچ ہو تو باقی پترے کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو

(۱۹) ایک گول تختی کا نصف قطر ۳ فٹ ہے بتاؤ کہ تختی کے کس مقام پر ایک فٹ نصف قطر کا ایک گول سوراخ نکالا جائے کہ باقی کا مرکز ثقل تختی کے مرکز سے ۲ انچ کے فاصلہ پر ہو۔

(۲۰) دو کروں کے نصف قطر ا اور ب ہیں اور وہ ایک

دوسرے کو داخلاً مس کرتے ہیں اُس ٹھوس جسم کا مرکز ثقل دریافت کرو جو ان کروں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

(۲۱) اگر ایک قائم مخروط کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹیں جو مخروط کے محور پر عمود ہو اور اس کی تنصیف کرے تو مخروط ناقص کے مرکز ثقل کا فاصلہ راس مخروط سے دریافت کرو۔

(۲۲) ایک ٹھوس قائم مستدیر مخروط یکذات لوہے کا بنا ہوا ہے اس کا ارتفاع ۶۴ انچ اور مقدار مادہ ۸۱۹۲ پونڈ ہے۔ اگر مخروط کو ایک ایسی سطح مستوی سے قطع کریں جو محور مخروط پر عمود ہو اور چھوٹے مخروط کو جسکی مقدار مادہ ۶۸۶ پونڈ ہے خارج کردیں تو قاعدہ مخروط سے مخروط ناقص کے مرکز ثقل کی بلندی دریافت کرو۔

(۲۳) ایک ٹھوس قائم مخروط مستدیر کے قاعدہ کو کھود کر اس میں ایک ایسا جوف پیدا کر دیا گیا ہے جس کی شکل ایک قائم مخروط کی ہے اور جو اصلی مخروط کے قاعدہ پر قائم ہے بتاؤ کہ اصلی مخروط کی کل کتنی مقدار مادہ نکالدی جائے۔ کہ باقی جسم کا مرکز ثقل جوف کے راس پر منطبق ہو۔

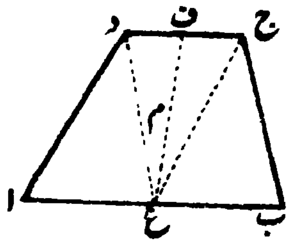
(۲۴) چاند کی مقدار مادہ زمین کی مقدار مادہ سے ۸۱۳ گنی ہے اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو اور چاند کے مرکز کا فاصلہ زمین کے مرکز سے زمین کے نصف

قطر کا ۶۰ گنا ہو تو چاند اور زمین کے مرکز ثقل کا فاصلہ زمین کے مرکز سے دریافت کرو۔

(۱۱۷) **نصف کرہ کا مرکز ثقل**

اگر نصف کرہ کا نصف قطر ر ہو تو اس کا مرکز ثقل اس نصف قطر پر واقع ہوگا جو اس کے مستوی پہلو پر عمود وار ہو اور اس کا فاصلہ مستوی رخ کے مرکز سے $\frac{3}{8}$ر ہوگا اگر نصف کرہ مجوف ہو تو یہ فاصلہ $\frac{ر}{2}$ ہوگا۔ ان مسائل کے ثبوت ابتدائی طریقوں سے ذرا مشکل ہیں ان کو ہم آخری باب میں دیں گے۔

(۱۱۸) ایک ذو اربعۃ الاضلاع پترے کے دو اضلاع متوازی ہیں اس کا مرکز ثقل دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ذو اربعۃ الاضلاع ہے اور اس کے متوازی اضلاع اب اور ج د کے طول بالترتیب ۲ آ اور ۲ بَ ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د کے نقاط تنصیف ع اور ف ہیں دع اور ع ج کو ملاؤ شلثات ادع، دع ج، ب ع ج کے رقبے ان کے قاعدوں اع، د ج اور ع ب یعنی آ، ۲ بَ، آ کے متناسب ہیں ان مثلثوں کی جگہ ان کے نقاط راس پر ایسے ذرات رکھو جن کے

اوزان مثلث کے وزن کے ایک تہائی ہوں۔
اس طرح سے ہم کو مفصلہ ذیل مقادیر کے متناسب اوزان حاصل ہوں گے $\frac{ا}{۳} + \frac{۲ب}{۳}$ کے متناسب نقاط ج اور د پر $\frac{ا}{۳}$ کے متناسب نقاط ا اور ب پر اور $\frac{۲ا}{۳} + \frac{۲ب}{۳}$ کے متناسب نقطہ ع پر نیز ج اور د پر کے مساوی اوزان کی جگہ $\frac{۲ا}{۳} + \frac{۴ب}{۳}$ کے متناسب وزن ج د کے نقطہ تنصیف ف پر رکھو اور نقاط ا اور ب پر کے مساوی اوزان کی جگہ ایک وزن نقطہ ع پر رکھو۔ جو $\frac{۲ا}{۳}$ کے متناسب ہو
اس طرح سے ہم کو مفصلہ ذیل اوزان حاصل ہوں گے۔

$\frac{۲ا}{۳} + \frac{۴ب}{۳}$ نقطہ ف پر

اور $\frac{۴ا}{۳} + \frac{۲ب}{۳}$ نقطہ ع پر

اس سے معلوم ہوا کہ مرکز ثقل مطلوب م خط مستقیم ع ف پر واقع ہے اور اس کا مقام اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ع م}{م ف} = \frac{\text{ف پر کا وزن}}{\text{ع پر کا وزن}} = \frac{ا + ۲ب}{۲ا + ب}$$

امثلہ نمبری ۱۹

(۱) ایک مثلث میز کے کونوں پر تین سہارے ہیں جن پر وہ ٹکی ہوئی ہے اضلاع کے نقاط تنصیف پر اوزان ۶، ۸، ۱۰ پونڈ رکھے گئے ہیں اوزان کے رکھنے سے نیچے پایوں پر دباؤ میں جو اضافے ہوں ان کو معلوم کرو۔

(۲) ایک پتلے یکساں تار کو خم دینے سے ایک ایسی شکل ذو اربعۃ الاضلاع بنائی گئی ہے جس کے اضلاع اب اور ج د متوازی ہیں اور اضلاع ب ج اور د ا ضلع اب سے مساوی زاوئے بناتے ہیں اگر اب کا طول ۱۸ انچ ہو ج د کا ۱۲ انچ اور ب ج اور د ا میں سے ہر ایک کا ۵ انچ تو خط اب سے تار کے مرکز ثقل کا فاصلہ دریافت کرو۔

(۳) تین مساوی یکساں سلاخیں اب، ب ج، ج د ہیں ان کو باہم وصل کرنے سے ایک منتظم مسدس کے تین متصل اضلاع بنائے گئے ہیں اگر ان کو نقطہ ا سے لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ ج د متوازی الافق ہوگا۔

(۴) اب ج ایک یکساں تار کا ٹکڑا ہے اس کے دو حصے اب اور ب ج بالکل سیدھے ہیں اور زاویہ اب ج = ۱۳۵°، تار کو ایک نقطہ معینہ سے ایک رسی کے ذریعہ جو تار کے نقطہ ب پر بندھی ہوئی ہے، لٹکا دیا گیا ہے اور دوسرا حصہ اب متوازی الافق ہے تو ثابت کرو کہ ب ج کو اب سے وہ نسبت ہے جو $\sqrt[4]{2}$ کو ۱ سے ہے۔

(۵) ایک سلاخ کا طول ۱۵ ہے اس کو موڑنے سے ایک منتظم مسدس کے پانچ اضلاع بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ مرکز ثقل کا فاصلہ سلاخ کے ایک سرے سے $\frac{1}{10}\sqrt{۱۳۳۶}$ ہے

(۶) ایک یکساں ذو زنقہ پترے کے متقابل اور متوازی اضلاع ج د اور اب میں سے پہلا دوسرے کا دو چند ہے تو اب اور ج د سے اب ج د کے مرکز ثقل کے جو فاصلے ہیں ان کا مقابلہ کرو۔

(۷) اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع پترے اب ج د کا مرکز ثقل اس کے راس زاویہ ا پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ خط ب د سے ا اور ج کے فاصلوں کی باہمی نسبت ۱ : ۲ ہے۔

(۸) ایک یکساں ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د کے اضلاع اب، اد اور قطر اج سب برابر ہیں اور زاوئے ب اج اور ج اد بالترتیب °۳۰ اور °۹۰ ہیں اگر مثلث اب ج کے دو تہائی وزن کے برابر ایک وزن نقطہ ب پر لگا دیا جائے اور یہ نظام نقطہ ا سے آویزاں ہو تو ثابت کرو کہ قطر اج کی سمت شاقولی ہوگی۔

(۹) ایک مثلث تختہ اب ج ایک چکنی کھونٹی پر جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتی ہے متوازن ہے اگر تین قوتیں جو اب، ب ج اور ج ا سے بالترتیب تعبیر ہو سکیں اس تختے کے اضلاع کی سمت میں عمل کریں تو بتاؤ کہ تختہ کے توازن پر کیا اثر ہوگا؟

(۱۰) تین قوتیں ایک مثلث اب ج کی سطح میں ایک

نقطہ و پر عمل کرتی ہیں اگر وہ خطوط و ا، و ب و ج سے تعبیر ہو سکیں تو نقطہ و کا مقام دریافت کرو تاکہ قوتیں متوازن ہوں -

(۱۱) ایک ذرہ ف پر تین قوتیں ل × ف ا، ل × ف ب، ل × ف ج نقاط ا، ب، ج کی سیدھ میں بالترتیب عمل کرتی ہیں ثابت کرو کہ ان کا حاصل ۳ ل × ف م ہے جہاں م مثلث ا ب ج کا مرکز ثقل ہے

(۱۲) ایک ذرہ ذ پر قوتیں ل × ذ ا، م × ذ ب، ن × ذ ج ... نقاط ا، ب، ج ... کی سیدھ میں بالترتیب عمل کرتی ہیں ثابت کرو کہ انکا حاصل (ل + م + ن + ...) ذ ک ہے جہاں ک ایسے اوزان کا مرکز ثقل ہے جو ل، م، ن .... کے متناسب ہوں اور نقاط ا، ب، ج .... پر رکھے جائیں [یہ دفعہ ۴۲ کی عام صورت ہے اور اس دفعہ کے متواتر استعمال سے ثابت ہو سکتی ہے -]

(۱۳) ایک یکساں سلاخ دو رسیوں کے ذریعہ آویزاں ہے رسیاں ایک طرف تو سلاخ کے سروں سے اور دوسری طرف ایک نقطہ معینہ پر بندھی ہیں تو ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ ان کے طولوں کے متناسب ہیں -

ثابت کرو کہ اگر یکساں مثلث تختی جو تین رسیوں کے ذریعہ جو ایک طرف تو تختے کے نقاط الزوایا اور دوسری طرف ایک نقطہ معینہ سے بندھی ہوں - آویزاں ہو تو

اس صورت میں بھی تناؤ طولوں کے متناسب ہونگے۔

(۱۴) اگر ایک مخروط کی تمام بیرونی سطح (جس میں اسکا مستوی قاعدہ بھی شامل ہے) کا مرکز ثقل اس کے حجم کے مرکز ثقل پر منطبق ہو تو مخروط کا زاویہ راس دریافت کرو۔

(۱۵) ایک مخروط اور اسطوانہ کے قاعدے باہم برابر ہیں اگر ان کو اکٹھا جوڑ دیا جائے اور ان کا مرکز ثقل مشترک قاعدہ کے مرکز پر ہو تو مخروط کے ارتفاع اور اسطوانہ کے ارتفاع کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

(۱۶) اگر ایک یکساں اسطوانہ سے ایک ایسا مخروط کاٹنا مطلوب ہو جس کا قاعدہ تو وہی ہو جو اسطوانہ کا قاعدہ ہے اور باقی جسم کا مرکز ثقل مخروط کے راس پر منطبق ہو تو بتاؤ کہ اس مخروط کو کس طرح کاٹیں؟

(۱۷) اگر قاعدہ مخروط کے قطر کو ارتفاع سے نسبت ۱ : ۲√ کی ہو تو ثابت کرو کہ جب بڑے سے بڑا کرہ اس میں سے کاٹ کر نکالدیا جائے تو باقی جسم کا مرکز ثقل مخروط کے مرکز ثقل پر منطبق ہوگا۔

(۱۸) ایک یکساں قایم مخروط کا زاویہ ۶۰° ہے اس میں سے بڑے سے بڑا کرہ کاٹ کر خارج کر دیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ جسم کا مرکز ثقل محور کو نسبت ۱۱ : ۴۹ میں تقسیم کرتا ہے

(۱۹) ایک ٹھوس قایم مخروط مستدیر کے قاعدہ کو کھودکر مخروط کے اندر ایک ایسا جوف پیدا کر دیا گیا ہے جسکی

شکل ایک قائم مخروط مستدیر کی ہے اور جس کا قاعدہ تو وہی ہے جو اصلی مخروط کا مگر جس کا ارتفاع اصل مخروط کے ارتفاع کا نصف ہے اس طرح سے جو مخروط حاصل ہوتا ہے اس کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرو۔

(۲۰) ایک یکساں مثلث مساوی الاضلاع ا ب ج کا زاویہ ا ایک چکنی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور ایک رسی ب د جس کا طول مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہے اور اس کا ایک سرا نقطہ ا کے عمود آ اوپر ایک نقطہ د پر بندھا ہوا ہے مثلث کو سہارے ہوئے ہے ثابت کرو کہ سطح دیوار سے ب اور ج کے فاصلوں کی باہمی نسبت ۱ : ۵ ہے۔

(۲۱) ایک مخروط کا ارتفاع اس کے قاعدہ کے نصف قطر کا چارگنا ہے مخروط کو محیط قاعدہ کی کسی نقطے سے لٹکایا گیا ہے تو ثابت کرو کہ یہ ایسی حالت میں متوازن ہوگا کہ قاعدہ اور محور سمت عمودی سے برابر زاوے بنائیں۔

(۲۲) دو قائم مخروط ایک ہی چیز کے بنے ہوئے ہیں ان کے اضلاع مائل برابر ہیں اور ان کے زوایاء راس بالترتیب ۶۰° اور ۱۲۰° ہیں اگر ان کو اس طرح سے باہم وصل کردیا جائے کہ انکا ایک ضلع مائل مشترک ہو اور اُن دونوں کو راس مشترک سے لٹکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ ان کا خط تماس سمت راس سے زاویہ ۱۵° کا بنائے گا۔

(۲۳) ایک کاغذ کے مثلث ٹکڑے کو دو اضلاع کے خط تنصیف پر شکن دیکر دوہرا کیا گیا ہے اور اس طرح سے مثلث کا راس قاعدہ مثلث پر پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس حالت میں کاغذ کے مرکز جمود کا فاصلہ قاعدہ مثلث سے اس فاصلہ کا ۳/۴ گنا ہے جو کھلے کاغذ کے مرکز جمود اور قاعدۂ مثلث کے درمیان ہے۔

(۲۴) ایک سخت کاغذ کا مستطیلی تختہ ایک میز پر پڑا ہے اس کے طول اور عرض کی باہمی نسبت ۲√ : ۱ ہے کاغذ کا بڑا ضلع میز کے کنارہ پر عمود وار ہے اور اس کا کچھ حصہ کنارہ سے باہر نکلا ہوا ہے۔ میز پر جو کاغذ کے دو کونے ہیں ان کو اسطرح شکن دیکر دوہرا کیا گیا ہے کہ شکن اس ضلع کے نقطہ وسط میں سے گزرتے ہیں جو کونوں کو ملاتا ہے اور اس ضلع سے زاوئے ۴۵° کے بناتے ہیں اب اگر کاغذ میز پر سے عین گر جانے کو ہو تو ثابت کرو کہ ابتدا میں اس کے طول کا ۲۱/۲۴ حصہ میز پر تھا۔

(۲۵) ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اس کے (ن - ۱) نقاط الزوایا میں سے ہر ایک پر مساوی ذرات رکھے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ کثیر الاضلاع کے بیرونی دائرہ کے مرکز سے ر/(ن-۱) ہے۔ اس میں ر دائرہ کا نصف قطر ہے۔

(۲۶) ایک گول پترے کے اندر ایک مربع سوراخ نکالا گیا ہے

ور مربع کا قطر دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے ثابت
رو کہ باقی شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز دائرہ سے $\frac{\text{ا}}{۸\pi-۴}$ ہے
یہاں ا دائرہ کے قطر کو تعبیر کرتا ہے۔

(۲۷) ایک یکساں مثلثی تختے کا اندرونی دائرہ کاٹ کر
نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ باقی حصہ کے مرکز ثقل کا
فاصلہ مثلث کے کسی ضلع ا سے $\frac{\text{م}}{۳\,\text{آن}}$ $\frac{\text{ن}^۳-۳\pi\,\text{آم}}{\text{ن}^۲-\pi\,\text{م}}$ ہے
جس میں م تختہ کا رقبہ اور ن اس کا نصف مجموعہ
اضلاع ہے۔

(۲۸) ایک یکساں گول پترے میں ایک گول سوراخ
نکالا گیا ہے اگر سوراخ کا رقبہ ایک مقدار معلومہ کے برابر
ہو تو ثابت کرو کہ باقی شکل کا مرکز ثقل ایک خاص دائرہ
کے اندر واقع ہوگا۔

(۲۹) ایک مسطح ذو اربعۃ الاضلاع پترے کے نقاط الزوایا
اور قطروں کے نقطہ تقاطع کے فاصلے ایک ایسے خطے
جو پترے کے سطح مستوی پر واقع ہے $\text{ا}_۱$، $\text{ب}_۱$، $\text{ج}_۱$؛ $\text{د}_۱$، $\text{ع}_۱$ ہیں
ثابت کرو کہ اس کے مرکز جمود کا فاصلہ اسی خط سے

$$\frac{۱}{۳}\left(\text{ا}_۱+\text{ب}_۱+\text{ج}_۱+\text{د}_۱-\text{ع}_۱\right)$$ ہے۔

فرض کرو کہ نقاط الزوایا ا، ب، ج، د ہیں اور قطروں کا
نقطہ تقاطع ع ہے تب

$$\frac{\triangle\,\text{اجد}}{\triangle\,\text{اجب}}=\frac{\text{عمود نقطہ د سے اج پر}}{\text{عمود نقطہ ب سے اج پر}}=\frac{\text{دع}}{\text{عب}}=\frac{\text{د}_۱-\text{ع}_۱}{\text{ع}_۱-\text{ب}_۱}$$

بموجب دفعات ۱۰۴ اور ۱۱۱ $\triangle$ اجد کے مرکز ثقل کا

فاصلہ و لا سے (ا، + ج، + د،)/۳ ہے اور △ ا ج ب کے مرکز ثقل کا فاصلہ اسی خط سے (ا، + ب، + ج،)/۳ ہے اس لئے مرکز ثقل مطلوب کا فاصلہ و لا سے

= [△ ا ج د × ۱/۳ (ا، + ج، + د،) + △ ا ج ب × ۱/۳ (ا، + ب، + ج،)] ÷ [△ ا ج د + △ ا ج ب]

= ۱/۳ × [(د، − ع،) (ا، + ج، + د،) + (ع، − ب،) (ا، + ب، + ج،)] ÷ [(د، − ع،) + (ع، − ب،)]

= ۱/۳ (ا، + ب، + ج، + د، − ع،)

(۳۰) دو ذرات کے مقام ا اور ب ہیں ان میں سے ہر ایک کی مقدار مادہ بالترتیب م اور ن ہے ان کا مرکز ثقل ش ہے اگر ط کوئی نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

م × اط۲ + ن × ب ط۲ = م × اش۲ + ن × ب ش۲ + (م + ن) ط ش۲

اسی طرح سے اگر ذرات کی کوئی تعداد ہو جن میں مادہ کی مقداریں م، ن، ف، .... ہوں اور جن کے مقام بالترتیب ا، ب، ج .... ہوں اور ش ان کا مرکز ثقل ہو تو ثابت کرو کہ

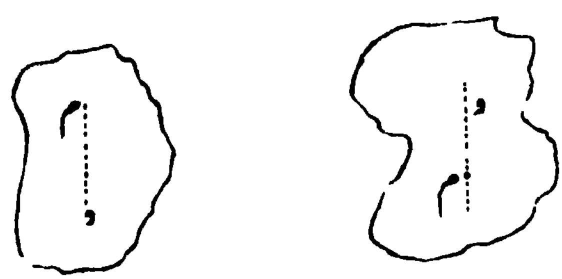
م × اط۲ + ن × ب ط۲ + ف × ج ط۲ + ...

= م × اش۲ + ن × ب ش۲ + ف × ج ش۲ + ... + (م + ن + ف + ...) ط ش۲

باب دہم

مرکز ثقل (مسلسل)

(۱) اگر کسی متوازن استوار جسم کا صرف ایک نقطہ ثابت ہو اور اس پر اس کے وزن اور ثابت نقطے کے عمل کے سوائے اور کوئی قوت عمل نہ کرے تو جسم کا مرکز ثقل اس سمت شاقولی میں ہوگا جو جسم کے ثابت نقطے میں سے گزرتی ہے +
فرض کرو کہ جسم کا ثابت نقطہ و ہے اور اس کا مرکز ثقل م ہے۔



جسم پر مفصلہ ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں۔جسم کے ثابت نقطہ پر کا رد عمل اور جسم کے اجزاء ترکیبی کے اوزان، ان ترکیبی اجزا کے اوزان ایک ایسی شاقولی قوت کے برابر ہیں جو جسم کے

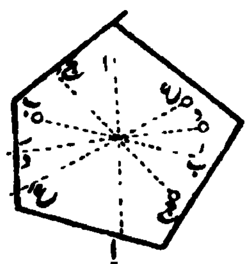
مرکز ثقل میں سے گزرتی ہے نیز جب دو قوتیں ایک جسم کو توازن میں رکھیں تو لازماً وہ متساوی اور متقابل ہونگی اور ان کا خط عمل ایک ہی ہوگا۔ لیکن خط عمل ایک نہیں ہوسکتا جب تک کہ خط شاقولی جو نقطہ م میں سے گزرتا ہے نقطہ و میں سے ہوکر نہ گزرے۔ دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں پہلی جس میں مرکز ثقل م نقطہ ثابت و کے ٹھیک نیچے ہو اور دوسری جس میں کہ وہ عین اوپر ہو+

صورت اول میں اگر جسم کو اپنے محل توازن سے ذرا ایک طرف ہٹا دیا جائے تو اس میں اپنے اصلی محل کی طرف عود کرنے کا میلان ہوگا+

صورت دوم میں جسم اپنے محل توازن کے طرف عود کرنیکا میلان نہیں رکھیگا+

(۱۲۰) کسی شکل کے جسم کا مرکز ثقل بذریعہ تجربہ دریافت کرو+

مقوے کا ایک چپٹا ٹکڑا کسی شکل کا لو اور اس میں کئی ایک چھوٹے چھوٹے سوراخ ا، ب، ج، د..... نکالو جن میں ایک باریک سوئی بآسانی داخل ہوسکے+



مقوے کو سوراخ ا سے لٹکاؤ اور اس کو بلا تکلف لٹکنے دو جب تک وہ خود بخود ساکن نہ ہو جائے نقطہ ا میں سے گزرنیوالے خط شاقولی کا مقوے پر نشان دو اور ایسا کرنے کی سب سے بہتر ترکیب

یہ ہے کہ ایک باریک ڈورے پر کچھ سفید کھریا مٹی اچھی طرح سے ملو اور پھر اس تاگے کے ذریعہ ایک چھوٹا سا وزن سوئی سے ٹکاؤ اور ڈورے کو مقوے پر آہستہ سے جھٹکاؤ اس کا اثر یہ ہوگا ایک سفید سا خط ا اَ مقوے پر بن جائیگا اس کے بعد مقوے کو سوراخ ب سے ٹکاؤ اور اسی طرح مقوے پر خط ب بَ کا نشان دو جو اس حالت میں شاقولی ہے۔ اسی طرح سے نقاط ج، د، ع ...... پر سوئی گزار کر تجربہ کرو اور ان کے متعلقہ خطوط ج جَ، د دَ، ع عَ دریافت کرو +

یہ تمام خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ، ع عَ ایک ہی نقطہ م میں سے گزرینگے اگر مقوے کی موٹائی نظر انداز کردیجائے تو یہ نقطہ م مقوے کا مرکز ثقل ہوگا۔ اب اگر ایک سوئی نقطہ م میں سے گزرے تو اس نقطہ پر مقویٰ ہر حالت میں متوازن ہوگا +

(۱۲۱) اگر ایک جسم کے قاعدہ کو افقی سطح پر رکھدیا جائے تو اگر جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنیوالا شاقولی خط قاعدہ کے اندر پڑے تو جسم قائم رہیگا اور اگر باہر پڑے تو جسم گر پڑیگا + دو قسم کی قوتیں جسم پر عمل کرتی ہیں ایک تو اس کا وزن جو اس کے مرکز ثقل م پر عمل کرتا ہے دوسرے سطح مستوی کے عمل۔ جو قاعدہ جسم کے مختلف نقاط پر عمل کرتے ہیں +

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



یہ عمل سب سمت راس میں عمل کرتے ہیں اس لئے وہ ایک قوت واحد میں تحویل ہو سکتے ہیں جو قاعدہ کے کسی ایک نقطہ پر عمل کرتی ہے +

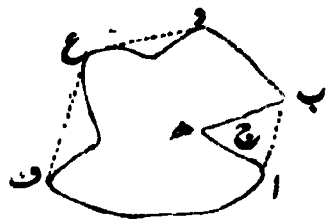
چونکہ دو موافق متوازی قوتوں کا حاصل ہمیشہ اُن قوتوں کے درمیان کسی نقطہ پر عمل کرتا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کے قاعدہ پر جو عمل ہیں ان کا حاصل قاعدہ کے باہر کسی نقطہ پر عمل نہیں کرسکتا۔

لہذا اگر جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنیوالا خط شاقولی ایک ایسے نقطہ میں سے ہوکر گزرے جو قاعدہ کے باہر ہو تو وہ حاصل عمل کے ساتھ متوازن نہیں ہوسکتا +

اس لئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں جسم کا توازن قائم نہیں رہیگا اور جسم گر پڑیگا +

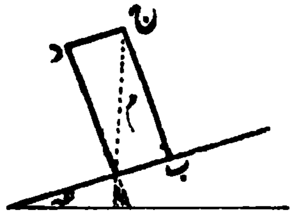
اگر جسم کا قاعدہ ایک ایسی شکل ہو جس میں ایک یا ایک سے زیادہ زاوئے دو قائموں سے بڑے

ہوں جیسا کہ شکل ذیل سے ظاہر ہے تو اس



صورت میں ہم کو لفظ "قاعدہ" کے معنی کی توسیع کرنی پڑیگی۔ ایسی صورت میں قاعدہ جسم سے ہماری مراد وہ شکل ہوگی جو قاعدہ ہندسی کے گرد ایک رسی کو کسکر لپٹنے سے حاصل ہو۔ شکل بالا میں قاعدہ جسم سے مراد کل رقبہ ا ب د ع ف ا ہے + مثلاً نقطہ ج جس پر کہ حاصل عمل عمل کرتا ہے رقبہ ا ھ ب کے اندر واقع ہوسکتا ہے۔ لیکن یہ نقطہ دار خط ا ب کے باہر نہیں واقع ہوسکتا +

اگر نقطہ ج خط ا ب پر نقاط ا اور ب کے درمیان واقع ہو تو جسم اس وقت عین گر پڑنے کو ہوگا +



مثال۔ ایک اسطوانہ کا ارتفاع ف اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے اس کو ایک سطح مائل پر رکھکر پھسلنے سے روکا گیا ہے۔ اب اگر سطح کے میلان کو بتدریج بڑھایا جائے تو بتاؤ کہ کب اسطوانہ

الٹ جائے گا +

فرض کرو کہ شکل شال ہذا اسطوانہ کی اس تراش کو تعبیر کرتی ہے جس وقت اسطوانہ الٹ جانے کو ہے اسوقت جسم کے مرکز ثقل م میں سے گزرنیوالا خط شاقولی ٹھیک قاعدہ کے کنارے ا میں سے گزرے گا۔ لہذا اس وقت زاویہ ج ا د سطح مائل کے زاویہ میلان عہ کے برابر ہوگا پس

$$\frac{ت}{۲ر} = \frac{ج ب}{ا ب} = مس ج ا ب = مم عہ$$

$\therefore$ مس عہ = $\frac{۲ر}{ت}$ جس سے سطح مائل کا میلان مطلوب حاصل ہوتا ہے +

توازن قائم وغیر قائم وتعدیلی

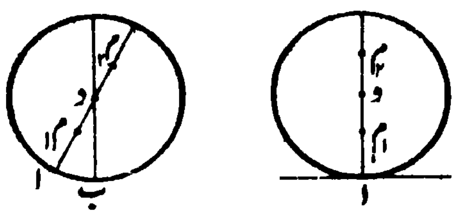
(۱۲۲) دفعہ ۱۱۹ میں ضمناً ہم نے اس بات کا ذکر کیا تھا کہ اُس دفعہ کی شکل اول میں اگر جسم کو ذرا سا اپنے مقام سے ہٹا دیا جائے تو اس میں اپنے اصلی محل توازن کے طرف عود کرنے کا میلان ہوگا اور شکل دوم میں جسم کا میلان اپنے اصلی محل توازن کے طرف عود کرنے کا نہیں ہوگا بلکہ اس مقام سے اور زیادہ دور ہٹ جائے گا ان دو اجسام کے توازن کو بالترتیب قائم اور غیر قائم کہتے ہیں +

نیز اگر ایک مخروط کے چپٹے گول قاعدے کو ایک سطح افقی پر رکھیں اور ایک طرف ذراسی جنبش دیں تو یہ اپنے محل توازن کے طرف عود کرے گا۔ اگر مخروط اپنے راس کے بل سطح افقی پر قائم ہو تو ذراسی جنبش سے یہ اپنے محل توازن سے

اور بھی بعید ہوجائے گا۔ لیکن اگر اس کا ضلع مائل سطح مستوی پر رکھا ہوا ہوتو ہر ایک مقام میں یہ متوازن ہوگا۔ آخری صورت میں اس کا توازن تعدیلی کہلاتا ہے

(۱۴۳) اب فرض کرو کہ ایک وزنی کرہ ایک سطح مستوی پر ساکن ہے اور اس کا مرکز ثقل اس کے مرکز پر منطبق نہیں ہوتا +

فرض کرو کہ شکل اول کرہ کے محل توازن کو تعبیر کرتی ہے جس میں مرکز ثقل مرکز کرہ سے یا تو نیچے ہے جیسے م۱ یا اوپر جیسے م۲۔



دوسری شکل میں فرض کرو کہ کرہ کو تھوڑا سا گھما دیا گیا ہے اور اب اس کا نقطہ تماس سطح مستوی کے ساتھ ب ہے۔ سطح مستوی پر کا عمل اب بھی کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اگر جسم کا وزن م۱ میں سے گزرے تو ظاہر ہے کہ جسم اپنے اصلی محل توازن کے طرف عود کرے گا۔ پس معلوم ہوا کہ جسم کا توازن ابتدا میں قائم تھا

اگر وزن نقطہ م۲ پر عمل کرے تو جسم اپنے اصلی محل توازن سے

دور ہوتا جائے گا۔ پس معلوم ہوا کہ جسم کا توازن ابتدا میں غیر قائم تھا +

لیکن اگر جسم کا مرکز ثقل و پر ہوتا تو شکل دوم میں بھی سطح مستوی کا عمل اور کرہ کا وزن باہم متوازن ہوتے اور جسم اپنے نئے مقام میں متوازن ہوتا یعنی اس صورت میں جسم کا توازن تعدیلی ہوتا +

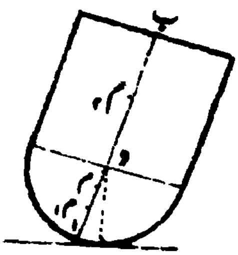
(۱۲۴) **تعریف**۔ اگر ایک متوازن جسم کو ذراسی جنبش دے کر اس کے محل توازن سے ذرا ہٹا دیں اور جو قوتیں اس پر عمل کرتی ہیں وہ اس کو محل توازن کی طرف واپس لانے کا میلان رکھیں تو جسم کا توازن **قائم** کہلائے گا۔ اگر ذراسی جنبش کے بعد قوتیں اس کو اصلی محل توازن سے دور لیجانے کا میلان رکھیں تو توازن **غیر قائم** کہلائے گا لیکن اگر جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں ہر ایک ایسے نئے مقام میں متوازن ہوں تو توازن **تعدیلی** کہلائے گا۔ بالعموم جن اجسام کا اوپر کا حصہ بھاری ہو یا قاعدہ چھوٹا ہو ان کے توازن غیر قائم ہوتے ہیں۔ اگرچہ نظراً تو ایک سوئی مستوی میز پر اس طرح سیدھی کھڑی کیجاسکتی ہے کہ وہ متوازن ہو۔ مگر عملی طور پر اس کا "قاعدہ" اتنا چھوٹا ہوتا ہے کہ ذراسی جنبش سے اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنیوالا خط شاقولی قاعدہ سے باہر نکل جائے گا اور سوئی گر پڑیگی اسی طرح سے اگر بلیرڈ کھیلنے کی لکڑی کو اس کی نوک پر سیدھا کھڑا کریں تو اس کی بھی یہی کیفیت ہوگی +

پس عام اصول یہ ہے کہ ایک جسم کا توازن قائم ہوگا۔ اگر اس کا مرکز ثقل اپنے تمام ممکن الوقوع مقامات میں سے سب سے نچلے مقام پر واقع ہو۔ اس کی مثالیں گھڑی کا رقاص اور دفعہ گزشتہ کی صورت ہے جس پر بحث ہوچکی ہے، دیکھنے میں آیا ہوگا کہ اگر گھڑی کے رقاص کو اس کی حالت توازن سے ایک طرف ہٹا دیں تو وہ اصلی محل کیطرف ہمیشہ عود کرتا ہے

نیز اس صورت پر غور کرو جب ایک بازیگر ایک تنی ہوئی رسی پر چلتا ہے۔ اس کے ہاتھ میں ہمیشہ ایک بانس ہوتا ہے۔ جس کا ایک سرا خاص طور پر بوجھل ہوتا ہے اور وہ بانس کو اس طرح سے اٹھائے رکھتا ہے کہ اس کا اور بانس دونوں کا مرکز ثقل عین اس کے پاؤں کے نیچے ہو جب وہ اپنے آپ کو ایک طرف گرتا ہوا محسوس کرتا ہے تو بانس کی گرفت کو وہ اس طرح بدلتا ہے کہ یہ مرکز ثقل اس کے پاؤں کے دوسری طرف ہوجائے اور اس طرح تمام اوزان کا حاصل اس کو پھر سیدھا کھڑا کردیتا ہے +

نظراً اگر کسی جسم کے مقامات توازن ایک سے زیادہ ہوں تو بالعموم اس کے توازن کا محل قائم وہ ہوگا۔ جس میں اس کا مرکز ثقل نچلے سے نچلے مقام پر واقع ہو اور وہ مقام جس میں مرکز ثقل سب سے اونچے مقام پر واقع ہو بالعموم غیر قائم ہوگا +

(۱۲۵) ایک یکذات جسم ایک اسطوانہ اور نصف کرہ کے قاعدوں کو باہم وصل کرنے سے بنا ہوا ہے اگر اس کے کروی پہلو کو ایک افقی میز پر رکھدیا جائے تو دریافت کرو کہ اس کا توازن قائم ہوگا یا غیر قائم۔



فرض کرو کہ نصف کرہ اور اسطوانہ کے مرکزِ ثقل باترتیب $م_1$ ہیں اور $م_2$ ہیں اور ا جسم کا وہ نقطہ ہے جو ابتدا میں میز پر دہرا ہے نیز فرض کرو کہ نصف کرہ کے قاعدہ کا مرکز و ہے اگر اسطوانہ کا ارتفاع ف ہو اور قاعدہ کا نصف قطر ر ہوتو $و م_1 = \frac{۳}{۸} ر$

اور $و م_2 = \frac{ف}{۲}$ (دفعہ ۱۱۷)

نیز نصف کرہ اور اسطوانہ کے اوزان $\frac{۲}{۳} \pi ر^۳$ اور $\pi ر^۲ \times ف$ کے متناسب ہیں۔

جسم کو ذراسی جنبش دینے کے بعد بھی سطح کا عمل مرکز و میں سے گزرتا ہے پس توازن قائم یا غیر قائم ہوگا اگر جسم مرکب کا مرکزِ ثقل م نقطہ و سے اوپر ہو یا نیچے یعنی اگر

$و م_1 \times$ نصف کرہ کا وزن $\gtrless و م_2 \times$ اسطوانہ کا وزن

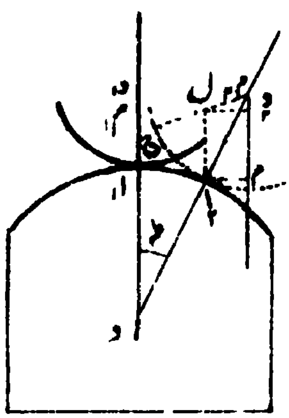
یعنی اگر $\frac{۳}{۸} ر \times \frac{۲}{۳} \pi ر^۳ \gtrless \frac{ف}{۲} \times \pi ر^۲ ف$

یعنی اگر $\frac{ر^۲}{۲} \gtrless ف^۲$

یعنی اگر $ر \gtrless \sqrt{۲}\, ف$

یعنی اگر $ر \gtrless ف \times ۱٫۴۲$

(۱۳۶) اس کتاب کی حدود میں ہم توازن کی ان عام صورتوں پر بحث نہیں کرسکتے جہاں ایک جسم کسی دوسرے جسم پر ساکن ہو دفعہ ذیل میں صرف ہم اس صورت پر غور کریں گے جس میں دو اجسام کے مس کرنے والے حصے کروی ہوں + ایک جسم ایک دوسرے جسم ثابت پر متوازن ہے دونو اجسام کے باہم مس کرنیوالے حصے کروی ہیں اور ان کے نصف قطر بالترتیب ر اور رَ ہیں اگر پہلے جسم کو ذراسی جنبش دیجائے تو معلوم کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم، اس میں مان لوکہ اجسام اس قدر کھردرے ہیں کہ پھسلتے نہیں ہیں +



فرض کرو کہ نچلے جسم کی سطح کروی کا مرکز د ہے اور اوپر کے جسم کی سطح کروی کا مرکز د‌ا ہے چونکہ اجسام متوازن ہیں اس لئے اوپر کے جسم کا مرکز ثقل م‌ا لازماً خط د د‌ا میں واقع ہوگا جو اجسام کے نقطہ تماس ا میں سے ہوکر گزرتا ہے +

فرض کرو کہ ا م‌ا = ف

فرض کرو کہ اوپر کا جسم ایک خفیف جنبش سے لڑھکر ایک نیا مقام اختیار کرلیتا ہے جس میں اوپر کے جسم کا مرکز ثقل م‌۲ اور نیا نقطہ تماس ا‌۲ ہوجاتا ہے۔ نیز اب مرکز ثقل کا نیا

مقام م۲ ہے اور نقطہ ا۱ کا نیا مقام ج ہے اس لئے ج م۲ = ف نقطہ ا۲ میں سے ایک عمودی خط ا۲ ل ایسا کھینچو جو و۲ ج کو نقطہ ل پر ملے اور خط و۲ م کو سمت شاقولی میں کھینچو تاکہ وہ ا۲ میں سے گزرنیوالے خط افقی کو نقطہ م پر ملے +

فرض کرو کہ زاویہ ا۲ و ا۱ = طہ اور ا۲ و۲ ج = فہ یعنی زاویہ ج و۲ م = (طہ + فہ)

اب چونکہ اوپر کا جسم صرف ڈھلکر نئے مقام پر گیا ہے اس لئے قوس ا۱ ا۲ برابر قوس ج ا۲ کے ہے اس لئے (بموجب علم مثلث دفعہ ۱۵۸)

ر × طہ = رَ × فہ .... (۱)

جہاں رَ اور ر بالترتیب اوپر کی اور نچلی سطحوں کے نصف قطر ہیں +

اب توازن قائم یا غیر قائم ہوگا۔ اگر م۲ خط ا۲ ل کی بائیں یا دائیں طرف ہو یعنی اگر م۲ کا فاصلہ و۲ م سے بڑا یا چھوٹا ہو اس فاصلہ سے جو نقطہ ل کا خط و۲ م سے ہے یعنی ا۲ م سے

یعنی اگر و۲ م۲ جب (طہ + فہ) > یا < و۲ ا۲ جب طہ

یعنی اگر (رَ - ف) جب (طہ + فہ) > یا < رَ جب طہ

یعنی اگر $\frac{رَ - ف}{رَ}$ > یا < $\frac{جب\ طہ}{جب\ (طہ + فہ)}$

لیکن $\frac{جب\ طہ}{جب\ (طہ + فہ)} = \frac{طہ}{طہ + فہ}$ (چونکہ طہ اور فہ نہایت چھوٹے ہیں) +

$= \frac{رَ}{ر + رَ}$ بموجب مساوات (۱)

اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا اگر $\frac{\text{ر}' - \text{ف}}{\text{ر}'} > \text{یا} < \frac{\text{ر}'}{\text{ر} + \text{ر}'}$

یعنی اگر $\text{ر}' - \frac{\text{ر}'^{2}}{\text{ر} + \text{ر}'} > \text{یا} < \text{ف}$

یعنی اگر $\frac{\text{ر}\,\text{ر}'}{\text{ر} + \text{ر}'} > \text{یا} < \text{ف}$

یعنی اگر $\frac{1}{\text{ف}} > \text{یا} < \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}'}$

اگر $\frac{1}{\text{ف}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}'}$ تو اس صورت میں بعض اوقات توازن تعدیلی کہلاتا ہے مگر فی الحقیقت یہ غیر قائم ہوتا ہے لیکن اس امر کی تحقیق اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

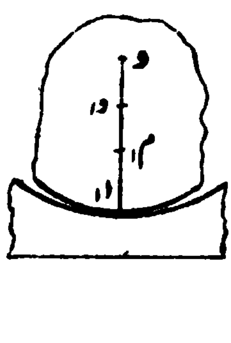
پس توازن صرف اس صورت میں قائم ہوگا جب $\frac{1}{\text{ف}} > \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}'}$

اور باقی تمام صورتوں میں غیر قائم ہوگا +

نتیجہ صریح ۱ — اگر نچلے جسم کی سطح شکل بالا کی طرح محدب ہونیکی بجائے مقعر ہو جیسا کہ شکل ذیل میں ہے تو اس صورت میں بھی تحقیقات مندرجہ بالا صادق آئینگی بشرطیکہ ہم ر کی علامت بدل دیں

پس توازن قائم ہوگا اگر $\frac{1}{\text{ف}} > \frac{1}{\text{ر}'} - \frac{1}{\text{ر}}$

ورنہ یہ بالعموم غیر قائم ہوگا۔

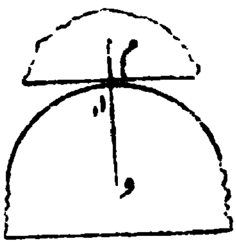


نتیجہ صریح ۲ — اگر اوپر کے جسم کا ایک مستوی رخ نچلے حصہ پر دہرا ہو جیسا کہ شکل ذیل میں ہے تو اس صورت میں رَ کی قیمت غیر متناہی ہوگی اور اس لئے ۱/رَ صفر ہوگا +

پس توازن کے قائم ہونیکی شرط یہ ہوئی کہ

۱/ف > ۱/ر

یعنی ف < ر



اس لئے ثابت ہوا کہ اگر اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا فاصلہ اس کے مستوی رخ سے نچلے جسم کے نصف قطر سے کم ہو تو توازن قائم ہوگا ورنہ ہر ایک صورت میں غیر قائم۔

نتیجہ صریح ۳ — اگر نچلا جسم ایک سطح مستوی ہو تو ر غیر متناہی ہوگا اور توازن قائم ہوگا اگر ۱/ف > ۱/رَ یعنی ف < رَ

اس لئے اگر ایک ایسے جسم کو جس کا قاعدہ کروی ہو ایک افقی میز پر رکھیں تو اس کا توازن قائم ہوگا اگر نقطہ تماس سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ کروی سطح کے نصف قطر سے کم ہو +

امثلہ نمبری (۲۰)

(۱) ایک بڑھئی کی مسطر طول میں ۲ فٹ ہے اسکو اس طرح موڑا گیا ہے کہ اس کے دونوں حصے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ چھوٹے حصہ کا طول ۸ انچ ہے اگر

چھوٹے حصہ کو ایک چکنی افقی میز پر رکھدیا جائے تو بتاؤ کہ مسطر کا کم از کم کتنا طول میز پر ہونا چاہیئے کہ وہ متوازن ہو؟

(۲) ایک دہات کے ٹکڑے کا حجم ۱۰ مکعب انچ ہے اور اس میں سے ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے جس کا قاعدہ ایک سطح افقی پر ٹکا ہوا ہے اگر سطح کا میلان افقی سے ۳۰° ہو اور اسطوانہ کو پھسلنے سے روکا جائے تو معلوم کرو کہ اسطوانے کا طول کتنا ہو کہ وہ سطح پر الٹ جانے کو ہو؟

(۳) ایک مثلثی پترا ا ب ج ایک چکنی ہموار میز پر کنارے ا ب کے بل سطح عمودی میں عین توازن میں کھڑا ہو سکتا ہے ثابت کرو کہ ب ج^{2} – ا ج^{2} = ۳ ا ب^{2} +

(۴) ایک یکساں مربع تختی ا ب ج د کا وزن و ہے ضلع ج د کی تنصیف نقطہ ع پر کی گئی ہے اور مثلث ا ع د کو کاٹ دیا گیا ہے تختی ا ب ج ع ا کا ضلع ج ع ایک سطح افقی پر دہرا ہے اور تختی سطح عمودی میں واقع ہے اس چھوٹے سے چھوٹے وزن کی مقدار معلوم کرو جو نقطہ ا پر رکھے جانے سے تختی کو الٹا دینے کیلئے عین کافی ہو +

(۵) ایک چپٹے تختے ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے اور اس کا ضلع ا ج ایک ہموار میز پر دہرا ہے ا ج کا نقطہ تنصیف د ہے اور مثلث ا ب د کو کاٹ دیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ اس حالت میں مثلث عین الٹنے کو ہے +

(۶) ایک اینٹ کو ایک دیوار پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے طول کی ایک چوتھائی دیوار کے کنارے پر سے باہر کو نکلی ہوئی ہے پھر ایک پوری اینٹ اور ایک چوتھائی اینٹ پہلی اینٹ پر اس طرح رکھی گئی ہیں کہ اینٹ کی ایک چوتھائی پہلی اینٹ کے کنارے پر سے باہر کو نکلی ہوئی ہے اس کے بعد اس پر ایک پوری اینٹ اور ایک آدھی اینٹ اسی طرح سے رکھی گئی ہے اور علیٰ ہذالقیاس ثابت کرو کہ اینٹوں کی چارتہیں اس طرح سے ایک دوسرے کے اوپر رکھی جاسکتی ہیں جو بغیر چونے کی مدد کے متوازن ہوں لیکن اگر پانچویں تہ کا اضافہ کیا جائے تو اینٹیں الٹ جائیں گی +

(۷) ایک ہی ناپ اور موٹائی کے سکوں کو ایک سطح مائل پر جس کا ارتفاع قاعدہ کا $\frac{1}{4}$ ہے ایک اسطوانے کی شکل کے انبار میں ایک دوسرے کے اوپر رکھنا منظور ہے اگر سکوں کی موٹائی ان کے قطروں کا $\frac{1}{12}$ ہو اور اگر فرض کرلیا جائے کہ سطح اتنی کھردری ہے کہ سکوں کو پھسلنے نہیں دیتی تو معلوم کرو کہ کتنے سکے ایک دوسرے کے اوپر اس طرح رکھے جاسکتے ہیں ؟

اگر ہر ایک سکہ کا کنارہ نچلے سکے پر سے باہر کی طرف کو تھوڑا نکلا ہوا ہو تو معلوم کرو کہ ہر ایک سکے کے قطر کی کو نسی کسر

اس طرح باہر کی طرف نکلی ہوئی ہونی چاہئے تاکہ سطح مائل پر ایک ایسا انبار کھڑا ہوسکے جسکا ارتفاع غیر متناہی ہو؟

(۸) اینٹوں کی ایک تعداد جن میں سے ہر ایک اینٹ ۹ انچ لمبی ۴ انچ چوڑی اور ۳ انچ موٹی ہے ایک دوسرے کے اوپر اس طرح رکھی گئی ہے کہ اُن کی موٹائیاں ایک سطح عمودی میں ہیں اور ہر ایک اینٹ اپنی نچلی اینٹ پر سے بقدر نصف انچ باہر نکلی ہوئی ہے سب سے نچلی اینٹ ایک میز پر رکھی گئی ہے تو معلوم کرو کہ کتنی اینٹیں اس طرح ایک دوسرے کے اوپر بغیر الٹنے کے رکھی جاسکتی ہیں؟

(۹) ایک مثلث متساوی الساقین ا ب ج کا وزن و ہے اور زاویہ ا = ۱۲۰° مثلث کا ضلع ا ب ایک چکنی ہموار میز پر دھرا ہوا ہے اور مثلث کی سطح عمودی ہے اگر ایک وزن و/۳ زاویہ ج سے لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ اس وقت مثلث عین الٹ جانے کو ہوگا۔

(۱۰) ایک ذو اربعۃ الاضلاع پترا ا ب ج د دو یکساں متساوی الساقین مثلثوں ا ب ج اور ا د ج سے ملکر بنا ہوا ہے۔ مثلثوں کے راس ب اور د قاعدہ مشترک ا ج کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں تو ثابت کرو کہ مثلث سطح عمودی میں متوازن ہوگا جب کہ اس کا ضلع ب ج ایک سطح افقی پر ٹکا ہوا ہو بشرطیکہ رقبہ ا د ج رقبہ ا ب ج کے چوگنے سے بڑا نہ ہو۔

(۱۱) ایک مخروط اور ایک نصف کرہ سے ملکر ایک جسم اس طرح بنا ہوا ہے کہ دونو ایک ہی قاعدہ پر اسکی مقابل جانبوں میں واقع ہیں اگر جسم کو ایک کھردری ہموار میز پر اس طرح رکھا جائے کہ صرف نصف کرہ میز سے مس کرے تو مخروط کا بڑے سے بڑا ارتفاع دریافت کرو کہ جسم کا توازن قائم ہو +

(۱۲) ایک اسطوانہ اور نصف کرہ کے نصف قطر مساوی ہیں ان کے قاعدوں کو جوڑنے سے ایک ٹھوس جسم بنایا گیا ہے اگر ایک افقی سطح پر جسم کی کروی سطح رکھدی جائے تو اسطوانہ کے ارتفاع اور نصف قطر کی باہمی نسبت معلوم کرو کہ جسم توازن تعدیلی میں ہوسکے +

(۱۳) ایک نصف کرہ ایک ایسے کرہ کی سطح پر متوازن ہے جس کا نصف قطر نصف کرہ کے نصف قطر کے برابر ہے ثابت کرو کہ جسم کا توازن بالترتیب قائم یا غیر قائم ہوگا بمطابق اس کے کہ نصف کرہ کی سطح مستوی یا سطح منحنی کرہ کی سطح رکھدیجائے +

(۱۴) ایک وزنی قائم مخروط کا قاعدہ ایک ایسے ثابت کھردرے کرہ پر ٹکا ہوا ہے جس کا نصف قطر معلوم ہے اگر مخروط کا توازن قائم ہو تو اس کا بڑے سے بڑا ارتفاع دریافت کرو +

(۱۵) ایک یکساں شہتیر کی موٹائی ۲ ب ہے اور وہ ایک بالکل کھردرے افقی اسطوانے پر تقشا کلاً ساکن ہے تو ثابت کرو کہ شہتیر کا توازن قائم ہوگا یا غیر قائم بمطابق اس کے

کہ ذ ب ا سے کم یا زیادہ ہو جہاں ا اسطوانے کا نصف قطر ہے +

(۱۶) ایک وزنی یکساں مکعب ایک کرہ کے سب سے اونچے نقطہ پر متوازن ہے کرہ کا نصف قطر ر ہے اگر کرہ اس قدر کھردرا ہو کہ مکعب کو پھسلنے نہ دے اور اگر مکعب کا ضلع $\frac{\pi}{2}$ر ہو تو ثابت کرو کہ مکعب بغیر گرنے کے ایک قائمے میں جھوم سکتا ہے +

(۱۷) ایک مثلث متساوی الساقین تختی کا زاویہ راس ۲ء ہے اور اس کو ایک ایسے کرہ پر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر ر ہے تختی سطح عمودی میں ہے اور اس کا ایک مساوی ضلع کرہ پر دہرا ہوا ہے تو ثابت کرو کہ اگر مثلث کو اپنی سطح میں ذراسی جنبش دیدیجائے تو اس کا توازن قائم ہوگا اگر جب ۲ء کم ہو $\frac{3ر}{ا}$ سے جہاں ا مثلث کے ایک مساوی ضلع کا طول ہے +

(۱۸) ایک سطح مائل پر ایک وزن معلوم ط ایک وزن و کو ایک رسی کے ذریعہ سہارتا ہے رسی ایک ثابت چرخی پر سے گزرتی ہے جس کا مقام معلوم ہے سطح پر و کا مقام معلوم کرو اور دریافت کرو کہ توازن قائم ہے یا غیر قائم +

(۱۹) ایک یکساں کھردری گول تختی کا نصف قطر ر اور وزن و ہے اور وہ ایک ایسے نقطے کے گرد حرکت کرسکتی ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج ہے ایک رسی جو اتنی کھردری ہے کہ پھسلتی نہیں ہے تختی کے محیط پر سے لٹکتی ہے اور اس کے سروں سے دو غیر مساوی اوزان $و_1$ اور $و_2$

بند ہے ہیں نظام کا مقام توازن دریافت کرو نیز معلوم کرو کہ توازن قائم ہے یا غیر قائم +

(۲۰) ایک ثابت کھردرے نصف کروی پیالے کے اندر ایک ٹھوس کرہ ساکن ہے پیالے کا نصف قطر کرہ کے نصف قطر کا دو چند ہے ثابت کرو کہ خواہ کتنا بڑا وزن کرہ کے سب سے اونچے نقطے پر باندھ دیا جائے۔ توازن قائم ہوگا +

(۲۱) ایک پتلے نصف کروی پیالے کا نصف قطر ب اور وزن و۱ ہے اور وہ ایک ثابت کرہ کے سب سے اونچے نقطے پر ساکن ہے کرہ کا نصف قطر ا ہے اور اس کی سطح اس قدر کھردری ہے کہ پیالہ اس پر پھسل نہیں سکتا پیالے کے اندر ایک چھوٹا چکنا کرہ وزنی و۲ رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن صرف اسی صورت میں قائم ہوسکتا ہے جب

$$و_2 > و_1 \times \frac{ا - ب}{2ب}$$

باب یازدہم

کام

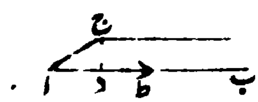
(۱۲۷) کام کی تعریف۔ جب۔ ایک قوت کا نقطہ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوت کام کرتی ہے۔ جو قوت کہ گھوڑا گاڑی کے کھینچنے میں لگاتا ہے۔ وہ کام کرتی ہے۔ جو قوت کہ ایک آدمی کسی بوجھ کے اٹھانے میں خرچ کرتا ہے وہ بھی کام کرتی ہے۔ انجن کے فشارہ کو حرکت دینے میں بھاپ کا دباؤ کام کرتا ہے۔ جب ہم کسی گھڑی یا گھڑیال (کلاک) کو کنجی دیتے ہیں تو ہم کام کرتے ہیں۔

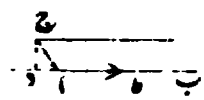
جو کام کہ قوت کرتی ہے اس کا اندازہ دو مقداروں کے حاصل ضرب سے کیا جاتا ہے اول قوت کی مقدار دوم وہ فاصلہ جو قوت کا نقطۂ عمل قوت کی سمت میں طے کرے۔
فرض کرو کہ قوت ط جو ایک جسم کے کسی نقطہ ا پر عمل کرتی ہے نقطہ ا کو حرکت دے کر د تک پہنچا دیتی ہے تو ط کے کام کا اندازہ ط اور ا د کے حاصل ضرب سے کیا جاتا ہے



اگر نقطہ د، ا کی اس سمت میں ہو جس سمت میں کہ قوت عمل کرتی ہے تو یہ کام مثبت کہلاتا ہے اگر د، ا کی

دوسری طرف واقع ہو تو کام منفی کہلاتا ہے۔
اب فرض کرو کہ قوت کا نقطہ عمل حرکت کرکے ایک ایسے نقطہ ج پر پہنچتا ہے - جو خط اب پر واقع نہیں ہے اب یا اب ممدودہ پر ج د عمود نکالو - تو اد وہ فاصلہ ہے جو قوت کے نقطہ عمل نے قوت کی سمت میں طے کیا ہے اس لئے پہلی شکل میں کام کی مقدار ط × اد ہے اور دوسری شکل میں -ط×اد ہے





قوت کے منفی کام کو بعض اوقات اس طرح بھی بیان کیا جاتا ہے کہ کام قوت کے مقابل یا خلاف کیا گیا۔
جس صورت میں کہ اج ، اب پر عمود ہوگا اس صورت میں ا اور د ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور قوت کا کام صفر ہوگا۔
مثلاً - اگر ایک جسم ایک افقی میز پر حرکت دیا جائے۔ تو اس کے وزن کا کام صفر ہے - اسی طرح اگر ایک جسم کو ایک سطح مائل پر حرکت دیں تو سطح کے عمودی عمل کا کام صفر ہوگا۔
(۱۲۸) سکونیات میں کام کی اکائی " فٹ پونڈ " کہلاتی ہے۔ اور یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈ وزن کی قوت کرتی ہے

جبکہ اس کا نقطہ عمل ایک فٹ کا فاصلہ قوت کی سمت میں طے کرے۔ "فٹ پونڈ" سے بہتر اصطلاح "فٹ پونڈ وزن" ہے اگرچہ ذرا بھدی ہے۔

مثلاً۔ جب ۱۰ پونڈ وزنی جسم ۴ فٹ نیچے کو گرتا ہے تو اسکا وزن ۱۰ × ۴ فٹ پونڈ کام کرتا ہے۔

اگر یہی جسم ۴ فٹ اوپر کو سمت راس میں اٹھایا جائے تو جسم کا وزن (-۱۰ × ۴) فٹ پونڈ کام کرے گا۔

(۱۲۹) دفعہ ۱۲۷ میں کام کی جو تعریف کیگئی ہے اس سے ظاہر ہے کہ کام میں حرکت لازم ہے۔ یہ ممکن ہے کہ ایک آدمی کسی جسم کو ہلانے کی کوشش میں بہت زور لگائے۔ اور کچھ کام نہ کرے۔

مثلاً۔ فرض کرو کہ ایک آدمی ایک بھاری لدی ہوئی گاڑی کے بم کو پکڑکر کھینچتا ہے اور اس کو ہلا نہیں سکتا خواہ وہ اپنا سارا زور لگائے۔ چونکہ جو قوت لگاتا ہے اس کا نقطہ عمل حرکت نہیں کرتا۔ اس لئے وہ اصطلاحی معنوں میں کام نہیں کرتا۔

(۱۳۰) **مسئلہ**۔ اگر ذرات کی کسی تعداد کو ایک مقام سے دوسرے مقام تک اٹھایا جائے۔ اور کل ذرات کا وزن **و** ہو اور وہ فاصلہ جو ان کے مرکز ثقل نے اوپر کی طرف سمت راس میں طے کیا ہے **ف** ہو تو ان ذرات کے اٹھانے میں کام کی مقدار **و** × **ف** ہوگی۔

فرض کرو کہ ذرات کے اوزان و۱، و۲، و۳ ۔ ۔ ون ہیں اور فرض کرو کہ پہلے مقام پر ایک افقی سطح سے ان کی بلندیاں لا۱، لا۲، لا۳ ۔ لان ہیں اور ان کے مرکز ثقل کی بلندی لاَ ہے تو بموجب دفعہ ۱۱۱

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \cdots + \text{و}_n \text{لا}_n}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots + \text{و}_n} \quad (1)$$

دوسرے مقام پر فرض کرو کہ ذرات کی بلندیاں لاَ۱، لاَ۲، لاَ۳ ۔۔۔ لاَن ہیں اور ان کے نئے مرکز ثقل کی بلندی لاً ہے

$$\text{تو } \bar{\bar{\text{لا}}} = \frac{\text{و}_1 \text{لاَ}_1 + \text{و}_2 \text{لاَ}_2 + \cdots + \text{و}_n \text{لاَ}_n}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \cdots + \text{و}_n} \quad (2)$$

لیکن چونکہ و۱ + و۲ + ۔۔۔۔۔۔ + ون = و اس لئے مساوات (۱)، (۲) سے

$$\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \cdots + \text{و}_n \text{لا}_n = \text{و}\,\bar{\text{لا}}$$

$$\text{و}_1 \text{لاَ}_1 + \text{و}_2 \text{لاَ}_2 + \cdots + \text{و}_n \text{لاَ}_n = \text{و}\,\bar{\bar{\text{لا}}}$$

عمل تفریق سے

$$\text{و}_1(\text{لاَ}_1 - \text{لا}_1) + \text{و}_2(\text{لاَ}_2 - \text{لا}_2) + \cdots + \text{و}_n(\text{لاَ}_n - \text{لا}_n) = \text{و}(\bar{\bar{\text{لا}}} - \bar{\text{لا}})$$

لیکن اس مساوات کی دائیں طرف اس تمام کام کی مقدار ہے۔ جو مختلف ذرات کو ابتدائی مقام سے اخری مقام تک اٹھانے میں کیا گیا ہے۔ نیز بائیں طرف = و × وہ فاصلہ جو مرکز ثقل نے سمت راس میں طے کیا۔ = و×ف

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

(۱۳۱) **طاقت کی تعریف۔** جس قدر کام کہ ایک

عامل وقت کی ایک اکائی میں یکساں رفتار سے کرتا ہے وہ اس کی طاقت کہلاتی ہے طاقت کی اکائی کو انجنیر اسپی طاقت کہتے ہیں۔ اگر یہ کہیں کہ ایک عامل ایک اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ ایک منٹ میں ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کام کرتا ہے۔ یعنی ایک منٹ میں ۳۳۰۰۰ پونڈ وزن کو ایک فٹ اٹھاتا ہے۔ یا ۳۳۰ پونڈ وزن کو ایک منٹ میں ۱۰۰ فٹ اٹھاتا ہے یا ۳۳ پونڈ وزن کو ایک منٹ میں ۱۰۰۰ فٹ اٹھاتا ہے۔

گھوڑے کی طاقت کا یہ اندازہ واٹ نے کیا تھا لیکن عام گھوڑوں کی طاقت اس قدر نہیں ہوتی۔

(۱۳۲) یہ یاد رہے کہ دفعہ ۱۳۰ کے نتیجہ کا انحصار کسی طرح بھی اس امر پر نہیں ہے کہ ابتدائی یا آخری مقام پر ذرات کی باہمی ترتیب کیا ہے۔ یہ انحصار صرف اسی حدتک ہے جس حدتک کہ مرکز ثقل کا ابتدائی یا آخری مقام ذرات کی باہمی ترتیب پر موقوف ہے۔

مثلاً۔ اگر زمین میں ایک گڑھا کھودا جائے۔ اور مٹی کو نکالکر گڑھے کے پاس سطح زمین پر بچھا دیا جائے۔ ہمیں صرف یہی معلوم کرنا ضروری ہے۔ کہ گڑھا کھودنے سے قبل مٹی کا مرکز ثقل کہاں تھا۔ اور پھر مٹی نکالکر باہر بچھانے کے بعد کہاں ہے۔ تب کام کی مقدار

معلوم ہوجائے گی۔ کام کی مقدار اس پر منحصر نہیں ہے
کہ شی اپنے ابتدائی مقام سے آخری مقام تک کس
راستے سے لائی گئی۔

مثال۔ ایک کنواں جس کی تراش عمودی ایک ۴ فٹ
ضلع کا مربع ہے۔ اور جس کا عمق ۳۰۰ فٹ ہے۔ پانی
سے بھرا ہوا ہے۔ اگر کل پانی کو نکالکر سطح زمین پر
ڈالا جائے۔ تو کام کی مقدار فٹ پونڈوں میں دریافت کرو
اور جو انجن کہ اس کام کو ایک گھنٹہ میں کرے اسکی
اسپی طاقت دریافت کرو۔

(یادداشت۔ پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۰۰۰
اونس ہوتا ہے)

کنوئیں کی تہ سے پانی کے مرکز ثقل کی بلندی پہلے
۱۵۰ فٹ تھی پھر ۳۰۰ فٹ ہوگئی۔ یعنی مرکز ثقل نے
۱۵۰ فٹ کا فاصلہ سمت راس میں طے کیا۔

پانی کا حجم = ۴ × ۴ × ۳۰۰ مکعب فٹ۔

اس لئے اس کا وزن = ۴ × ۴ × ۳۰۰ × $\frac{۱۰۰۰}{۱۶}$ پونڈ = ۳۰۰۰۰۰ پونڈ

پس کام کی مقدار = ۳۰۰۰۰۰ × ۱۵۰ فٹ پونڈ = ۴۵۰۰۰۰۰۰ فٹ پونڈ

اگر اسپی طاقت مطلوبہ لا ہو۔ تو انجن کے ایک گھنٹہ کا کام

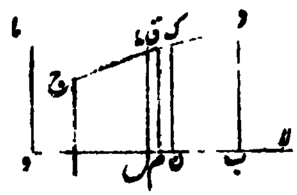
= لا × ۶۰ × ۳۳۰۰۰

یعنی لا × ۶۰ × ۳۳۰۰۰ = ۴۵۰۰۰۰۰۰

∴ لا = ۲۲ $\frac{۸}{۱۱}$

(۱۳۳) قوت کے کام کی ترسیمی تعبیر

بعض اوقات ایک تغیر پذیر قوت کے کام کا پورا حساب کرنا مشکل ہوتا ہے۔ لیکن اس کا قریب قریب اندازہ لگانا ممکن ہے۔ فرض کرو کہ قوت ہمیشہ خط و لا کی سمت میں عمل کرتی ہے اس کے نقطہ عمل کے ا سے ب تک حرکت کرنے میں جو کام ہو وہ دریافت کرنا مطلوب ہے ا اور ب پر قوت کی جو مقدار ہو اس کو تعبیر کرنے کے لئے معین اج اور ب د کھینچو۔ ا اور ب کے درمیان جس قدر نقطہ عمل ہیں مثلاً ل۔ ایسے ہر ایک نقطہ پر معین ل ط کھینچو جو ل پر عمل کرنے والی قوت کو تعبیر کرے۔ اگر تمام ایسے معینوں کی چوٹیوں کو ملائیں تو ج ط د جیسا خط منحنی پیدا ہوگا۔

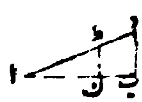


ل کے قریب ایک نقطہ م لو اور ایسا قریب لو کہ جب قوت کا نقطہ عمل ل سے م تک حرکت کرے تو قوت کو غیر متغیر مان سکیں۔ تب قوت کا کام

= مقدار قوت × وہ فاصلہ جو اس کے نقطہ عمل نے طے کیا ہے

= ل ط × ل م = رقبہ ط م قریباً

اسی طرح جب نقطہ عمل م سے ن تک حرکت کرے تو
کام = رقبہ ق ن قریباً و علیٰ ہذا القیاس پس جب
قوت کا نقطہ عمل ا سے ب تک حرکت کرتا ہے تو
ل م، م ن .... فاصلوں کو نہایت چھوٹا کرنے
سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوت کا کام قریب رقبہ
اج د ب کے مساوی ہے۔
جبکہ منحنی خط ج ط ۂ بے قاعدہ ہو تو اس کا رقبہ
تخمیناً اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ ا ب کو چند
(مثلاً دس) برابر حصوں میں تقسیم کرو۔ اور ہر ایک
حصہ کا وسطی معین لو اور ان وسطی معینوں کا اوسط
نکالو اور اس اوسط معین کو فاصلہ ا ب سے
ضرب دو۔ یہ قریباً اج د ب کا رقبہ ہوگا۔
(۱۳۴) مندرجہ بالا عمل کی ہم ایک مثال دیتے ہیں۔
فرض کرو کہ ایک قوت شروع میں صفر ہے اور پھر
اس نسبت سے بدلتی ہے جس نسبت سے کہ اس کے
نقطہ عمل کا طے کردہ فاصلہ بدلتا ہے (س) کا کام دریافت
کرو۔



اس صورت میں اج صفر ہے
اور ن ط = ل × ا ن
جہاں ل ایک مقدار غیر
متغیر ہے۔

$$ش \cdot س \cdot ط \cdot ان = \frac{ط \cdot ن}{ا \cdot ن} = ل$$

یعنی ط ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہے جو ا میں سے گزرتا ہے۔

∴ کام = رقبہ اب د = ½ اب × ب د = ½ × نقطہ عمل کا طے کردہ فاصلہ × قوت کی آخری مقدار۔

امثلہ نمبری (۲۱)

(۱) ایک آدمی کا کام دریافت کرو جب کہ

(ا) وہ ایک ۲۷۰۰ فٹ اونچے پہاڑ پر چڑھے اور اس کا وزن ۱۰ سٹون ہو۔

(ب) وہ دس میل بائیسکل کی سواری کرے اور اس کی حرکت کے مقابل مزاحمت ۵ پونڈ کے مساوی ہو۔

(۲) ایک زنجیر جس کی مقدار مادہ ۸ پونڈ فی فٹ ہے۔ ایک گڑھے میں سے نکال کر کھینچی جاتی ہے اس پر کام کی ۴۰ لاکھ اکائیاں خرچ ہوتی ہیں۔ زنجیر کا طول دریافت کرو۔

(۳) ایک گڑھا جس کی تراش عمودی ۱۰ فٹ × ۸ فٹ ہے۔ ۱۰۰ فٹ گہرا زمین میں کھودنا مطلوب ہے۔ مٹی کا وزن اوسطاً ۱۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔ تو گڑھے کی مٹی زمین پر لانے میں کس قدر کام کرنا پڑے گا؟

(۴) ۱۵۰ فٹ کی گہرائی سے ۱۰۰ اسپی طاقت کا انجن ایک گھنٹہ میں کتنا پانی نکالے گا؟

(۵) ایک پانی سے بھرے ہوئے عمودی گڑھے کا قطر ۹ فٹ ہے اور گہرائی ۲۰۴ فٹ ہے تو ۱۸ اسپی طاقت کا انجن اس کو کتنے گھنٹوں میں خالی کرے گا؟

(۶) ایک اسطوانی شکل کا گڑھا پانی سے بھرا ہوا ہے۔ اس کا قطر ۸ فٹ ہے اور عمق ۶۰۰ فٹ ہے تو کتنی اسپی طاقت کا انجن اس کو ۳۲ گھنٹہ میں خالی کرے گا؟

(۷) ۲۰ اسپی طاقت کا ایک انجن ۵۰۰ مکعب فٹ پانی ۱۰۰ فٹ کی گہرائی سے نکالنے کے لئے لگایا گیا ہے تو معلوم کرو کہ کام کتنے عرصہ میں ختم ہوگا۔ جب کہ ایک تہائی کام رگڑ وغیرہ کے باعث ضائع ہو جاتا ہے

(۸) ایک آدمی کا بوجھ ۱۰ سٹون ہے۔ اور وہ ایک رسی پر ۱۸ انچ فی سکنڈ کی رفتار سے چڑھتا ہے تو ثابت کرو کہ اس کے کام کی رفتار $\frac{۲}{۵}$ اسپی طاقت سے ذرا کم ہے۔

(۹) ایک برج اینٹوں کا بنانا مقصود ہے۔ اس کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کی بیرونی پیمائش ۲۲ فٹ × ۹ فٹ ہے۔

برج کی بلندی ۶۶ فٹ ہے۔ اور دیواروں کی موٹائی ۲ فٹ ہے۔ تو معلوم کرو۔ کہ ایک ۳ اسپی طاقت والے انجن کو اینٹیں زمین سے اٹھانے میں کتنے گھنٹے لگیں گے؟ ایک مکعب فٹ اینٹوں کا وزن ۱۱۲ پونڈ ہے۔

(۱۰) ایک ۲۰۵ فٹ گہری کوئلے کی کان کی تہ پر ایک لوہے کا پنجرا ہے اس پنجرے میں ۱۴ ہنڈرڈویٹ وزن کوئلہ ہے۔ پنجرے کا وزن ۴ ہنڈرڈویٹ ۱۰۹ پونڈ ہے۔ اور تار کا رسا جس کے ذریعے پنجرے کو اٹھایا جاتا ہے ۶ پونڈ فی گز وزن رکھتا ہے۔ اس تمام وزن کو سطح زمین پر لانے میں کس قدر کام کیا جائے گا۔ اور اس انجن کی اسپی طاقت کیا ہوگی۔ جو اس کام کو ۴۰ سکنڈ میں کر سکے؟

(۱۱) ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے اور اس کے انجن کی کار آمد اسپی طاقت ۱۰۰۰۰ ہے۔ تو اس کی حرکت کے متقابل مزاحمت کیا ہے؟

(۱۲) ایک بائیسکل سوار ایک ٹیلے کے اوپر چڑھ رہا ہے۔ ٹیلے کا میلان ۲۰ میں ۱ ہے۔ اگر آدمی اور مشین دونو کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہو۔ تو ثابت کرو کہ کم از کم ۱۶ د اسپی طاقت کی رفتار سے اسکو کام کرنا پڑتا ہے۔

(۱۳) ایک آدمی ایک منٹ میں ۴۰ چپو مار کر ایک کشتی کو ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلا رہا ہے۔ حرکت کے متقابل مزاحمت ۸ پونڈ وزن کے برابر ہے۔ تو دریافت کرو کہ وہ ایک بار چپو مارنے میں کس قدر کام کرتا ہے۔ اور کس قدر اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے؟

(۱۴) ایک جھلملی کی ۳۰ حرکت پذیر تختیاں ہیں۔ ہر ایک

تختی کی موٹائی نظر انداز کی جا سکتی ہے۔ جب جھلملی لٹک رہی ہو تو دو متصل تختیوں کا فاصلہ ۲ ½ انچ ہے اگر ہر ایک تختی کا وزن ۴ اونس ہو تو۔ جھلملی کو اوپر کھینچنے میں کیا کام کرنا پڑے گا؟

اگر ایسی ن تختیاں ہوں تو کیا کام ہوگا؟

(۱۵) ایک جھلملی ن پتلی تختیوں سے بنی ہوئی ہے۔ ان کے علاوہ ایک اوپر کی تختی ثابت ہے۔ حرکت پذیر تختیوں کا وزن و ہے۔ جب جھلملی نیچے لٹکتی ہے تو اس کا طول ا ہے اور جب اوپر کھینچ لی جاتی ہے تو اس کا طول ب ہے۔ تو ثابت کرو کہ جھلملی کو اوپر کھینچنے میں کشش زمین کے متقابل کام کی مقدار

و × $\frac{ن+۱}{۲ن}$ (ا - ب) ہے۔

(۱۶) ایک ٹھوس نصف کرہ کا وزن ۱۲ پونڈ ہے۔ اور نصف قطر ا فٹ ہے۔ اور وہ اپنے چپٹے پہلو کے بل میز پر پڑا ہے۔ اگر اس کو اس لئے الٹایا جائے کہ وہ اپنی منحنی سطح کے بل میز پر پڑے۔ تو ایسا کرنے میں کسقدر کام کرنا پڑے گا؟

[دفعہ ۱۳۰ کے نتیجہ کو استعمال کرو]

(۱۷) ایک یکساں شہتیر وزنی نصف ٹن ایک منشور مثلثی کی شکل کا ہے۔ جس کی تراش عمودی کے اضلاع ۱ ½ فٹ، ۲ فٹ، ۲ ½ فٹ ہیں۔ اور شہتیر اپنے سب سے

چھوٹے پہلو کے بل زمین پر پڑا ہے۔ اگر اس کو ایک کنارے کے بل اس طرح اٹھایا جائے کہ وہ الٹ کر اپنے سب سے بڑے پہلو کے بل گرے تو ثابت کرو کہ ایسا کرنے میں قریباً ۱۲۰ فٹ ٹن کام کرنا پڑیگا۔

(۱۸) ایک قوت ایک ذرے پر عمل کرتی ہے۔ شروع میں اسکی مقدار ۲۰ پونڈ وزن ہے اور جب ذرہ قوت کی سمت میں حرکت کرکے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ فٹ کے فاصلے طے کرتا ہے۔ تو اس وقت قوت کی مقداریں بالترتیب ۲۵، ۲۹، ۳۲، ۳۱، ۲۷، ۲۴ پونڈ وزن ہوتی ہیں بذریعہ ترسیم قوت کا کام دریافت کرو۔ یہ تسلیم کرلو کہ قوت حرکت کے ہر ایک فٹ میں یکساں شرح سے بدلتی ہے۔

باب دوازدہم

مشینیں یا کلیں

(۱۳۵) اس باب میں ہم چند سادہ مشینوں کے توازن پر بحث کریں گے۔ یعنی (۱) بیرم (۲) چرخی اور چرخیوں کے نظام (۳) سطح مائل (۴) چرخ و محور (۵) ترازو (۶) تک (۷) پیچ + بیرم - چرخ و محور - ترازو اور تک ایک ہی قسم کی مشینیں ہیں ان میں سے ہر ایک میں ایک نقطہ یا ایک محو ثابت ہوتا ہے جس کے گرد مشینیں گھوم سکتی ہیں +

چرخیوں میں ایک ملائم رسی یا رسیاں ضروری ہیں

ہم فرض کریں گے کہ ان مشینوں کے مختلف اجزا چکنے اور استوار ہیں اور تمام رسیاں یا ڈورے جو ان میں استعمال ہوتے ہیں پورے طور پر ملائم ہیں۔ یعنی بلا کسی مزاحمت کے ہر طرف مڑ سکتے ہیں۔ اور یہ کہ مشینوں پر عمل کرنیوالی قوتیں متوازن ہیں یعنی مشینیں ساکن ہیں۔ فی الواقع جو مشینیں روزمرّہ استعمال میں آتی ہیں ان میں سے اکثر ایسی ہیں جن میں یہ شرائط پوری تو کیا پوری کے قریب بھی نہیں ہوتیں +

(۱۳۶) مشین کا استعمال کسی مزاحمت کو مغلوب کرنے کیلئے

ہوتا ہے۔ جو قوت ہم مشین پر لگاتے ہیں۔ اس کو **زور** کہتے ہیں اور جس **مزاحمت** کو مغلوب کرنا مقصود ہوتا ہے خواہ وہ کسی صورت میں ہو اس کو **مزاحمت** یا **بوجھ** کہتے ہیں

(۱۳۷) **مشینی مفاد**۔ اگر کسی مشین پر زور **ز** لگائیں اور مزاحمت یا بوجھ **ب** کے ساتھ زور متوازن ہو تو نسبت **ب : ز** اس کل کا **مشینی مفاد** کہلاتا ہے۔ یعنی

$$\frac{\text{بوجھ}}{\text{زور}} = \text{مشینی مفاد}$$

اس لئے مزاحمت یا بوجھ = زور × مشینی مفاد

قریباً تمام کلیں ایسی بنائی جاتی ہیں کہ مشینی مفاد کی مقدار ایک سے زیادہ ہو +

اگر کسی کل کا مشینی مفاد ایک سے کم ہو۔ تو اس کو مشینی نقصان کہنا زیادہ صحیح ہے +

بجائے مشینی مفاد کے قوتی نسبت کی اصطلاح بھی استعمال ہوتی ہے +

رفتاری نسبت۔ کسی مشین کی رفتاری نسبت دو فاصلوں کی نسبت ہے۔ ایک تو وہ فاصلہ جو زور کے نقطہ عمل نے طے کیا ہو۔ دوسرے وہ فاصلہ جو مزاحمت یا بوجھ کے نقطہ عمل نے اتنے ہی وقت میں طے کیا ہو۔ یعنی

$$\text{رفتاری نسبت} = \frac{\text{ز کا طے کردہ فاصلہ}}{\text{ب کا طے کردہ فاصلہ}}$$

اگر مشین ایسی ہو۔ کہ اس کے مختلف اجزا کے اٹھانے میں

کوئی کام کرنا نہ پڑے۔ اور اگر وہ پورے طور پر چکنی ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ مشینی مفاد اور رفتاری نسبت دونوں برابر ہیں یعنی اس صورت میں

$$\frac{ب}{ز} = \frac{\text{ز کا طے کردہ فاصلہ}}{\text{ب کا طے کردہ فاصلہ}}$$

اس لئے ز × ز کا طے کردہ فاصلہ = ب × ب کا طے کردہ فاصلہ

یعنی ز کا کام = ب کا کام

(۱۳۸) اس وجہ سے ذیل کا اصول جسے کام کا اصول کہتے ہیں ہمیشہ درست پایا جائے گا اور وہ یہ ہے۔ **خواہ کوئی مشین استعمال کیا جائے اس میں زور کا کام ہمیشہ بوجھ یا مزاحمت کے کام کے برابر ہوگا۔ بشرطیکہ مشین کے مختلف اجزا میں رگڑ نہ ہو اور مشین کے وزن کو نظر انداز کیا جائے۔**

فرض کرو کہ ہماری مشین سے مشینی مفاد حاصل ہوتا ہے یعنی اس میں زور کم لگتا ہے اور اس کے ذریعہ بوجھ زیادہ اٹھتا ہے۔ اسی نسبت سے زور کا طے کردہ فاصلہ بوجھ کے طے کردہ فاصلے سے زیادہ ہوگا۔

اسے یوں بھی بیان کرتے ہیں "زور میں فائدہ رفتار میں نقصان" اس کا صحیح تر بیان یہ ہے کہ اگر مشینی مفاد حاصل ہو تو رفتار میں متناسب کمی واقع ہوگی۔ مشین کے استعمال سے کام کا مفاد ہرگز حاصل نہیں ہوتا۔ اگرچہ مشینی مفاد عام طور پر حاصل ہو جاتا ہے +

(۱۳۹) آیندہ باب میں یہ معلوم ہوگا کہ فی الواقع مشین کے استعمال سے کام کا کچھہ نہ کچھہ نقصان ہوتا ہے مشینوں کے فائدے مفصلہ ذیل ہیں:-

(۱) ان کے ذریعہ ہم ایسے وزن اٹھا سکتے ہیں اور ایسی مزاحمت پر غالب آسکتے ہیں جو ہم مشین کی امداد کے بغیر کبھی نہیں کرسکتے۔ اس کی مثالیں یہ ہیں چرخیوں کے نظام - چرخ و محور - شکنجہ -

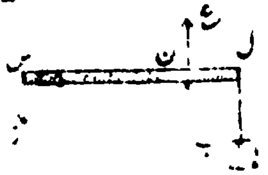
(۲) بعض مشینوں میں ایک حصہ کو تھوڑی حرکت دیکر دوسرے حصہ کو زیادہ تر حرکت دے سکتے ہیں مثلاً بائی سکل میں۔

(۳) بعض کلیں ایسی ہیں کہ ان کی امداد سے زور لگانے میں زیادہ سہولت ہوتی ہے۔ مثلاً جب کریدنی کے ذریعے آگ کو درست کیا جاتا ہے۔ اور جب ایک چونے کا ڈول ایک چرخی پر سے گزرنیوالی رسی کے ذریعہ اس طرح کھینچا جائے۔ کہ چرخی تو ایک عمارت کی چھت کے برابر ہو۔ اور کھینچنے والا آدمی زمین پر کھڑا ہو +

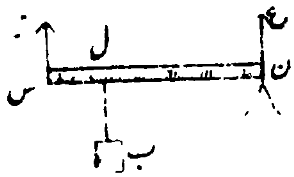
اول - بیرم

(۱۴۰) بیرم ایک سیدہی یا ٹیڑہی استوار سلاخ ہے جس کا ایک نقطہ ثابت ہوتا ہے۔ اور اس ثابت نقطہ کے گرد بیرم گھوم سکتا ہے۔ اور اس نقطہ ثابت کو نصاب کہتے ہیں۔ اور نصاب سے زور اور بوجھہ کے خطوط عمل پر جو عمود ڈالے جائیں۔ وہ بیرم کے بازو کہلاتے ہیں +

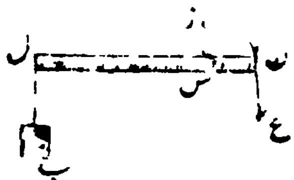
جب بیرم سیدھا ہوتا ہے اور زور اور بوجھ کے خطوط عمل بیرم پر عمود ہوتے ہیں۔ تو عموماً اس کی تین قسمیں ہوتی ہیں



قسم اول۔ اس میں نصاب ن زور ز اور بوجھ ب کے بیچ میں واقع ہوتا ہے +



قسم دوم۔ اس میں بوجھ ب نصاب ن اور زور ز کے بیچ میں ہوتا ہے +



قسم سوم۔ اس میں زور ز نصاب ن اور بوجھ ب کے بیچ میں ہوتا ہے +

(۱۴۱) ایک مستقیم بیرم کے توازن کی شرائط

ہر ایک قسم کے بیرم کی صورت میں تین متوازی قوتیں جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے نصاب ن پر کا عمل ع، ز اور ب کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا +

قسم اول میں ز اور ب موافق متوازی قوتیں ہیں۔ اس واسطے ان کا حاصل ز + ب ہے +

پس ع = ز + ب

قسم دوم میں ز اور ب دو مخالف اور متوازی قوتیں ہیں اس لئے ع = ب - ز

اسی طرح قسم سوم میں

ع = ز ۔ ب

اقسام اول و سوم میں ع اور ز مخالف سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ قسم دوم میں وہ موافق سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ تینوں قسموں میں چونکہ ز اور ب کا حاصل ن میں سے گزرتا ہے اس لئے بموجب دفعہ ۵۲

ز × س ن = ب × ل ن

یعنی ز × ز کا بازو = ب × ب کا بازو

چونکہ ب/ز = ز کا بازو/ب کا بازو اس لئے یہ ظاہر ہے کہ قسم اول میں عموماً اور قسم دوم میں ہمیشہ مشینی مفاد ہوتا ہے لیکن قسم سوم میں مشینی نقصان ہوتا ہے +

آخری قسم کے بیرم عملاً ایسے نقطہ پر قوت لگانیکے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ جہاں بلا واسطہ قوت کا لگانا مشکل ہوتا ہے دفعہ ہذا میں ہم نے بیرم کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ اگر اس وزن کو بھی محسوب کریں تو جیسا دفعہ ۹۱ میں بیان ہوا ہے قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ جبریہ کو صفر کے برابر لکھنے سے توازن کے شرائط حاصل ہوں گے +

بیرم کا اصول ارشمیدس کو معلوم تھا۔ جو مسیح علیہ السلام سے تین سو برس پہلے ہوا ہے۔ جب تک کہ سولھویں صدی میں قوتوں کا متوازی الاضلاع دریافت نہیں ہوا۔ اسوقت تک سکونیات کا بنیادی اصول یہی تھا +

(۱۴۳) مختلف اقسام کے بیرموں کی مثالیں ذیل میں دیجاتی ہیں

قسم اول۔ کریدنی جب کہ آگ درست کرنے کے لئے استعمال کی جائے۔ اس میں چوھے کی سلاخ نصاب کا کام دیتی ہے ملاتول۔ جب کہ اس کے ذریعہ میخیں اکھاڑی جائیں۔ بیل۔ جب کہ اس کا ایک نقطہ ایک ثابت مقام پر سہارا جائے ترازو۔ اور پمپ کا دستہ۔ اس قسم کے دوہرے بیرم یہ ہیں قینچی۔ زنبور۔

قسم دوم۔ ٹھیلا۔ کاک داب۔ بیل۔ جب کہ اس کا ایک سرا زمین کے سہارے ہو۔ چپو اگر چپو کے اس سرے کو جو پانی میں ہے ساکن تصور کیا جائے +

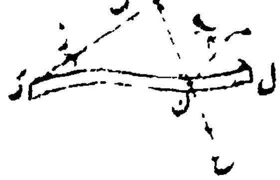
جوزشکن اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال ہے +

قسم سوم۔ خراد کا پائدان۔ انسان کی کلائی۔ جب کہ ہاتھ پر بوجھ رکھا ہو۔ اور کلائی اس کو سہار رہی ہو کہنی نصاب ہے اور پٹھوں کا تناؤ زور ہے +

تشدگیر اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال ہے +

(۱۴۳) بیرم خمیدہ

فرض کرو کہ س ن ل ایک بیرم خمیدہ ہے جس کا نصاب ن ہے اور زور ز اور بوجھ ب کے خطوط عمل س ج اور ل ج پر ن ک اور ن م عمود ہیں +



دفعہ ۹۱ کی شرط توازن عائد ہوگی۔ اس لئے **ن** کے گرد معیار لینے سے

ز × ن ک = ب × م ن

∴ $\frac{\text{ز}}{\text{ب}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن ک}} = \frac{\text{نصاب سے بوجھ کے خط عمل پر عمود}}{\text{نصاب سے زور کے خط عمل پر عمود}}$

ن پر کا عمل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ **ز** اور **ب** کے خطوط عمل **ج** پر ملتے ہیں۔ چونکہ صرف تین قوتیں جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے **ن** پر کا عمل بھی **ج** میں سے گزرے گا۔ اب بذریعہ مسئلہ لامی۔

$\frac{\text{ع}}{\text{جب س ن ل}} = \frac{\text{ز}}{\text{جب ل ج ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب س ج ن}}$

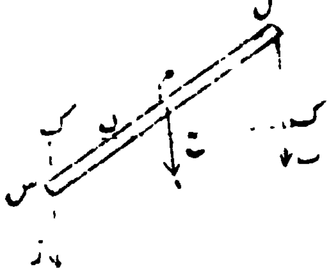
بموجب دفعہ ۶۴، **ع**، **ز**، **ب** کو زاویہ قائمہ بنانیوالی دو سمتوں میں تحلیل کرنے سے بھی **ع** دریافت ہو سکتا ہے۔ اگر زور اور بوجھ متوازی قوتیں ہوں تو عمل **ع** بھی ان کے متوازی ہوگا۔ اور **ز + ب** کے مساوی ہوگا۔ اور پہلے کیطرح

ز × ان ک = ب × ن م

جہاں **ن ک** اور **ن م**، **ن** سے قوتوں کے خطوط عمل پر عمود ہیں اگر بیرم کا وزن **و** نظر انداز نہ کیا جائے۔ تو معیاروں کی مساوات میں ایک اور رقم آئے گی +

۱۴۶) اگر ایک مستقیم بیرم کے سروں پر دو وزن معلق ہوں اور بیرم ایک نصاب پر اس طرح متوازن ہو کہ وہ سمت عمودی سے کوئی زاویہ بنائے۔ تو اگر بیرم کو نصاب کے گرد کسی اور مقام میں لایا جائے تو وہ وہاں بھی متوازن ہوگا +

فرض کرو کہ س ل بیرم ہے جس کا وزن و ہے اور مرکز ثقل م ہے۔



اور فرض کرو کہ بیرم نصاب ن پر افق سے زاویہ ط بناتا ہوا متوازن ہے س اور ل پر وزن ز اور ب ہیں۔ ن میں سے ایک افقی خط کھینچو جو ز، و، ب کے خطوط عمل کو بالترتیب ک، ج، کَ پر ملے۔

چونکہ ن کے گرد قوتیں متوازن ہیں۔ اس لئے

ز × ن ک = ب × ن کَ + و × ن ج

∴ ز × س ن × جم ط = ب × ل ن × جم ط + و × م ن × جم ط

∴ ز × س ن = ب × ل ن + و × م ن

توازن کی اس شرط کا انحصار ط پر نہیں ہے اور ط بیرم کا میلان افق سے ہے یعنی بیرم کو گھماکر اگر کسی اور مقام پر لائیں تو بھی شرط توازن یہی ہوگی۔ اس لئے اگر بیرم ایک مقام پر توازن میں ہو تو ہر ایک مقام پر توازن میں ہوگا۔

امثلہ نمبری (۲۲)

۱۔ ایک بے وزن بیرم میں ایک قوت ۱۰ پونڈ وزن کے برابر ہے اور نصاب پر کا عمل ۱۶ پونڈ وزن ہے اور چھوٹے بازو کا طول ۳ فٹ ہے تو بڑے بازو کا طول دریافت کرو۔

(۲) ایک ۷ فٹ لمبے سیدھے بے وزن بیرم پر نصاب کہاں واقع ہو کہ ۶ پونڈ وزن اور ۸ پونڈ وزن متوازن ہوں؟ اگر ہر ایک وزن میں ۱ پونڈ کا اضافہ کردیا جائے۔ تو بیرم کس طرف کو گھومیگا؟

(۳) اگر ایک بے وزن بیرم پر عمل کرنیوالی دو قوتیں متوازن ہوں۔ اور نصاب پر کا دباؤ قوتوں کے فرق سے دس گنا ہو تو بازوؤں کی نسبت دریافت کرو+

(۴) ایک گز لمبے ایک بیرم کے سروں پر ۶ پونڈ اور ۲۰ پونڈ وزن بندھے ہیں اور وہ ایک نقطہ پر متوازن ہے جو اس کے ایک سرے سے ۹ انچ کے فاصلہ پر ہے تو بیرم کا وزن دریافت کرو+

(۵) ایک بیرم ا ب ۱۲ فٹ لمبا ہے جب ا پر ایک ۱۳ پونڈ وزن لٹکایا جائے۔ اور بیرم کا نصاب ا سے ایک فٹ کے فاصلہ پر ہو تو بیرم متوازن ہوتا ہے۔ اگر ب پر ایک ۱۱ پونڈ وزن لٹکایا جائے۔ اور نصاب ب سے ایک فٹ کے فاصلہ پر ہو تو بھی توازن ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ بیرم کا مرکز ثقل اس کے نقطہ وسط سے ۵ انچ کے فاصلہ پر ہے+

(۶) ایک سیدھے یکساں بیرم کے سروں پر ۱۲ پونڈ اور اور ۵ پونڈ وزن باندھنے سے توازن پیدا ہوتا ہے۔ اور ایک بازو دوسرے سے دوگنا لمبا ہے۔ بیرم کا وزن دریافت کرو+

(۷) ایک سیدھے یکساں بیرم کا طول ۵ فٹ ہے اور وزن ۱۰ پونڈ ہے اس کا نصاب ایک سرے پر ہے۔ اور نصاب سے بالترتیب ایک اور تین فٹ کے فاصلوں پر ۳ پونڈ اور ۶ پونڈ وزن بندھے ہیں۔ بیرم کے دوسرے سرے پر ایک توت لگائی جاتی ہے۔ جو اس کو افقی حالت میں ساکن رکھتی ہے۔ نصاب پر کا دباؤ دریافت کرو۔

(۸) ایک یکساں بیرم کا طول ۸ اِنچ ہے اور وزن ۱۰ اونس ہے۔ اگر اس کے ایک سرے پر ۲۰ اونس وزن ہو اور دوسرے سرے پر ۹ اونس ہوتو توازن کے لئے نصاب کہاں ہونا چاہیئے؟

اگر چھوٹے وزن کو دو چند کردیا جائے۔ تو نصاب کو اپنے مقام سے کس قدر ہٹایا جائے۔کہ توازن میں فرق نہ آئے؟

(۹) ایک ہلکی سلاخ کے دونوں سروں پر ۸ اونس اور ۴ اونس وزن بندھے ہیں اور وہ متوازن ہے۔ اگر بڑے وزن میں ۲ اونس کا اضافہ کیا جائے تو توازن قائم رکھنے کے لئے نصاب کو اپنے مقام سے ½ اِنچ ہٹانا پڑتا ہے تو بیرم کی لمبائی دریافت کرو۔

(۱۰) ایک بیرم کا چھوٹا بازو ایک قبضے کے ذریعہ ایک دوسرے بیرم کے لمبے بازو کے ساتھ جوڑا ہوا ہے۔ اور اس دوسرے بیرم کا چھوٹا بازو ایک شکنجے کے ساتھ ملادیا گیا ہے۔ لمبے بازوؤں میں سے ہر ایک ۳ فٹ ہے اور

چھوٹوں میں سے ہر ایک ۶ اِنچ ہے۔ اگر پہلے بیرم کے لمبے بازو کے سرے پر ۱۰ سٹون وزن کی قوت لگائی جائے۔ تو دریافت کرو کہ شکنجے پر کتنا دباؤ پڑے گا؟

(۱۱) ایک سیدھے وزنی یکساں بیرم کا طول ۲۱ اِنچ ہے اور اس کا نصاب اس کے سرے پر ہے۔ اگر نصاب سے ۷ اِنچ کے فاصلہ پر ایک ۱۲ پونڈ وزن کی قوت لگائی جائے۔ تو بیرم کے دوسرے سرے پر ۳ پونڈ وزن کو سہارتی ہے۔ اگر وزن میں ایک پونڈ کا اضافہ کیا جائے تو نصاب سے ۵ اِنچ کے فاصلہ پر کتنی قوت لگانے سے بیرم متوازن ہوگا؟

(۱۲) ایک بیرم پر ۱۳ پونڈ اور ۱۴ پونڈ وزن کی قوتیں متوازن ہیں۔ اور ان کی سمتیں ملکر $\text{جتا}^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)$ کا زاویہ بناتی ہیں تو نصاب پر کا دباؤ دریافت کرو۔

(۱۳) ایک سیدھے بیرم کے سروں پر دو قوتیں عمل کرتی ہیں جن کی نسبت $\sqrt{3}+1 : \sqrt{3}-1$ ہے اور جو بیرم سے ۳۰° اور ۶۰° کے زاویے بناتی ہیں تو نصاب پر کے دباؤ کی مقدار اور سمت دریافت کرو۔

(۱۴) ایک بیرم خمیدہ کے بازو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے طولوں میں نسبت ۵:۱ ہے لمبے بازو کا میلان افق سے ۴۵° ہے اور اس کے سرے پر ۱۰ پونڈ وزن بندھا ہے۔ اور چھوٹے بازو کا سرا ایک

سطح افقی پر ٹکا ہوا ہے۔ سطح پر کا دباؤ دریافت کرو +

(۱۵) ایک یکساں خمیدہ سلاخ کے بازو ایک دوسرے سے ۱۲۰° کا زاویہ بناتے ہیں اور ان کے طولوں کی نسبت ۲ : ۱ ہے اگر سلاخ کو اس کے راس الزاویہ سے ٹکایا جائے تو حالت سکون دریافت کرو +

(۱۶) ایک $\frac{1}{2}$ ۷ فٹ لمبی اور ۱۷ پونڈ وزنی یکساں سلاخ ایک افقی میز پر پڑی ہے اور میز کے کنارے سے $\frac{1}{2}$ ۲ انچ نکلی ہوئی ہے تو دریافت کرو کہ اس کے سرے پر زیادہ سے زیادہ کتنا وزن باندھ سکتے ہیں کہ سلاخ نہ گرے؟

(۱۷) ایک سیدھے بے وزن بیرم کے ایک سرے ا پر قبضہ ہے جو نصاب کا کام دیتا ہے۔ اور ایک نقطہ ب سے ایک وزن و ٹکایا گیا ہے اگر قبضہ $\frac{1}{2}$ و سے زیادہ دباؤ اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف نہ سہار سکتا ہو تو ثابت کرو۔ کہ زور $\frac{1}{4}$ اب کے فاصلہ کے اندر عمل کرنا چاہیئے +

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک آٹھ چپو والی کشتی کو دھکیلنے والی قوت ۲۲۴ پونڈ وزن کے برابر ہے۔ اگر ہر ایک چپو والا اپنے چپو کو ۵۶ پونڈ وزن کی قوت لگائے اور چپو کے پھل کے وسط سے چپو کے ہتھے تک جتنا فاصلہ ہے وہ اس فاصلہ سے ۲ چند ہے جو چپو کے نصاب سے ہتھے تک ہے +

(۱۹) ایک جوزشکن کا طول ۵ انچ ہے۔ اگر جوز قبضہ سے $\frac{5}{8}$ انچ کے فاصلہ پر رکھا جائے تو $\frac{1}{2}$ ۳ پونڈ وزن کی قوت

اس کے بازوؤں کے سرے پر لگانے سے جوڑ ٹوٹتا ہے۔ جوڑ کے اوپر کتنا وزن رکھنے سے وہ ٹوٹیگا؟

(۲۰) ایک آدمی ایک ۴ فٹ لمبی بیل کا سرا ایک ۳ فٹ مکعب پتھر وزنی ۲ ٹن کے نیچے دباکر ۶ انچ داخل کرتا ہے۔ معلوم کرو کہ پتھر اٹھانے کے لئے بیل کے دوسرے سرے پر کیا قوت لگائی جائے؟

(۲۱) ایک مکعب کا ضلع ا ہے اس کے ضلع کے وسط پر ایک بیل لگاکر اس کو اٹھایا جاتا ہے بیل اور مکعب کا مرکز ثقل ایک ہی سطح میں ہیں، جب بیل افق سے °۶۰ کا زاویہ بناتی ہے تو اس کو ساکن رکھا جاتا ہے اس وقت مکعب کی نچلی سطح افق سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے۔ اگر مکعب کا وزن بیل پر عمل کرنے والی قوت سے ن گنا ہو۔ تو بیل کا طول دریافت کرو۔ بیل پر جو قوت عمل کرتی ہے۔ وہ اس سے زاویہ قائمہ بناتی ہے+

دوم۔ چرخیاں

(۱۴۵) چرخی ایک لکڑی یا دہات کا پہیہ ہوتا ہے۔ جس کے محیط پر گرداگرد ایک نالی بنی ہوتی ہے تاکہ اس نالی میں رسی یا ڈورا آسکے۔ اور اس کے مرکز میں سے اس کی سطح پر عمود وار ایک محور گزرتا ہے۔ جس کے گرد چرخی بلا تکلف گھوم سکتی ہے۔ اس محور کے سروں کو ایک لکڑی کا ڈھانچا

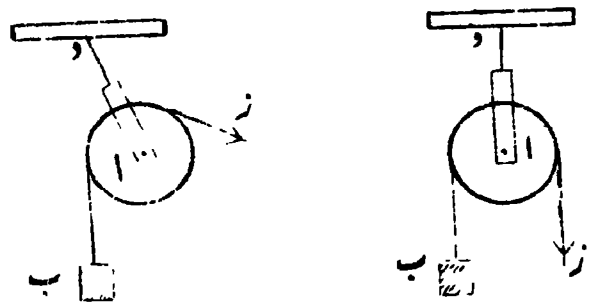
سہارے کا کام دیتا ہے +
اگر چرخی کا سہارا ثابت ہو۔ تو چرخی ثابت کہلاتی ہے اور اگر حرکت پذیر ہو تو متحرک کہلاتی ہے +

چرخی کا وزن بمقابلہ ان اوزان کے جن کو وہ سہارتی ہے۔ اکثر اوقات ایسا قلیل ہوتا ہے۔ کہ اس کو بالکل نظر انداز کرسکتے ہیں۔ ایسی چرخی کو بے وزن چرخی کہتے ہیں۔ جو رسی چرخی پر سے گزرتی ہے۔ ہم اسکے وزن کو ہمیشہ نظر انداز کریں گے نیز ہم اس باب میں چرخی کو مکمل طور پر چکنی تصور کریں گے اس لئے اس کے گرد گزرنیوالی رسی کا تناؤ ایک سرے سے دوسرے سرے تک غیر متبدل ہوگا +

(۱۴۶) **اکیلی چرخی**۔ جس سمت میں زور لگانا ہمارے لئے آسان ہو۔ اگر اس سمت سے مختلف سمت میں زور لگانا مقصود ہو تو اکیلی چرخی استعمال کی جاتی ہے +

مثلاً۔ شکل اول میں اگر ایک آدمی زمین پر کھڑا ہو اور سمت شاقولی میں رسی کے ایک سرے کو کھینچ رہا ہو تو دوسرے سرے پر لٹکتے ہوئے بوجھ **ب** کو سہار سکتا ہے۔ دوسری شکل میں وہی آدمی ایک طرف کو زور لگاکر اس بوجھ کو سہار سکتا ہے +

اشکال دوسرے صفحہ پر دیکھو



ہر ایک حالت میں چرخی پر سے گزرنیوالی رسی کا تناؤ نہیں بدلتا۔ اس لئے زور **ز** بوجھ **ب** کے مساوی ہے +

پہلی شکل میں ثابت شہتیر پر کا عمل چرخی کے سہارے پر عمل کرنیوالی باقی قوتوں کے ساتھ متوازن ہے۔ اس لئے شہتیر پر کا عمل ز + ب + پ ہے یعنی ۲ ب + پ ہے جہاں **پ** سہارے کا وزن ہے +

دوسری شکل میں اگر چرخی کا وزن نظر انداز کیا جائے۔ تو چونکہ زور ز اور بوجھ ب مساوی ہیں۔ اس لئے خط وا کے ساتھ ان کے میلان برابر ہیں۔ پس اگر سہارنے والی رسی و ب کا تناؤ ت ہو۔ اور ز اور ب کی سمتوں کا درمیانی زاویہ ۲ ط ہو۔ تو ت = ز جم ط + ب جم ط = ۲ ب جم ط

اگر چرخی اور سہارے کا وزن پ ہو۔ تو

$$ت^{۲} = (ب + پ)^{۲} + ز^{۲} + ۲(ب + پ) \times ز \times جم\ ۲\ ط$$

= ۲ ب^{۲} + ۲ ب پ + پ^{۲} + ۲ (ب + پ) × ب ×
(۲ جم^{۲} طہ - ۱) [کیونکہ ز = ب]

= پ^{۲} + ۴ ب (ب + پ) جم$^{۲}_{۱}$ طہ

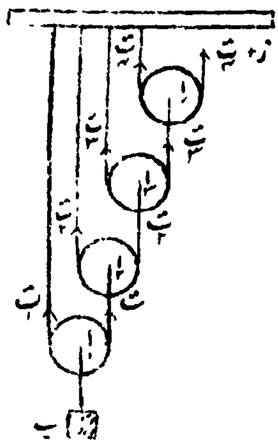
(۱۴۷) ہم چرخیوں کے ہر سہ نظام پر یکے بعد دیگرے حسب معمول بحث کریں گے۔ اس ترتیب کی کوئی خاص وجہ نہیں ہے۔ لیکن اس ترتیب کو قائم رکھنے سے حوالہ دینے میں سہولت ہوگی۔

چرخیوں کا پہلا نظام۔ اس میں ہر ایک رسی سہارنے والے شہتیر کے ساتھ بندھی ہوتی ہے۔ اس میں ہم زور اور بوجھ کا تعلق دریافت کریں گے +

چرخیوں کے اس نظام میں بوجھ سب سے نیچے والی چرخی سے باندھا جاتا ہے۔ اور اس کے گرد گزرنیوالی رسی ایک طرف ثابت شہتیر سے بندھی ہوتی ہے۔ اور دوسری طرف اوپر والی چرخی سے بندھی ہوتی ہے۔ اس دوسری چرخی کے گرد گزرنیوالی رسی ایک طرف ثابت شہتیر سے بندھی ہوتی ہے اور دوسری طرف اس سے اوپر والی چرخی سے، اسی طرح باقی چرخیوں پر عمل ہوتا ہے اور آخری رسی کے کھلے سرے پر زور لگایا جاتا ہے +

اکثر اوقات ایک زائد ثابت چرخی ہوتی ہے۔ جس کے اوپر سے آخری رسی کا کھلا سرا گزرتا ہے۔ اس انتظام سے زور نیچے کی طرف لگ سکتا ہے +

اگر نیچے سے شروع کریں تو فرض کرو کہ ا۱، ا۲، ا۳ .... چرخیاں ہیں اور ان کے گرد گزرنیوالی رسیوں کے تناؤ ت۱، ت۲، ت۳، .... ہیں اور ب بوجھ ہے اور ز زور ہے۔



[یاد رہے کہ کسی چرخی مثلاً ا۲ کے گرد جو رسی گزرتی ہے وہ ا۲ کو اوپر کی طرف کھینچتی ہے اور ا۳ کو نیچے کی طرف]

اول فرض کرو کہ چرخیوں کے اوزان نظر انداز کئے گئے ہیں + بالترتیب چرخیوں ا۱، ا۲، ا۳ .... کے توازن سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی +

$$۲ ت_{۱} = ب \quad \therefore \quad ت_{۱} = \frac{۱}{۲} ب$$

$$۲ ت_{۲} = ت_{۱} \quad \therefore \quad ت_{۲} = \frac{۱}{۲} ت_{۱} = \frac{۱}{۲^{۲}} ب$$

$$۲ ت_{۳} = ت_{۲} \quad \therefore \quad ت_{۳} = \frac{۱}{۲} ت_{۲} = \frac{۱}{۲^{۳}} ب$$

$$۲ ت_{۴} = ت_{۳} \quad \therefore \quad ت_{۴} = \frac{۱}{۲} ت_{۳} = \frac{۱}{۲^{۴}} ب$$

لیکن شکل میں $ت_{۴} = ز$ $\therefore ز = \frac{۱}{۲^{۴}} ب$

اسی طرح اگر ن چرخیاں ہوں تو $ز = \frac{۱}{۲^{ن}} ب$

اس لئے چرخیوں کے اس نظام میں مشینی مفاد $= \frac{ب}{ز} = ۲^{ن}$

دوم۔ فرض کرو کہ چرخیوں کے وزن نیچے سے شروع کرکے $ج_{۱}، ج_{۲}$ ... ہیں
اس صورت میں ہر ایک چرخی پر ایک ایک زائد قوت لگ رہی ہے
پیشتر کی طرح تحلیل کرنے سے۔

$$۲ت_{۱} = ب + ج_{۱}$$
$$۲ت_{۲} = ت_{۱} + ج_{۲}$$
$$۲ت_{۳} = ت_{۲} + ج_{۳}$$
$$۲ت_{۴} = ت_{۳} + ج_{۴}$$
$$\therefore ت_{۱} = \frac{۱}{۲} ب + \frac{۱}{۲} ج_{۱}$$
$$ت_{۲} = \frac{۱}{۲} ت_{۱} + \frac{۱}{۲} ج_{۲} = \frac{۱}{۲^{۲}} ب + \frac{۱}{۲^{۲}} ج_{۱} + \frac{۱}{۲} ج_{۲}$$
$$ت_{۳} = \frac{۱}{۲} ت_{۲} + \frac{۱}{۲} ج_{۳} = \frac{۱}{۲^{۳}} ب + \frac{۱}{۲^{۳}} ج_{۱} + \frac{۱}{۲^{۲}} ج_{۲} + \frac{۱}{۲} ج_{۳}$$

اور $ز = ت_{۴} = \frac{۱}{۲} ت_{۳} + \frac{۱}{۲} ج_{۴} = \frac{۱}{۲^{۴}} ب + \frac{۱}{۲^{۴}} ج_{۱} + \frac{۱}{۲^{۳}} ج_{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}} ج_{۳} + \frac{۱}{۲} ج_{۴}$

اسی طرح اگر ن چرخیاں ہوں تو

$$ز = \frac{۱}{۲^{ن}} ب + \frac{۱}{۲^{ن}} ج_{۱} + \frac{۱}{۲^{ن-۱}} ج_{۲} + \cdots\cdots + \frac{۱}{۲} ج_{ن}$$
$$\therefore ۲^{ن} \times ز = ب + ج_{۱} + ۲ ج_{۲} + \cdots\cdots + ۲^{ن-۱} ج_{ن}$$

اگر چرخیاں تمام برابر ہوں تو

$$ج_{۱} = ج_{۲} = ج_{۳} = \cdots\cdots = ج_{ن} = ج$$
$$\therefore ۲^{ن} \times ز = ب + ج (۱ + ۲ + ۲^{۲} + \cdots\cdots + ۲^{ن-۱})$$

$= ب + ج (۲^{ن} - ۱)$ بذریعہ جمع سلسلہ ہندسیہ

اس سے ظاہر ہے کہ مشینی مفاد $\frac{\text{ت}}{\text{و}}$ چرخیوں کے وزن پر منحصر ہے۔ چرخیوں کے اس نظام میں ہم دیکھتے ہیں کہ چرخیوں کا وزن جتنا زیادہ ہو اتنا ہی زیادہ زور ز ہوگا۔ جو ایک دیئے ہوئے بوجھ ب کو سہاریگا۔ چرخیوں کے بوجھ زور کے خلاف عمل کرتے ہیں اس لئے جہاں تک ممکن ہو چرخیوں کی مطلوبہ مضبوطی کا لحاظ کرتے ہوئے ان کو ہلکا بنانا چاہیئے +

جس شہتیر سے چرخیاں لٹکائی جاتی ہیں اس پر کتنا دباؤ پڑتا ہے؟

فرض کرو کہ شہتیر پر ح دباؤ پڑتا ہے تو چونکہ ح اور زور ز ملکر بوجھ ب اور چرخیوں کے نظام کو سہارتے ہیں +

$$\therefore \text{ح} + \text{ز} = \text{ب} + \text{چ}_{۱} + \text{چ}_{۲} + \cdots\cdots + \text{چ}_{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ح} = \text{ب} + \text{چ}_{۱} + \text{چ}_{۲} + \cdots\cdots + \text{چ}_{\text{ن}} - \frac{\text{ب} + \text{چ}_{۱} + ۲\text{چ}_{۲} + ۲^{۲}\text{چ}_{۳} + \cdots\cdots + ۲^{\text{ن}-۱}\text{چ}_{\text{ن}}}{۲^{\text{ن}}}$$

$$= \text{ب}\left(۱ - \frac{۱}{۲^{\text{ن}}}\right) + \text{چ}_{۱}\left(۱ - \frac{۱}{۲^{\text{ن}}}\right) + \text{چ}_{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}\right)$$

$$+ \text{چ}_{۳}\left(۱ - \frac{۱}{۲^{\text{ن}-۲}}\right) + \cdots\cdots + \text{چ}_{\text{ن}}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)$$

مثال۔ اگر چار متحرک چرخیاں ہوں۔ جن کے وزن نیچے کی چرخی سے شروع ہوکر بالترتیب ۴، ۵، ۶، ۷ پونڈ ہوں تو دریافت کرو کہ ایک ہنڈرڈویٹ وزن کے جسم کو سہارنے کے لئے کتنا زور لگانا پڑیگا؟

اس سوال میں $۲\,\text{ت}_{۱} = ۱۱۲ + ۴ \therefore \text{ت}_{۱} = ۵۸$

$$۲\,\text{ت}_{۲} = \text{ت}_{۱} + ۵ = ۶۳ \therefore \text{ت}_{۲} = ۳۱\tfrac{۱}{۲}$$

$$۲\,\text{ت}_{۳} = \text{ت}_{۲} + ۶ = ۳۷\tfrac{۱}{۲} \therefore \text{ت}_{۳} = ۱۸\tfrac{۳}{۴}$$

۲ ز = ۲ ت = ت/۳ + ۷ = ۳/۴ ۲۵ ∴ ز = ۷/۸ ۱۲ پونڈ وزن

(۱۴۸) **کام کے اصول کی تصدیق**۔ اگر ہم چرخیوں کے وزنوں کو نظرانداز کریں اور چار چرخیاں ہوں تو ز = $\frac{1}{4^2}$ ب اگر بوجھ ب کو فاصلہ لا اوپر اٹھایا جائے۔ تو چرخی ا۲ بھی فاصلہ لا اوپر چڑھیگی بشرطیکہ فاصلہ ا۱ا۲ میں تبدیلی واقع نہ ہو لیکن جو رسی ا۱ کو شہتیر سے ملاتی ہے۔ وہ بقدر لا کم ہوجاتی ہے۔ اس لئے رسی کا ایک حصہ لا چرخی ا۱ پر سے پھسل کر اوپر کی طرف جاتا ہے یعنی کل فاصلہ جو چرخی ا۲ اوپر جاتی ہے ۲ لا ہے اسی طرح چرخی ا۳ بقدر ۴ لا اوپر چڑھتی ہے۔ اور چرخی ا۴ بقدر ۸ لا۔ چونکہ ا۴ بقدر ۸ لا اوپر کو جاتی ہے۔ اس لئے جس رسی کے ذریعے ا۴ شہتیر سے بندھی ہے۔ اور وہ رسی جس کو زور ز لگایا جاتا ہے یہ دونوں بقدر ۸ لا کم ہوجاتی ہیں +

پس رسی کا ڈھیلا حصہ چرخی ا۴ کے گرد گزر جائے گا اور زور ز کا نقطہ عمل بقدر ۱۶ لا اوپر کو جائے گا۔ یعنی ب کے طے کردہ فاصلے سے ۱۶ گنا اوپر کی طرف چڑھیگا۔ لہذا رفتاری نسبت ۱۶ ہے۔ یعنی اس صورت میں مشینی مفاد کے مساوی ہے +

$$\text{نیز}\ \frac{\text{زور کا کام}}{\text{بوجھ کا کام}} = \frac{\text{ز} \times 16\,\text{لا}}{\text{ب} \times \text{لا}} = \frac{\frac{1}{4^2} \times \text{ب} \times 16\,\text{لا}}{\text{ب} \times \text{لا}} = \frac{\text{ب} \times \text{لا}}{\text{ب} \times \text{لا}} = 1$$

پس اصول کی تصدیق ہوگئی +

اگر چرخیوں کے وزن محسوب کئے جائیں۔ اور چرخیاں ۴ ہوں تو

$$\text{ز} = \frac{\text{ب}}{۲^۴} + \frac{\text{چ}_۱}{۲^۴} + \frac{\text{چ}_۲}{۲^۳} + \frac{\text{چ}_۳}{۲^۲} + \frac{\text{چ}_۴}{۲}$$

جیسا کہ پہلے ثابت ہوا۔ اگر چرخی ا₁ بقدر لا اوپر کو اٹھے تو باقی چرخیاں بالترتیب بقدر ۲ لا، ۴ لا، ۸ لا اوپر کی طرف جائیں گی۔ اس لئے بوجھ پر اور چرخیوں کے وزنوں پر جو کام ہوا وہ

$$= \text{ب} \times \text{لا} + \text{چ}_۱ \times \text{لا} + \text{چ}_۲ \times ۲\,\text{لا} + \text{چ}_۳ \times ۴\,\text{لا} + \text{چ}_۴ \times ۸\,\text{لا}$$

$$= ۱۶\,\text{لا} \left[\frac{\text{ب}}{۲^۴} + \frac{\text{چ}_۱}{۲^۴} + \frac{\text{چ}_۲}{۲^۳} + \frac{\text{چ}_۳}{۲^۲} + \frac{\text{چ}_۴}{۲}\right]$$

$$= ۱۶\,\text{لا} \times \text{ز} = \text{زور کا کام}۔$$

خواہ چرخیوں کی تعداد کتنی ہو۔ ثبوت کا طریقہ یہی ہوگا +

امثلہ نمبری (۲۳)

(۱) سوالات ذیل میں متحرک چرخیاں بے وزن ہیں۔ اور ان کی تعداد ن ہے۔ بوجھ ب ہے۔ اور زور ز ہے۔

(۱) اگر ن = ۴ اور ز = ۲۰ پونڈ وزن تو ب دریافت کرو۔

(۲) اگر ن = ۴ اور ب = ۱ ہنڈرڈویٹ تو ز دریافت کرو۔

(۳) اگر ب = ۵۶ پونڈ وزن اور ز = ۷ پونڈ وزن تو ن دریافت کرو

(۲) ذیل کے سوالوں میں متحرک چرخیوں میں سے ہر ایک کا وزن چ ہے اور ان کی تعداد ن ہے۔ اور زور ز ہے اور بوجھ ب ہے +

(۱) اگر ن = ۴، چ = ۱ پونڈ وزن اور ب = ۹۷
پونڈ وزن تو ز دریافت کرو

(۲) اگر ن = ۳، چ = $\frac{1}{2}$ ۱ پونڈ وزن اور ز = ۷
پونڈ وزن تو ب دریافت کرو

(۳) اگر ن = ۵، ب = ۷۷۵ پونڈ وزن اور ز = ۳۱
پونڈ وزن تو چ دریافت کرو

(۴) اگر ب = ۱۰۷ پونڈ وزن، ز = ۲ پونڈ وزن اور
چ = $\frac{1}{2}$ پونڈ وزن تو ن دریافت کرو

(۳) اگر چرخیوں کے نظام اول میں چرخیاں ۴ ہوں اور
ہر ایک کا وزن ۲ پونڈ ہو تو ۲۰ پونڈ وزن کے زور سے
کس قدر بوجھ اٹھ سکے گا؟

(۴) اگر تین متحرک چرخیاں ہوں۔ جن کے وزن نیچے سے
شروع کرکے بالترتیب ۹، ۲، ۱ پونڈ ہوں تو ۶۹ پونڈ بوجھ کو
سہارنے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۵) اگر متحرک چرخیاں ۴ ہوں۔ جن کے وزن نیچے سے
شروع ہوکر بالترتیب ۴، ۳، ۲، ۱ پونڈ ہوں۔ تو ۴۵ پونڈ
بوجھ سہارنے کے لئے کس قدر زور مطلوب ہوگا؟

(۶) اگر چار متحرک چرخیاں ہوں اور ہر ایک کا وزن چ
ہو اور زور ز ہو تو ثابت کرو کہ شہتیر پر ۱۵ ز - ۱۱ چ کے
مساوی دباؤ پڑے گا۔

(۷) اگر تین متحرک چرخیاں ہوں اور ان کے وزن نیچے سے

شروع ہوکر بالترتیب ۴، ۲، ۱ پونڈ ہوں تو ۲۸ پونڈ وزن کو سہارنے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۸) چرخیوں کو بے وزن فرض کرکے ثابت کروکہ مشینی مفاد اس مشینی مفاد سے زیادہ ہے جو فی الواقع حاصل ہوتا ہے+

(۹) چرخیوں کا ایک نظام ہے جس میں ہر ایک چرخی الگ رسی کے ذریعہ لٹکتی ہے اگر اس میں تین چرخیاں ہوں۔تو ۷ پونڈ وزن کے مساوی زور ایک خاص بوجھ کو سہار سکتا ہے۔اور اگر اس میں چار چرخیاں ہوں۔تو چار پونڈ وزن کا زور اسی بوجھ کو سہار سکتا ہے۔ وہ بوجھ دریافت کرو اور چرخیوں کا وزن بھی دریافت کرو۔ جبکہ سب چرخیاں ہم وزن ہیں+

(۱۰) ایک نظام میں چار چرخیاں ہیں اور ہر ایک چرخی ایک الگ رسی سے لٹکتی ہے رسیوں کا ایک ایک سرا اوپر والی چرخی سے بندھا ہے اور رسی کا دوسرا حصہ حصہ عمودی ہے۔اگر نیچے سے شروع کرکے چرخیوں کے وزن بالترتیب چ، ۲چ، ۳چ، ۴چ ہوں تو ۱۵ چ وزن کا بوجھ سہارنے کے لئے کس قدر وزن درکار ہوگا اور جس شہتیر سے رسیوں کے دوسرے سرے بندھے ہوئے ہیں۔ اس کو سہارنے کے لئے کس قدر قوت مطلوب ہوگی؟

(۱۱) چار چرخیوں کے نظام میں اگر زور ز ہو اور بوجھ ب ہوتو ثابت کروکہ شہتیر پر کا دباؤ $\frac{۱۵}{۱۶}$ ب اور ۱۵ ز کے درمیان ہے+

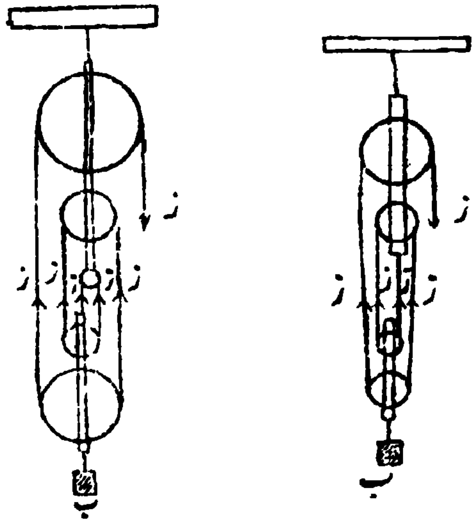
(۱۲) ایک آدمی وزنی ۱۲ سٹون ایک چار بے وزن چرخیوں کے نظام کی سب سے نچلی چرخی سے لٹک رہا ہے ہر ایک چرخی ایک الگ رسی سے لٹک رہی ہے۔وہ آدمی اپنے آپ کو اس طرح سہارے ہوئے ہے کہ آخری رسی کا سرا ایک ثابت چرخی پر سے گزار کر اس نے پکڑ رکھا ہے۔ تو معلوم کرو کہ اس رسی کو وہ کس قوت سے کھینچتا ہے؟

(۱۳) ایک آدمی وزنی ۱۵۶ پونڈ ایک چار چرخیوں والے نظام کی سب سے نیچے والی چرخی سے لٹک رہا ہے۔ ہر ایک چرخی کا وزن ۱۰ پونڈ ہے۔ آخری رسی کا سرا ایک ثابت چرخی پر سے گزر کر آدمی کے ہاتھ میں ہے۔ اس طرح وہ اپنے آپ کو سہارے ہوئے ہے۔ اگر تمام رسیاں عمودی ہوں۔ تو دریافت کرو کہ آخری رسی پر وہ کتنی قوت لگاتا ہے؟

(۱۴۹) **چرخیوں کا دوسرا نظام**۔ اس نظام میں ایک ہی رسی تمام چرخیوں پر سے گزرتی ہے۔ اس میں زور اور بوجھ کا باہمی تعلق دریافت کرو +

اس نظام میں چرخیوں کے دو سہارے ہوتے ہیں۔ اوپر کا سہارا ثابت ہوتا ہے اور نیچے کا متحرک۔ ایک ہی رسی تمام چرخیوں پر سے گزرتی ہے۔ جیسا کہ شکلوں سے ظاہر ہے +

اشکال دوسرے صفحہ پر دیکھو



اگر دونوں سہاروں میں چرخیوں کی تعداد ایک ہی ہو۔ تو رسی کا ایک سرا اوپر کے سہارے سے باندھنا چاہیئے۔ شکل (۱) اور اگر اوپر کے سہارے میں چرخیوں کی تعداد نیچے کے سہارے سے بقدر ایک زیادہ ہو۔ تو رسی کا سرا نیچے کے سہارے سے باندھنا چاہیئے۔ شکل (۲)

پہلی صورت میں دونوں سہاروں کو ملانیوالی رسیوں کی تعداد جفت ہوگی۔ اور دوسری صورت میں طاق۔

ہر صورت میں فرض کرو کہ رسیوں کی تعداد جو نیچے کے سہارے کو اٹھائے ہوئے ہے۔ **ن** ہے۔ چونکہ ایک ہی رسی چکنی چرخیوں پر سے گزرتی ہے تو رسی کے ہر حصہ کا تناؤ **ز** ہوگا۔ یعنی کل قوت جو نیچے کے سہارے کو اوپر کو

اٹھاتی ہے۔ ن × ز ہوگی۔
فرض کرو کہ بوجھ ب ہے اور نچلے سہارے کا وزن پ
ہے۔ تو تعلق مطلوب یہ ہوگا۔ ب + پ = ن × ز
عملاً چرخیاں ایک دوسرے کے متوازی رکھی جاتی ہیں
اس لئے رسیاں بالکل متوازی نہیں ہوتیں۔ لیکن وہ قریباً
متوازی ضرور ہوتی ہیں۔ یعنی تعلق مندرجہ بالا قریباً درست
ضرور ہوتا ہے +

امثلہ نمبری (۲۴)

(۱) اگر ۵ پونڈ کا وزن ۲۴ پونڈ کے وزن کو سہارے تو نیچے کے سہارے کا وزن دریافت کرو۔ جبکہ ہر ایک سہارے میں تین چرخیاں ہیں۔

(۲) اگر رسی کے کھلے سرے پر ۵ اور ۶ پونڈ کے وزن بالترتیب ۱۸ اور ۲۲ پونڈ کے وزن نچلے سہارے پر سہاریں تو رسیوں کی تعداد اور نچلے سہارے کا وزن دریافت کرو +

(۳) اگر ۴ اور ۵ پونڈ کے وزن بالترتیب ۵ اور ۱۸ پونڈ کے وزنوں کو سہاریں تو نیچے کے سہارے کی چرخیوں کی تعداد اور سہارے کا وزن دریافت کرو +

(۴) ایک ۶ پونڈ کا وزن ۲۸ پونڈ وزن کو سہارتا ہے۔ اور ۸ پونڈ کا وزن ۲۴ پونڈ وزن کو سہارتا ہے۔ تو رسیوں کی تعداد اور نچلے سہارے کا وزن معلوم کرو +

(۵) چرخیوں کے نظام دوم میں ایک آدمی ٹوکرے میں بٹھاکر نچلے سہارے سے لٹکا دیا گیا ہے۔ اگر وہ رسی کے کھلے سرے کو پکڑ کر کھینچنے سے اپنے آپ کو سہارے۔ تو معلوم کرو کہ کس قوت سے وہ رسی کو کھینچتا ہے۔ رسی کا میلان سمت راس سے نظر انداز کردیا جائے۔ اور آدمی اور ٹوکرے کا وزن ب ہے +

اگر رسی کا کھلا سرا ایک چرخی پر سے گزرے جو زمین پر نصب کردی گئی ہے۔ تو آدمی کس قدر قوت لگائے گا؟

(۶) ایک آدمی وزنی ۱۲ سٹون ایک چرخیوں کے نظام کے ذریعہ ایک ۳ ہنڈرڈ ویٹ کا وزن اٹھاتا ہے۔ اس نظام میں ایک ہی رسی تمام چرخیوں پر سے گزرتی ہے۔ اور ہرایک سہارے میں ۴ چرخیاں ہیں۔ اور رسی اوپر کے سہارے کو بندھی ہے چرخیوں کے وزنوں کو نظر انداز کرکے معلوم کرو کہ آدمی کا دباؤ زمین پر کیا ہوگا۔ اگر وہ سمت شاقولی میں کھینچے+

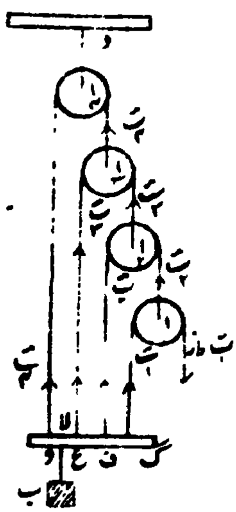
(۷) یہ کہا جاتا ہے کہ" پال اعظم" جس کا وزن ۱۸ ٹن ہے۔ گرجے کے گھنٹہ گھر میں ایک ایسے رسے کے ذریعہ اٹھایا گیا تھا۔ جو چرخیوں کے دو سہاروں میں سے چار دفعہ گزارا گیا تھا۔ تو بیان کرو کہ چرخیاں کس طرح لگائی گئی ہوں گی۔ اور نیز رسے کی مضبوطی کا حساب لگاؤ +

(۸) اس نظام میں کام کے اصول کی تصدیق کرو۔ اور رفتاری نسبت دریافت کرو+

(۹) ایک چرخیوں کے نظام دوم میں ہر ایک سہارے میں
۲ چرخیاں ہیں۔ تو دریافت کرو کہ ۳۰۰ پونڈ وزن اٹھانے کے
لئے کس قدر قوت لگانی پڑیگی۔ رگڑ نہ ہونے کی صورت میں
جس قدر وزن اٹھتا ہے۔ اس کا ۵۴٪ وزن رگڑ ہونے کی
صورت میں اٹھتا ہے تو قوت مطلوبہ دریافت کرو +

(۱۰) ایک نظام میں رفتاری نسبت ۸ : ۱ ہے۔ اور رگڑ اس
سے کہ قوت مستعملہ کا ۵۵ فی صد کارآمد ہوتا ہے تو معلوم
کرو کہ ۵ ہنڈرڈویٹ اٹھانے کے لئے کیا قوت درکار ہے

(۱۵۰) **چرخیوں کا تیسرا نظام**۔ تمام رسیاں بوجھ کے ساتھ باندھی
جاتی ہیں۔ زور اور بوجھ کا باہمی تعلق دریافت کرو +



اس نظام میں جو رسی کسی چرخی پر
سے گزرتی ہے وہ ایک طرف تو
ایک تختی سے بندھی ہوتی ہے
جس سے بوجھ لٹکتا ہے اور
دوسری طرف نیچے والی چرخی سے
بندھی ہوتی ہے۔ اور سب سے
نیچے والی چرخی پر کی رسی ایک طرف
تختی سے بندھی ہوتی ہے اور
دوسری طرف زور لگایا جاتا ہے۔ اور
سب سے اوپر والی چرخی ثابت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ نیچے سے شروع کرکے چرخیاں ا۱، ا۲، ا۳......

اور ان پر گزرنیوالی رسیوں کے تناؤ $ت_۱$ ، $ت_۲$ ، $ت_۳$ ..... ہیں
اگر زور ز ہے۔ تو $ت_۱ = ز$

اول۔ چرخیوں کے وزنوں کو نظر انداز کرو +

نیچے سے شروع کرکے بالترتیب چرخیوں کے توازن سے مفصلہ ذیل مساواتیں حاصل ہونگی +

$$ت_۲ = ۲\, ت_۱ = ۲\, ز$$
$$ت_۳ = ۲\, ت_۲ = ۲^۲\, ز$$
$$ت_۴ = ۲\, ت_۳ = ۲^۳\, ز$$

لیکن جس تختے سے بوجھ سب لٹکایا گیا ہے۔ وہ بھی متوازن ہے اسلئے

$$ب = ت_۱ + ت_۲ + ت_۳ + ت_۴ = ز + ۲\, ز + ۲^۲\, ز + ۲^۳\, ز$$
$$= ز\, \frac{۱ - ۲^۴}{۱ - ۲} = ز\, (۲^۴ - ۱) \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر ن چرخیاں ہوں۔ جن میں سے (ن-۱) متحرک ہوں۔ تو اسی طرح سے

$$ب = ت_۱ + ت_۲ + ت_۳ + \ldots\ldots + ت_ن$$
$$= ز + ۲\, ز + ۲^۲\, ز + \ldots\ldots + ۲^{ن-۱}\, ز$$

$= ز\, \frac{۱ - ۲^ن}{۱ - ۲}$ سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے $= ز\, (۲^ن - ۱) \ldots\ldots (۲)$

اس لئے مشینی مفاد $= ۲^ن - ۱$

دوم۔ فرض کرو کہ متحرک چرخیوں کے وزن نیچے سے شروع کرکے $چ_۱$ ، $چ_۲$ ، ..... ہیں۔ بالترتیب چرخیوں کے توازن سے۔

$$ت_۲ = ۲\, ت_۱ + چ_۱ = ۲\, ز + چ_۱$$
$$ت_۳ = ۲\, ت_۲ + چ_۲ = ۲^۲\, ز + ۲\, چ_۱ + چ_۲$$
$$ت_۴ = ۲\, ت_۳ + چ_۳ = ۲^۳\, ز + ۲^۲\, چ_۱ + ۲\, چ_۲ + چ_۳$$

لیکن تختی کے توازن سے

$$\text{ب} = \text{ت}_{۱} + \text{ت}_{۲} + \text{ت}_{۳} + \text{ت}_{۴}$$

$$= (۱+۲+۴+۸)\,\text{ز} + (۱+۲+۴)\,\text{ج}_{۱} + (۱+۲)\,\text{ج}_{۲} + \text{ج}_{۳}$$

$$= \frac{۲^{۴}-۱}{۲-۱}\,\text{ز} + \frac{۲^{۳}-۱}{۲-۱}\,\text{ج}_{۱} + \frac{۲^{۲}-۱}{۲-۱}\,\text{ج}_{۲} + \text{ج}_{۳}$$

$$= (۲^{۴}-۱)\,\text{ز} + (۲^{۳}-۱)\,\text{ج}_{۱} + (۲^{۲}-۱)\,\text{ج}_{۲} + \text{ج}_{۳} \quad ..\ .....\ (۳)$$

اگر ن چرخیاں ہوں۔ جن میں سے (ن-۱) متحرک ہوں۔ تو اسی طرح سے

$$\text{ب} = \text{ت}_{\text{ن}} + \text{ت}_{\text{ن}-۱} + \cdots\cdots + \text{ت}_{۲} + \text{ت}_{۱}$$

$$= (۲^{\text{ن}-۱} + ۲^{\text{ن}-۲} + ۲^{\text{ن}-۳} + \cdots\cdots + ۱)\,\text{ز} + (۲^{\text{ن}-۲} + ۲^{\text{ن}-۳} + \cdots\cdots + ۱)\,\text{ج}_{۱}$$

$$+ (۲^{\text{ن}-۳} + ۲^{\text{ن}-۴} + \cdots\cdots + ۱)\,\text{ج}_{۲} + \cdots\ \cdots + (۱+۲)\,\text{ج}_{\text{ن}-۲} + \text{ج}_{\text{ن}-۱}$$

$$= \frac{۲^{\text{ن}}-۱}{۲-۱}\,\text{ز} + \frac{۲^{\text{ن}-۱}-۱}{۲-۱}\,\text{ج}_{۱} + \frac{۲^{\text{ن}-۲}-۱}{۲-۱}\,\text{ج}_{۲} + \cdots\cdots + \frac{۲^{۲}-۱}{۲-۱}\,\text{ج}_{\text{ن}-۲} + \text{ج}_{\text{ن}-۱}$$

$$= (۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{ز} + (۲^{\text{ن}-۱}-۱)\,\text{ج}_{۱} + (۲^{\text{ن}-۲}-۱)\,\text{ج}_{۲} + \cdots\cdots + (۲^{۲}-۱)\,\text{ج}_{\text{ن}-۲} + (۲-۱)\,\text{ج}_{\text{ن}-۱} \cdots\cdots (۴)$$

اگر سب چرخیوں کے وزن برابر ہوں یعنی

$$\text{ج}_{۱} = \text{ج}_{۲} = \cdots\cdots = \text{ج}_{\text{ن}-۱} = \text{ج}$$

تو مساوات (۴) کی یہ صورت ہوجائے گی +

$$\text{ب} = (۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{ز} + \text{ج}\left\{۲^{\text{ن}-۱} + ۲^{\text{ن}-۲} + \cdots\ \cdots + ۲ - (\text{ن}-۱)\right\}$$

$$= (۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{ز} + \text{ج}\left[۲^{\text{ن}} - \text{ن} - ۱\right]$$ سلسلہ ہندسیہ جمع کرنے سے

سہارنے والے شہتیر پر کا دباؤ۔ یہ دباؤ زور اور بوجھ اور چرخیوں کے وزنوں کے ساتھ متوازن ہے اس لئے۔

$$= \text{ز} + \text{ب} + \text{ج}_{۱} + \text{ج}_{۲} + \cdots\cdots + \text{ج}_{\text{ن}}$$

لہذا آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے +

مثال۔ اگر چار چرخیاں ہوں جن کے وزن نیچے سے شروع

کرکے ۴، ۵، ۶، ۷ پونڈ ہوں۔ تو ایک ہنڈرڈویٹ بوجھہ کو کس قدر زور سہارے گا؟

حسب طریق کتابت مندرجہ بالا

ت۲ = ۲ ز + ۴

ت۳ = ۲ ت۲ + ۵ = ۴ ز + ۱۳

ت۴ = ۲ ت۳ + ۶ = ۸ ز + ۳۲

نیز ۱۱۲ = ت۴ + ت۳ + ت۲ + ت۱ [ت۱ = ز]

= ۱۵ ز + ۴۹

∴ ز = ۶۳/۱۵ = ۴ ۱/۵ پونڈ وزن

(۱۵۱) اس نظام میں ہم دیکھتے ہیں کہ چرخیوں کا وزن جس قدر زیادہ ہو۔ تو ایک دیئے ہوئے بوجھہ ب کو سہارنے کے لئے اسی قدر کم زور درکار ہوگا۔ اس لئے چرخیوں کے وزن زور کی امداد کرتے ہیں۔ چرخیوں کا مناسب انتخاب کرنے سے تمام نظام بغیر کسی زور کے متوازن رہ سکتا ہے + مثلاً۔ فرض کرو کہ تین متحرک چرخیاں ہیں اور ہر ایک کا وزن چ ہے تو پہلی دفعہ کی مساوات (۳) یہہ ہوگی +

ب = ۱۵ ز + ۱۱ چ

پس اگر ۱۱ چ = ب ہو تو ز صفر ہوگا۔ یعنی رسی کے کھلے سرے پر بغیر کسی زور لگانے کے توازن قائم رہیگا +

(۱۵۲) چرخیوں کے تیسرے نظام میں جس تختی سے بوجھہ لٹکایا جاتا ہے وہ افقی حالت میں نہیں رہسکتی جب تک بوجھہ لٹکانیکے

نقطہ کا مناسب انتخاب نہ کیا جائے۔ کسی خاص صورت میں یہ نقطہ آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے +

دفعہ ۱۵۰ کی شکل میں فرض کرو کہ تین متحرک چرخیاں ہیں جن کے وزن نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ اور نقاط د، ع، ف، گ نقاط ہیں ہر دو متصلہ نقطوں کا فاصلہ ا ہے۔ اور وہ نقطہ جہاں کہ وزن لٹکایا گیا ہے۔ لا ہے تو $\frac{\text{ت}}{۱}$، $\frac{\text{ت}}{۲}$، $\frac{\text{ت}}{۳}$، $\frac{\text{ت}}{۴}$ کا حاصل لا میں سے گزرنا چاہئیے۔ اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۹

$$\text{د لا} = \frac{\frac{\text{ت}}{۴}\times ۰ \times \frac{\text{ت}}{۳}\times \text{ا} \times \frac{\text{ت}}{۲}\times ۲\text{ا} + \frac{\text{ت}}{۱}\times ۳\text{ا}}{\frac{\text{ت}}{۴}+\frac{\text{ت}}{۳}+\frac{\text{ت}}{۲}+\frac{\text{ت}}{۱}}$$

$$= \frac{۴\text{ز}\times \text{ا} + ۲\text{ز}\times ۲\text{ا} + \text{ز}\times ۳\text{ا}}{۸\text{ز}+۴\text{ز}+۲\text{ز}+\text{ز}}$$

$$= \frac{۱۱}{۱۵}\,\text{ا}$$

$\therefore$ د لا $= \frac{۱۱}{۱۵}$ د ع جس سے لا کا مقام دریافت ہوگیا +

(۱۵۴) چرخیوں کا یہ نظام بوجھ اٹھانے کے لئے نہیں بنایا گیا تھا اگر یہ اس کام کے لئے استعمال کیا جائے تو اتنا مفید ثابت نہیں ہوگا +

جہاں جھٹکا دینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ وہاں یہ نظام کارآمد ہوتا ہے۔ مثلاً ایک بادبانی کشتی میں پچھلے بادبان کے مستول کو کھڑا رکھنے کے لئے یہ استعمال کیا جاتا ہے +

دفعہ ۱۵۰ کی شکل میں د ع ف گ کشتی کا عرشہ ہے جس کو رسیاں باندہی جاتی ہیں۔ اور بوجھ کوئی نہیں ہوتا ہے

ا۱، ا۲، ا۳ چرخیوں کی رسیاں سمت راس سے مائل ہوتی ہیں اور نقطہ و مستول کی چوٹی پر ہوتا ہے۔ اور مستول کو سیدھا رکھنا مقصود ہوتا ہے۔ اس صورت میں مزاحمت وہ قوت ہے جو و پر عمل کرتی ہے اور مستول کو سیدھا رکھتی ہے اور زور اسی طرح لگایا جاتا ہے۔ جیسا کہ شکل میں ہے +

(۳۱۵) **کام کے اصول کی تصدیق**۔ فرض کرو کہ بوجھ بقدر فاصلہ لا اوپر کو اٹھتا ہے۔ تو چرخی ا۳ اور تختی کو ملانیوالی رسی بقدر لا کم ہوجاتی ہے۔ اس لئے چرخی ا۳ بقدر لا نیچے کو اترتی ہے۔ چونکہ ا۳ بقدر لا نیچے کو اترتی ہے اور تختی بقدر لا اوپر کو چڑھتی ہے۔ اس لئے ا۲ اور تختی کو ملانیوالی رسی بقدر ۲ لا کم ہوتی ہے۔ اور رسی کا یہ حصہ ا۲ کے اوپر سے ہیل جاتا ہے۔ اس وجہ سے چرخی ا۲ کا نیچے کی طرف طے کردہ فاصلہ = ۲ لا + وہ فاصلہ جو چرخی ا۳ سے نیچے اترتی ہے۔ یعنی چرخی ا۲ بقدر ۲ لا + لا یعنی ۳ لا نیچے کو اترتی ہے۔ اس لئے رسی ا۲ ف بقدر ۴ لا کم ہوتی ہے۔ اور رسی کا یہ حصہ چرخی ا۲ پر سے ہیل جاتا ہے۔ اس لئے ا۱ کا نیچے کی طرف طے کردہ فاصلہ = ۴ لا + وہ فاصلہ جو چرخی ا۲ نیچے کو اترتی ہے یعنی ۴ لا + ۳ لا یا ۷ لا۔ پس رسی ا۱ گ بقدر ۸ لا کم ہوتی ہے اور چرخی ا۱ بقدر ۷ لا نیچے کو اترتی ہے۔ یعنی ز کا نقطۂ عمل بقدر ۱۵ لا نیچے کو اترتا ہے۔ چرخیوں کے وزنوں کو نظر انداز کر کے

ز کا کام = ۱۵ لا × ز = لا (۲^۴ - ۱) ز = لا × ب بذریعہ مساوات
(۱) دفعہ ۱۵۰ = اس کام کے جو بوجھ پر کیا گیا +
چرخیوں کے وزن محسوب کرنے سے زور کا کام اور چرخیوں کے وزنوں کا کام
= ز × ۱۵ لا + چ۱ × ۷ لا + چ۲ × ۳ لا + چ۳ × لا
چرخیوں کے وزن چونکہ زور کو امداد دیتے ہیں اس لئے کام میں شامل کئے گئے ہیں۔ اور یہ کام
= لا [ز (۲^۴ - ۱) + چ۱ (۲^۳ - ۱) + چ۲ (۲^۲ - ۱) + چ۳]
= لا × ب بذریعہ مساوات (۳) دفعہ ۱۵۰
= اس کام کے جو بوجھ پر کیا گیا +
اگر ن چرخیاں ہوں۔ تو اسی طرح ہمیں معلوم ہوگا کہ ز کے نقطہ عمل کا طے کردہ فاصلہ ب کے طے کردہ فاصلہ سے (۲^ن - ۱) گنا ہے۔ یعنی یہ کہ رفتاری نسبت ۲^ن - ۱ ہے +

امثلہ نمبری (۲۵)

(۱) ذیل کے سوالات میں چرخیاں بے وزن ہیں اور ان کی تعداد ن ہے اور زور ز ہے اور بوجھ ب ہے +

(۱) اگر ن = ۴، ز = ۲ پونڈ وزن تو ب دریافت کرو +

(۲) اگر ن = ۵، ب = ۱۲۴ پونڈ وزن تو ز دریافت کرو +

(۳) اگر ب = ۱۰۵ پونڈ وزن، ز = ۷ پونڈ وزن تو ن دریافت کرو +

(۲) ذیل کے سوالوں میں چرخیاں برابر ہیں اور ہر ایک کا وزن و ہے اور ز زور ہے اور ب بوجھ ہے۔ اور ن چرخیوں کی تعداد ہے +

(۱) اگر ن = ۴، و = ۱ پونڈ وزن اور ز = ۱۰ پونڈ وزن تو ب دریافت کرو +

(۲) اگر ن = ۳ ، و = $\frac{1}{۲}$ پونڈ وزن اب = ۱۱۴ پونڈ وزن تو ز دریافت کرو۔

(۳) اگر ن = ۵ ، ز = ۳ پونڈ وزن ، ب = ۱۰۶ پونڈ وزن تو و دریافت کرو۔

(۴) اگر ز = ۴ پونڈ وزن ، ب = ۱۲۷ پونڈ وزن ، و = $\frac{1}{۲}$ پونڈ وزن تو ن دریافت کرو۔

(۳) اگر چرخیاں پانچ ہوں اور ہر ایک کا وزن ایک پونڈ ہو۔ تو ۳ ہنڈرڈویٹ بوجھ اٹھانے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟ اگر چرخیاں ایک جیسی ہوں تو تختی کو متوازی الافق رکھنے کے لئے بوجھ کس نقطہ پر باندھنا چاہیئے؟

(۴) چار بے وزن چرخیوں کے ایک نظام میں جو رسیاں چرخیوں کے گرد گزرتی ہیں۔ اگر ان کو ایک بے وزن سلاخ سے علی التواتر ایک ایک انچ کے فاصلہ پر باندھ دیا جائے تو دریافت کرو کہ سلاخ کے افقی حالت میں رکھنے کے لئے بوجھ کو کس مقام پر باندھنا چاہیئے؟

(۵) اگر چار چرخیاں ہوں اور ہر ایک کا وزن بوجھ کا $\frac{1}{۶۴}$ ہو تو مشینی مفاد معلوم کرو۔

(۶) تین بے وزن چرخیوں کا ایک ایسا نظام ہے۔ کہ اس میں ہر ایک رسی ایک سلاخ سے بندھی ہے اور بوجھ اس سلاخ سے لٹکتا ہے اگر ہر ایک چرخی کا قطر ۲ انچ ہو۔ تو دریافت کرو کہ سلاخ کو متوازی الافق رکھنے کے لئے بوجھ کہاں باندھا جائے؟

(۷) اگر چرخیاں مساوی ہوں۔ اور زور مقدار میں ایک چرخی کے وزن کے برابر ہو اور چرخیوں کی تعداد پانچ ہو۔ تو ثابت کرو

کہ بوجھ زور سے ۵۰ گنا ہوگا

(۸) چرخیوں کے تیسرے نظام میں تین چرخیاں ہیں۔ اگر چرخیوں کے وزن سب برابر ہوں۔ تو حالت توازن میں زور اور بوجھ کا تعلق دریافت کرو۔

اگر ہرایک چرخی کا وزن ۱۲ اونس ہو۔ تو محض چرخیوں کے ذریعے کس قدر بوجھ اُٹھ سکے گا؟

اگر بوجھ ۲۵ پونڈ وزن کے مساوی ہو۔ اور زور ۲ پونڈ وزن ہو۔ تو ہرایک چرخی کا کیا وزن ہوگا؟

(۹) بے وزن چرخیوں کے تیسرے نظام میں ۲۰ پونڈ وزن کا زور بوجھ کو اُٹھا سکتا ہے۔ ایک رسی کا کاٹ جس کے ذریعہ وہ بوجھ سے بندھی ہے ٹوٹ جاتا ہے۔ یہ رسی جس چرخی پر سے گزرتی تھی اس چرخی سے ب باندھ دی جاتی ہے اور اب ۱۵۰ پونڈ وزن کا زور درکار ہوتا ہے۔ تو چرخیوں کی تعداد اور بوجھ کی مقدار دریافت کرو۔

(۱۰) بے وزن چرخیوں کے تیسرے نظام میں اگر آخری چرخی کے گرد گزرنے والی رسی بوجھ سے باندھ دی جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ایک ایسی نسبت میں کم ہوجائے گا۔ جو چرخیوں کی تعداد پر منحصر ہے۔

اگر تناؤ ۱۶ : ۱۵ کی نسبت میں کم ہو جائے تو چرخیوں کی تعداد معلوم کرو۔

(۱۱) چرخیوں کا ایک نظام ایسا ہے۔ کہ اُس میں ہرایک

رسی بوجھ سے بندھی ہے اگر ہرایک چرخی کا وزن و ہ
اور چرخیوں کے اوزان کا مجموعہ وَ ہو- اور ز اور ب
زور اور بوجھ ہوں- تو ثابت کرو کہ زور ز+ و بوجھ
ب + وَ کو اسی نظام میں سہار سکے گا- بشرطیکہ چرخیا
بے وزن ہوں-

(۱۲) اگر ن بے وزن چرخیاں ہوں اور اگر ز اور ب
کو ایک رسی کے ذریعے ملا دیا جائے- اور یہ رسی ایک چر
کو اٹھائے ہوئے ہو اور چرخی سے ایک وزن و لٹکا د
جائے- تو ز، ب، و کا تعلق دریافت کرو-

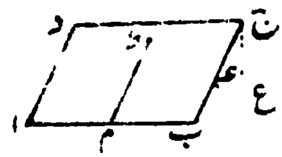
(۱۳) اگر ن بے وزن چرخیاں ہوں- اور ہرایک کا قطر
۲ ا ہو تو ثابت کرو کہ زور کے خط عمل سے بوجھ
نقطہ عمل کا فاصلہ $\frac{\text{ا ن} \times ۲^{\text{ن}}}{۲^{\text{ن}} - ۱}$ ہوگا-

سوم- سطح مائل

(۱۵۵) اگر ایک سطح استوار افق کے ساتھ زاویہ بنائے
تو یہ سطح مائل بطور مشین کے کام دے سکتی ہے
اس کے استعمال سے بھاری بوجھ اٹھانے میں سہولت
ہوتی ہے-

اس باب میں ہم صرف اس صورت پر غور کریں گے
جس میں ایک جسم سطح پر ساکن ہو- اور اس جسم پر عمل
کرنے والی قوتیں ایسی سطح میں واقع ہوں- جو سطح ما

اور سطح افقی کے خط تقاطع پر عمود ہو۔ یعنی یہ قوتیں
خطِ میلانِ اعظم میں سے گزرنے والی عمودی سطح
میں ہوں۔
اس طرح سے ایک سطح مائل کے خط میلان اعظم کا تصور کیا
جا سکتا ہے۔ ایک مستطیل شکل کا مقوی اب ج د لو۔ اور اسکو ایک



افقی میز پر افق سے زاویہ بناتے ہوئے اس طرح رکھو
کہ خط اب میز کی سطح پر ہو۔ مقوے پر ایک نقطہ ط لو اور ط
سے ط م، اب پر عمود نکالو۔ تو ط میں سے گزرنے والا
خطِ میلان اعظم ط م ہے۔
ج سے ج ع میز کی سطح پر عمود نکالو اور ب ع ملاؤ
خطوط ب ج، ب ع اور ج ع بالترتیب سطح مائل کے
طول، قاعدہ اور ارتفاع کہلاتے ہیں۔ اور زاویہ ج ب ع
افق سے سطح کا میلان ہے۔
اس باب میں سطح مائل کو چکنا فرض کیا گیا ہے۔ اس لئے
اگر کوئی جسم سطح پر دھرا ہو۔ تو اس کے اور سطح کے
درمیان صرف ایک ہی تعامل ہو سکتا ہے اور وہ سطح مائل
پر عمود ہوگا۔

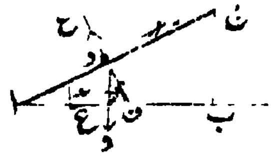
چونکہ سطح استوار ہے۔ اِس لئے توازن قائم رکھنے کے لئے تعامل کی شکل میں جس قدر قوت درکار ہو گی سطح اسے بہم پہنچا سکے گی۔

(۱۵۶) ایک جسم جس کا وزن معلوم ہے ایک سطح مائل پر ساکن ہے تو جسم کے وزن اور سطح کے عمل اور زور کے باہمی تعلقات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ جسم کا وزن و ہے اور زور ز ہے۔ اور سطح کا عمل ع ہے۔ اور افق سے سطح کا میلان عہ ہے۔

صُورت اول۔ فرض کرو کہ زور سطح مائل کے اُوپر کی طرف خطِ میلان اعظم کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح مائل اج ہے اور ا میں سے گزرنے والا خط افقی اب ہے۔ اور د غ سمت شاقولی میں کھینچا گیا ہے۔



فرض کرو کہ جسم د میں سے جو خط سطح پر عمود ہے وہ اب کو ف پر ملتا ہے۔ تو یہ ظاہر ہے کہ

زاویہ ف د غ = ۹۰ − ا د غ = د ا غ = عہ

چونکہ جسم پر صرف تین قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اس لئے بذریعہ مسئلہ لامی ہر ایک قوت باقی دو کے درمیان

زاویہ کی جیب کے متناسب ہے۔

$$\therefore \frac{\text{ز}}{\text{جیب}(\text{ع، و})} = \frac{\text{ع}}{\text{جیب}(\text{و، ز})} = \frac{\text{و}}{\text{جیب}(\text{ز، ع})}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ز}}{\text{جیب}(180^\circ - \text{عہ})} = \frac{\text{ع}}{\text{جیب}(90^\circ + \text{عہ})} = \frac{\text{و}}{\text{جیب } 90^\circ}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ز}}{\text{جیب عہ}} = \frac{\text{ع}}{\text{جم عہ}} = \text{و} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

∴ ز = و جیب عہ

اور ع = و جم عہ

تعلق (۱) اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ز : ع : و :: ارتفاع سطح : قاعدہ سطح : طول سطح

یا بطرز دیگر۔ و کی تحلیل سطح کی سمت میں اور سطح کی عمودی سمت میں کرو تو اس کے اجزاء تحلیلی یہ ہوں گے۔

و جم ا د غ یعنی و جب عہ، د ا کی سمت میں

اور و جب ا د غ یعنی و جم عہ، د ب کی سمت میں

پس ز = و جیب عہ اور ع = و جم عہ

اگر زور ز جسم کو ا سے کھینچ کر ج تک لے جائے تو کام

= ز × ا ج

لیکن ز = و جیب عہ

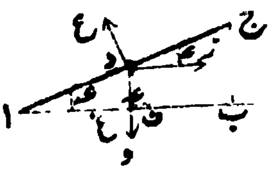
∴ کام = و × ا ج × جیب عہ = و × ب ج

لہذا یہ کام اس کام کے مساوی ہے جو جسم پر کیا جاتا اگر جسم بلا امداد سطح مائل اتنی ہی بلندی تک اٹھایا جاتا۔

پس کام کے اصول کی تصدیق ہوئی۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ زور سمت اُفقی میں عمل کرتا ہے [اس صورت میں ہمیں یہ فرض کرنا چاہیئے کہ سطح میں و پر ایک چھوٹا سا سوراخ ہے جس میں سے ایک رسی گزر کر جسم سے بندھی ہوئی ہے۔ یا یہ کہ ایک افقی قوت جسم کو سطح کی طرف دھکیلتی ہے]۔ جیساکہ صُورت اول میں ثابت ہوا۔

ز / جب (ع، و) = ع / جب (و، ز) = و / جب (ز، ع)



یعنی ز / جب (۱۸۰° - عہ) = ع / جب ۹۰° = و / جب (۹۰° + عہ) .

یعنی ز / جب عہ = ع / ۱ = و / جم عہ ....(۱)

∴ ز = و مس عہ، ع = و قط عہ

تعلق (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

ز : ع : و :: ارتفاع سطح : طول سطح : قاعدہ سطح

یا بطرز دیگر۔ و کے اجزاء تحلیلی سطح کی سمت میں اور سطح کی عمودی سمت میں و جب عہ اور و جم عہ ہیں اسی طرح ز کے اجزاء تحلیلی ز جم عہ اور ز جب عہ ہیں۔

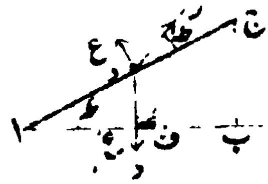
∴ ز جم عہ = و جب عہ

اور ع = ز جب عہ + و جم عہ = و [جب² عہ / جم عہ + جم عہ]

= و (جب² عہ + جم² عہ) / جم عہ = و قط عہ

∴ ز = و مس عہ اور ع = و قطع عہ

صورت سوم۔ فرض کرو کہ زور کی سمت سطح مائل سے زاویہ طہ بناتی ہے تو بذریعہ مثلث لامی



$$\frac{\text{ز}}{\text{جب (ع، و)}} = \frac{\text{ع}}{\text{جب (و، ز)}} = \frac{\text{و}}{\text{جب (ز، ں)}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ز}}{\text{جب}(180^\circ - \text{عہ})} = \frac{\text{ع}}{\text{جب}(90^\circ + \text{طہ} + \text{عہ})} = \frac{\text{و}}{\text{جب}(90^\circ - \text{طہ})}$$

$$\therefore \text{ز} = \text{و}\,\frac{\text{جب عہ}}{\text{جم طہ}} \quad \text{اور} \quad \text{ع} = \text{و}\,\frac{\text{جم (طہ + عہ)}}{\text{جم طہ}}$$

یا بطرز دیگر سطح کی سمت عمودی میں تحلیل کرنے سے

ز جم طہ = و جب عہ اور ع + ز جب طہ = و جم عہ

$$\therefore \text{ز} = \text{و}\,\frac{\text{جب عہ}}{\text{جم طہ}}$$

$$\text{اور ع} = \text{و جم عہ} - \text{ز جب طہ} = \text{و}\left[\text{جم عہ} - \frac{\text{جب عہ جب طہ}}{\text{جم طہ}}\right] = \text{و}\,\frac{\text{جم (طہ + عہ)}}{\text{جم طہ}}$$

اگر ہم غ سے غ ک، ز کے متوازی کھینچیں تاکہ دف کو ک پر ملے تو د غ ک قوتوں کا مثلث ہوگا۔

∴ ز : ع : و :: غ ک : ک د : د غ

ز اور ع معلوم کرنے کے لئے یہ عمل ترسیمی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ صورت سوم میں صورت اول و دوم شامل

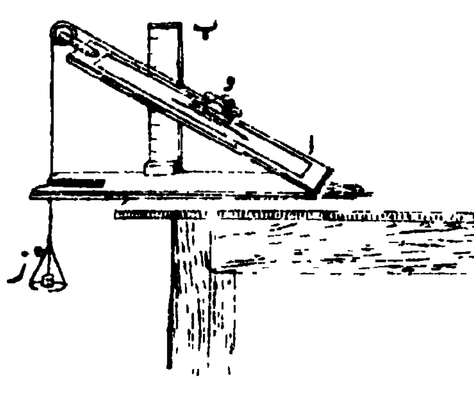
ہیں۔ کیونکہ اگر ط صفر ہو۔ تو صورت اول حاصل ہوگی اور اگر ط = (-ع) تو صورت دوم حاصل ہوگی۔

کام کے اصُول کی تصدیق۔ صورت سوم میں اگر جسم سطح کی سمت میں فاصلہ لا طے کرے۔ تو ز کی سمت میں جو فاصلہ جسم نے طے کیا وہ لا جم ط ہے۔ اور سمت راس میں جو فاصلہ جسم نے طے کیا وہ لا جب ع ہے۔

اس لئے زور کا کام ز × لا جم ط ہے۔ اور جسم کے وزن کے مقابل جو کام ہوا وہ و × لا جب ع ہے جو تعلق اوپر ثابت ہوا۔ اُس کے ذریعہ یہ دونوں مساوی ہیں۔

(۱۵۷) سطح مائل کی صورت میں زور اور بوجھ کا باہمی تعلق دریافت کرنے کے لئے ذیل کا تجربہ کیا جا سکتا ہے۔

ایک لکڑی کا تختہ اب لوجوا پر قبضے کے ذریعے ایک دوسرے تختے سے جڑا ہوا ہو۔ یہ دوسرا تختہ ایسا ہو کہ اس کو ایک میز کے ساتھ جکڑ سکیں۔ رگڑ کو کم کرنے کے لئے اب پر ایک شیشے کا تختہ چڑھا دو۔ ب پر ایک عمودی درجہ دار پیمانہ مضبوط جڑ دو تاکہ ا سے ب کی بلندی آسانی سے پیمانہ پر پڑھی جاسکے



بوجھ پتیل کا ایک وزنی اسطوانہ سا ہوتا ہے۔جس سے ایک رسی بندھی ہوتی ہے۔رسی ایک چرخی پر سے گزرکر ترازو کے ایک پلڑے کو سہارتی ہے۔جس میں وزن رکھے جا سکتے ہیں۔یہ وزن پلڑے کے وزن کے ساتھ مل کر زور کا کام دیتے ہیں چرخی اس طرح لگائی جاتی ہے کہ رسی کا جو حصہ اُس کے اور بوجھ کے درمیان ہو۔وہ سطح مائل کے متوازی ہو۔

تختہ ا ب کو کسی مناسب زاویہ پر لگاؤ۔پلڑے میں اتنا وزن رکھو کہ بوجھ کو سہارنے کے لئے کافی ہو۔نہ کم نہ زیادہ عملاً تجربہ میں یہ بہتر ہوگا۔کہ پلڑے میں پہلے اتنا وزن رکھا جائے کہ پلڑے کا وزن بوجھ کو کھینچنے کی حد تک پہنچ جائے اور پھر اتنا وزن رکھو کہ بوجھ پلڑے کو کھینچ لے۔ان دونوں وزنوں کا اوسط زور ہوگا۔

پیمانہ ا سے ب کی بلندی ی دیکھو۔اور فرض کرو کہ ا ب کا طول ل ہے۔تو معلوم ہوگا کہ $\frac{\text{زور}}{\text{بوجھ}} = \frac{\text{ی}}{\text{ل}}$

اب تختہ کو کسی اور زاویہ پر لگاؤ۔اور دوسرے تجربہ میں بھی زور اور ی اور ل کی قیمتیں معلوم کرو۔تعلق بالا اس صورت میں بھی قائم رہے گا۔

اگر تختے کے بیچوں بیچ ایک باریک شگاف ہو۔جس میں سے رسی گزرسکتی ہو۔تو چرخی ایسے مقام پر لگائی جا سکتی ہے کہ رسی افقی رہے۔جیساکہ دفعہ (۱۵۶) کی صورت دوم میں ہے اس صورت میں زور متوازی الافق ہوگا۔اور ہمیں یہ معلوم ہوگا

کہ $\frac{\text{زور}}{\text{بوجھ}} = \frac{\text{ارتفاع سطح}}{\text{قاعدہ سطح}}$

(۱۵۸) اگر زور ایسی عمودی سطح میں نہ عمل کرے۔ جو خط میلان اعظم میں سے گزرتی ہے۔ تو چکنی سطح مائل پر توازن نہیں رہ سکتا ایسی صورت میں اگر سطح مائل کھردری ہو۔ تو توازن ممکن ہے آئندہ باب میں ہم اس پر بحث کریں گے۔

امثلہ نمبری ۲۶

(۱) دریافت کرو کہ ایک ۱۲ پونڈ وزنی جسم کو کتنی افقی قوت ایک چکنی سطح مائل پر ساکن رکھ سکتی ہے۔ ارتفاع سطح ۳ فٹ ہے اور قاعدہ سطح ۴ فٹ ہے اور سطح کا عمل بھی معلوم کرو۔

(۲) ایک جسم ایک سطح مائل پر اس طرح ساکن ہے۔ کہ قوت اسکے وزن کے نصف کے مساوی سطح کے متوازی اوپر کی طرف اس پر عمل کرتی ہے۔ افق سے سطح کا میلان دریافت کرو۔ اور سطح کا عمل بھی معلوم کرو۔

(۳) ایک رسی جس کا میلان سمت راس سے ۳۰° ہے زیادہ سے زیادہ ۱۸۰ پونڈ وزن ایک مائل سطح پر سہار سکتی ہے۔ سطح کا میلان افق سے ۳۰° ہے معلوم کرو کہ رسی کا زیادہ سے زیادہ تناؤ قریباً کتنا ہوگا؟

(۴) ایک جسم ایک سطح پر دھرا ہے جس کا میلان افق سے ۶۰° ہے۔ اور ایک قوت جو بقدر ۳۰° افق سے مائل ہے اس جسم کو

سہار سے ہوئے ہے۔ تو ثابت کرو کہ قوت اور سطح کا عمل دونوں میں سے ہر ایک جسم کے وزن کے مساوی ہے۔

(۵) ایک جسم وزنی ۲ ط ایک مائل سطح پر ساکن ہے اس پر ایک قوت ط افق کے متوازی اور دوسری قوت ط سطح کے متوازی عمل کرتی ہے۔ سطح کے ارتفاع اور قاعدہ کی نسبت اور سطح کا عمل دریافت کرو۔

(۶) ایک جسم ایک سطح پر ایک قوت کے زیر عمل ساکن ہے ۔سطح کا میلان اُفق سے ۳۰° ہے اور قوت کا میلان سطح سے ۳۰° ہے تو جسم کے وزن اور قوت کی نسبت معلوم کرو۔

(۷) ایک وزن کو ایک مائل سطح پر ایک قوت سہار ے ہوئے ہے قوت سطح سے مائل ہے۔ اگر وزن، قوت اور عمل کی نسبتیں وہی ہوں جو اعداد ۴، ۳، ۲ کی ہیں۔ تو سطح کا میلان اور قوت کی سمت دریافت کرو۔

(۸) ایک پانچ پونڈ وزنی جسم ایک چکنی سطح پر رکھا ہے ۔جس کا میلان اُفق سے ۳۰° ہے۔ اور جسم پر دو قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ایک قوت ۲ پونڈ وزنی سطح کے متوازی اوپر کی طرف اور دوسری قوت ط سطح سے ۳۰° کے زاویہ پر عمل کرتی ہے تو ط اور سطح کا عمل دریافت کرو۔

(۹) وہ قوت دریافت کرو جو ایک سطح مائل کے اُوپر کی طرف عمل کر کے ایک ۱۰ پونڈ وزنی جسم کو سطح پر ساکن رکھے ۔ یہ معلوم ہے کہ قوت اور سطح کا عمل اور جسم کا وزن سلسلہ حسابیہ

میں ہیں۔

(۱۰) اگر ایک قوت ط ایک سطح مائل کے متوازی عمل کر کے ایک جسم وزنی و کو سہارے۔ اور سطح پر دباؤ بقدر ب پڑے تو ثابت کرو کہ اگر وہی قوت افق کے متوازی عمل کر کے ایک جسم وزنی ب کو سہارے تو سطح پر دباؤ بقدر و پڑے گا۔

(۱۱) دو تختے جن کا طول ۱۱ فٹ اور ۸ فٹ ہے۔ ایک افقی سطح پر اس طرح رکھے ہوئے ہیں کہ اُن کے نچلے سرے سطح پر ہیں اور اوپر کے سرے ایک دوسرے سے ملا دیئے گئے ہیں۔ ان تختوں پر بالترتیب و اور ۱۲ پونڈ وزن رکھ دیئے گئے ہیں۔ اور وزنوں کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جو تختوں کے راس مشترک پر سے گزرتی ہے۔ تو و کی قیمت دریافت کرو۔

(۱۲) ایک سڑک کے ایک حصہ کا میلان اُفق سے ع ہے اور دوسرے حصہ کا میلان ب ہے۔ چند گاڑیاں جن میں سے ہر ایک میں ایک ٹن بوجھ ہے۔ سڑک کے پہلے حصہ پر کھڑی ہیں۔ اور وہ ایک زنجیر کے ذریعے اتنی ہی خالی گاڑیوں کو سڑک کے دوسرے حصہ پر سہارے ہوئے ہیں۔ تو خالی گاڑی کا بوجھ دریافت کرو۔

(۱۳) ایک جسم ایک سطح پر جس کا میلان اُفق سے ع ہے ساکن ہے۔ اگر سطح کا عمل زور کے برابر ہو۔ تو ثابت کرو کہ زور کا میلان سطح سے ۹۰° - ۲ ع ہے۔

(۱۴) ایک وزنی رسی کا ایک حصہ ایک سطح مائل پر ہے اور

دوسرا حصہ ایک چرخی پر سے گزر کر عموداً لٹک رہا ہے۔ چرخی سطح کی چوٹی پر ہے۔ تو معلوم کرو کہ چرخی پر رسی کا کونسا نقطہ ہو کہ توازن قائم رہے؟

(۱۵) دو مائل سطحوں کا راس مشترک ہے۔ دو وزنوں سے رسی باندھ کر ایک کو ایک سطح پر اور دوسرے کو دوسری سطح پر رکھدیا گیا ہے۔ رسی راس مشترک پر سے گزرتی ہے۔ ایک سطح کا طول اُس کے ارتفاع سے دو چند ہے اور دوسری سطح کا طول اُس کے قاعدہ سے ۲ چند ہے۔ تو ثابت کرو کہ ایک سطح کا عمل دوسری سطح کے عمل سے ۳ چند ہے۔

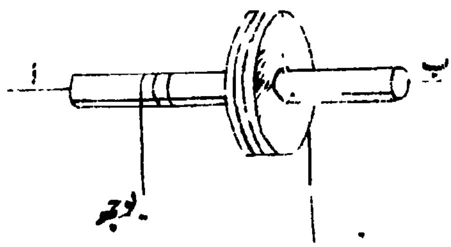
(۱۶) ایک جسم وزنی ۵۰ پونڈ ایک چکنی سطح پر متوازن ہے۔ سطح کا میلان اُفق سے ۳۰° ۲۰َ ہے۔ جسم پر ایک قوت سطح کے اُوپر کی جانب عمل کرتی ہے۔ بذریعۂ عمل ترسیمی یا جداول مثلثی قوت اور عمل سطح معلوم کرو۔

(۱۷) ایک جسم وزنی ۲۰ پونڈ ایک چکنی سطح پر ساکن ہے سطح کا میلان اُفق سے ۴۵° ہے اور جسم پر ایک قوت ط سطح سے ۳۵° کے زاویہ پر عمل کرتی ہے۔ بذریعہ عمل ترسیمی یا جداول مثلثی ط اور سطح کا عمل دریافت کرو۔

(۱۸) ایک جسم وزنی ۳۰ پونڈ ایک چکنی سطح پر ساکن ہے۔ سطح کا میلان اُفق سے ۲۸° ۱۵َ ہے اور جسم پر ایک افقی قوت ط عمل کرتی ہے بذریعۂ عمل ترسیمی یا جداول مثلثی ط اور عمل سطح معلوم کرو۔

چہارم چرخ و محور

(۱۵۹) اس مشین میں ایک مضبوط مستدیر اسطوانہ ہوتا ہے جس کو محور کہتے ہیں اس محور کے دونوں سرے ا اور ب تپلے ہوتے ہیں۔ اور ان کو دو سہاروں پر اس طرح ٹکا دیا جاتا ہے کہ محور بلا تکلف گھوم سکے۔ محور پر ایک چرخ ہوتا ہے اور محور اور چرخ دونوں کے جوڑ کو مستحکم کردیا جاتا ہے۔ چرخ کی سطح محور پر عمود ہوتی ہے۔



محور کے گرد رسی لپٹی ہوئی ہوتی ہے۔جس کا ایک سرا محور کے ساتھ مضبوطی سے باندھ دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے سے بوجھ لٹکتا ہے۔چرخ کے محیط کے گرد بھی رسی لپٹی جاتی ہے۔لیکن اس کا رُخ پہلی رسی کے رُخ سے مخالف ہوتا ہے۔

چرخ کی رسی کا ایک سرا چرخ سے باندھ دیا جاتا ہے۔ اور دوسرے سرے پر زور لگایا جاتا ہے۔چرخ کے محیط پر ایک نالی سی بنی ہوتی ہے۔تاکہ رسی اس پر سے نہ پھسلے۔

(۱۶۰) چرخ و محور میں زور اور بوجھ کا باہمی تعلق معلوم کرو۔

دفعہ ۹۲ میں ہم ثابت کر چکے ہیں۔ کہ جو جسم ایک ثابت محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ وہ اس وقت توازن میں ہوگا جبکہ محور کے گرد اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جبریہ صفر ہو۔ صورت ہذا میں مشین پر عمل کرنے والی قوتیں صرف زور اور بوجھ ہیں۔ جو مشین کو متقابل سمتوں میں گھمانے کی قابلیت رکھتی ہیں۔ پس اگر محور کا نصف قطر م ہو اور چرخ کا نصف قطر چ ہو۔ تو توازن کی شرط یہ ہوگی۔

$$\text{زور} \times \text{چ} = \text{بوجھ} \times \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

$$\text{اس لئے مشینی مفاد} = \frac{\text{بوجھ}}{\text{زور}} = \frac{\text{چ}}{\text{م}} = \frac{\text{نصف قطر چرخ}}{\text{نصف قطر محور}}$$

کام کے اُصول کی تصدیق۔ فرض کرو کہ مشین جار تماموں میں گھومتی ہے۔ تو چرخ پر سے رسی کا ایک حصہ بقدر ۲ π چ اُتر جاتا ہے۔ اس لئے زور یہ فاصلہ نیچے کو طے کرتا ہے۔ اور ساتھ ہی محور پر رسی کا ایک حصہ بقدر ۲ π م کے لپٹ جاتا ہے اور بوجھ یہی فاصلہ اوپر کو طے کرتا ہے۔ زور کا کام مساوی ہے زور × ۲ π چ کے اور بوجھ کے مقابل جو کام ہوا وہ مساوی ہے۔ بوجھ × ۲ π م کے۔ اور بموجب مساوات (۱) یہ دونوں برابر ہیں نیز رفتاری نسبت (دفعہ ۱۴۷)

$$= \frac{۲\pi\,\text{چ}}{۲\pi\,\text{م}} = \frac{\text{چ}}{\text{م}} = \text{مشینی مفاد}$$

(۱۶۱) مقدار $\frac{\text{چ}}{\text{م}}$ کو بہت بڑا بنانے سے ہم نظرًا مشینی مفاد کو جتنا

چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔لیکن عملاً ہم ایک حد سے نہیں بڑھ سکتے۔اسکی وجہ یہ ہے کہ سہاروں کا جو دباؤ محور پر ہے وہ زور اور بوجھ دونو کو توازن میں رکھتا ہے۔اس لئے ہم محور کی موٹائی یعنی ۲ م کو ایک خاص حد سے کم نہیں کر سکتے۔ورنہ محور کے ٹوٹنے کا اندیشہ ہے اور نہ ہم چرخ ہی کے نصف قطر کو عملاً بہت بڑا بنا سکتے ہیں کیونکہ اس حالت میں مشین کا چلانا مشکل ہوگا۔پس مشینی مفاد کی جو قیمتیں ممکن ہیں وہ ایک طرف تو اشیاء کی مضبوطی پر منحصر ہونیکی وجہ سے محدود ہیں اور دوسری طرف اس لئے محدود ہیں کہ مشین کے ناپ کو مناسب حدود کے اندر رکھنا لازمی ہے۔

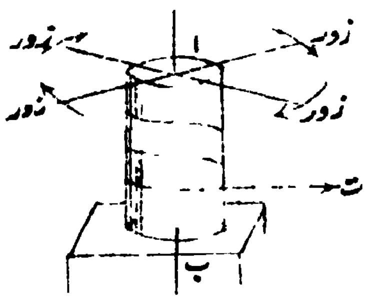
(۱۶۲) دفعہ ۱۰۰ میں ہم نے رسیوں کی موٹائی کو نظر انداز کر دیا ہے اگر ان کی موٹائی اس قدر ہو کہ چرخ اور محور کے نصف قطروں کے مقابلے میں نظر انداز نہ ہو سکے۔تو ہم موٹائی کو اس طرح محسوب کر سکتے ہیں کہ رسیوں کے "تناؤ" کو اُن کے عین وسط میں بیچوں بیچ عمل کرتا ہوا فرض کریں۔

فرض کرو کہ محور اور چرخ کے گرد گزرنے والی رسیوں کے نصف قطر بالترتیب لا اور ما ہیں تو اب محور کے وسطی خط سے رسیوں کے تناؤ کے خطوط عمل کے فاصلے (م + لا) اور (چ + ما) ہونگے اس لئے شرط توازن یہ ہوگی۔

$$\text{زور} \times (\text{چ} + \text{ما}) = \text{بوجھ} \times (\text{م} + \text{ما})$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{زور}}{\text{بوجھ}} = \frac{\text{محور اور اس کی رسی دونوں کے نصف قطروں کا مجموعہ}}{\text{چرخ اور اس کی رسی دونوں کے نصف قطروں کا مجموعہ}}$$

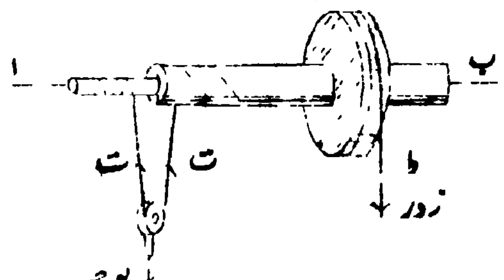
۱۶۳) کنوئیں سے پانی نکالنے کا چرخ اور جہاز کا چرخ چرخ و محور
ں دوسری شکلیں ہیں۔ جیساکہ دفعہ ۱۵۹ میں بیان ہوا۔ ان مشینوں
ں زور ایک چرخ پر سے گذرنے والی رسی کے ذریعہ نہیں لگایا
جاتا۔ بلکہ محور کی عمودی سطح میں کچھ آرسے لگے ہوتے ہیں۔ ان کے
سروں پر زور لگایا جاتا ہے۔ کنوئیں کے چرخ میں محور افقی ہوتا
ہے۔ اور جہاز کے چرخ میں عمودی ہوتا ہے۔



ہاز کے چرخ کی صورت میں مزاحمت یا بوجھ اس رسی کا تناؤ
ت ہوتا ہے۔ جو محور کے گرد لپٹی ہوتی ہے اور محور کے مقام ا
۔ چاروں طرف سوراخ ہوتے ہیں ان سوراخوں میں ڈنڈے پھنسا
دیتے ہیں اور ان ڈنڈوں کے سروں پر زور لگایا جاتا ہے
زوروں کے جوڑا جوڑا ہونے کا یہ فائدہ ہے کہ چرخ کے
جزار پر بہت کم زور پڑتا ہے۔ یا بالکل نہیں پڑتا۔
طریق دفعہ ۱۶۰ شرط توازن معلوم ہوسکتی ہے

۱۶۴) **تفریقی چرخ و محور** معمولی چرخ و محور سے
تفریقی چرخ و محور ذرا مختلف ہے۔ اس مشین کے محور میں
و اسطوانے ہوتے ہیں جن کا خط وسطی ایک ہی ہوتا ہے

اور اُن کے سرے جڑے ہوئے ہوتے ہیں اور ان کے نصف قطروں میں فرق ہوتا ہے۔ رسی کا ایک سرا ایک اسطوانہ پر لپٹا ہوا ہوتا ہے اور دوسرا سرا دوسرے اسطوانہ پر اُلٹے رُخ لپٹا ہوتا ہے۔ رسی کے ڈھیلے حصہ پر ایک چرخی چڑھی ہوتی ہے۔ چرخی سے بوجھ باندھ دیا جاتا ہے۔ چھوٹے اسطوانہ پر جو رسی لپٹی ہوتی ہے اس کا رُخ وہی ہوتا ہے جو چرخ پر کی رسی کا ہوتا ہے۔ اس لئے یہ دونوں رسیاں مشین کو ایک ہی طرف گھمانے کی قابلیت رکھتی ہیں۔



پہلے کی طرح فرض کرو کہ چرخ کا نصف قطر چ ہے اور محور کے موٹے حصہ کا نصف قطر م ہے اور پتلے حصہ کا مَ ہے چونکہ چرخی چکنی ہے۔ اس لئے اس کے گرد گزرنے والی رسی کا تناؤ ت اس کے تمام طول میں یکساں ہوگا اس لئے بوجھ کے توازن سے ہم کو یہ معلوم ہوا کہ تناؤ ت = $\frac{1}{2}$ (بوجھ)

مشین کے توازن کے لئے خط اب کے گرد معیار لینے سے۔

$$\text{ط} \times \text{چ} + \text{ت} \times \text{مَ} = \text{ت} \times \text{م}$$ جہاں ط زور ہے

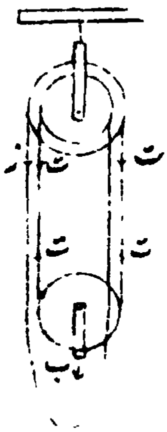
$$\therefore \text{ط} = \text{ت} \times \frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{چ}}$$

$$= \frac{\text{و}}{2} \times \frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{چ}}$$ جہاں و بوجھ ہے

اس لئے مشینی مفاد $\frac{\text{و}}{\text{ط}} = \frac{2\text{چ}}{\text{م} - \text{مَ}}$

محور کے دو حصوں کے نصف قطر م اور مَ قریبًا مساوی کرنے سے ہم مشینی مفاد کو بہت بڑا بنا سکتے ہیں۔ اور ایسا کرنے سے مشین بھی چنداں کمزور نہیں ہوتی۔

(۱۶۵) **ویسٹن کی تفریقی چرخی۔** اس مشین میں چرخیوں کے دو سہارے ہیں۔ اوپر کے سہارے میں دو چرخیاں ہوتی ہیں جن کے نصف قطر قریبًا مساوی ہوتے ہیں اور جو بطور ایک چرخی کے گھومتی ہیں۔ نیچے کے سہارے میں صرف ایک چرخی ہوتی ہے۔ جس سے بوجھ بندھا ہوتا ہے۔



شکل میں مشین کی تراش دی گئی ہے رسی کا ایک حلقہ پہلے اوپر والی بڑی چرخی پر سے گزارتے ہیں۔ پھر نیچے کی چرخی کے گرد پھر اوپر کی چھوٹی چرخی پر سے گزار کر ڈھیلے حصہ کو لٹکنے دیتے ہیں۔ زور ز اس طرح لگایا جاتا ہے۔ جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔ چرخیوں پر نالی ہوتی ہے اس لئے رسی ان پر سے نہیں پھسل سکتی۔

اگر اس رسی کا تناؤ جو بوجھ کو سہارتی ہے ت ہو۔ تو چونکہ رسی کے دونوں حصے قریبًا عمودی ہیں اس لئے

۲ت = ب ...... (۱)

اگر اوپر والی چھوٹی اور بڑی چرخیوں کے نصف قطر ر اور رَ ہوں تو اوپر کے سہارے کے مرکز ا کے گرد معیار لینے سے

ز × ر + ت × رَ = ت × ر

$$\therefore\ \text{ز} = \text{ت} \times \frac{\text{ر} - \text{رَ}}{\text{ر}} = \frac{\text{پ}}{۲} \times \frac{\text{ر} - \text{رَ}}{\text{ر}}$$

اس لئے اس نظام کا مشینی مفاد $= \frac{\text{پ}}{\text{ز}} = \frac{۲\text{ر}}{\text{ر} - \text{رَ}}$

چونکہ ر اور رَ قریبًا برابر ہیں اس لئے یہ مشینی مفاد بہت ہوگا۔ تفریقی چرخ و محور میں ایک بڑا نقص ہے جو تفریقی چرخی میں نہیں ہے تفریقی چرخ و محور میں بوجھ کو تھوڑا سا بھی اُٹھا سکنے کے لئے بہت لمبی رسی درکار ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری (۲۷)

(۱) اگر چرخ اور محور کے نصف قطر بالترتیب ۲ فٹ اور ۳ انچ ہوں تو معلوم کرو کہ ۵۶ پونڈ وزن اُٹھانے کے لیے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۲) اگر چرخ اور محور کے نصف قطر بالترتیب ۳۰ انچ اور ۵ انچ ہوں تو ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی زور کس قدر بوجھ کو سہارے گا۔ اور محور کے سہاروں پر کا دباؤ بھی معلوم کرو۔ اگر رسیوں کی موٹائی ایک انچ ہو تو کس قدر بوجھ سہارا جا سکے گا؟

(۳) گر ایک چرخ و محور کے ذریعہ ایک ۳ پونڈ وزنی زور ۳۰ پونڈ وزنی بوجھ کو سہار سکے۔ اور اگر محور کا نصف قطر ۲ انچ ہو تو چرخ کا نصف قطر دریافت کرو۔

(۴) ایک جہاز کے چرخ کا محور قطر میں ۱۶ انچ ہے اور ۸ ڈنڈے ہیں تو مرکز کے کس قدر فاصلہ پر آٹھ آدمی زور

لگائیں کہ ایک ٹن کا بوجھ اُن سے اُٹھ سکے۔ ہرایک آدمی ایک ڈنڈے پر ۲۶ پونڈ وزن کی قوت لگاتا ہے۔

(۵) چار ملاح چرخ کے ذریعے لنگر اُٹھاتے ہیں۔ اس کے محور کا نصف قطر ۴ انچ ہے۔ اور ڈنڈوں کا طول محور سے ۶ فٹ ہے۔ اگر ہرایک آدمی ۱۱۲ پونڈ وزن کے مساوی قوت لگائے۔ تو لنگر کا وزن دریافت کرو۔

(۶) چار چرخ و محور جن میں سے ہرایک میں نصف قطروں کی نسبت ۵ : ۱ ہے۔ اس طرح ترتیب دیئے گئے ہیں کہ ایک محور کا محیط دوسرے چرخ کے ساتھ لگا دیا گیا ہے تو ۵۰۰ پونڈ وزن اُٹھانے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۷) ایک چرخ اور محور کے نصف قطر بالترتیب ۲ فٹ اور ۲ انچ ہیں۔ اور اُن کی رسیوں کے سرے ایک یکساں ۲ فٹ ۲ انچ لمبی سلاخ وزنی ۱۰ پونڈ سے باندھ دیئے گئے ہیں۔ تو دریافت کرو کہ سلاخ کو اُفقی حالت میں رکھنے کے لئے ایک رسی سے اور کتنا وزن باندھنا چاہئے؟

(۸) ایک چرخی جس سے ایک سٹینڈرڈ ویٹ وزن آویزاں ہے ایک چرخ و محور سے ایک رسی کے عمودی حلقے کے ذریعہ لٹکائی گئی ہے۔ رسی کا ایک سرا محور کے گرد لپٹا ہوا ہے اور دوسرا اُلٹے رُخ چرخ کے گرد لپٹا ہوا ہے۔ اگر چرخ اور محور کے نصف قطر بالترتیب ۱ فٹ اور ۲ انچ ہوں۔ تو معلوم کرو کہ ۲ فٹ لمبے بازو کے سرے پر کس قدر زور محور

کو گھمانے کے لئے عمل کرے کہ وزن متوازن رہے؟

(۹) تفریقی چرخ و محور میں اگر چرخ کا نصف قطر ۱ فٹ ہو۔ اور محور کے دونوں حصوں کے نصف قطر ۵ انچ اور ۴ انچ ہوں تو ۵۶ پونڈ بوجھ کو سہارنے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۱۰) تفریقی چرخ و محور میں اگر چرخ کا نصف قطر ۱۸ انچ ہو اور محور کے دونوں حصوں کے نصف قطر ۶ انچ اور ۴ انچ ہوں تو ۲۰ پونڈ وزن کا زور کس قدر بوجھ کو سہارے گا؟

(۱۱) ایک چرخ و محور میں چرخ کا نصف قطر ۱ فٹ ہے اور محور کا ایک انچ ہے اگر دو وزن ہر ایک ۱۰ پونڈ چرخ کے کنارے کے دو نقاط پر باندھ دئے جائیں اس طرح کہ دونوں نقاط کے خط وصل کے محاذی چرخ کے مرکز پر ۱۲۰° کا زاویہ بنے تو معلوم کرو۔ کہ اگر محور سے حسب معمول رسی لٹک رہی ہو۔ تو وہ بڑے سے بڑا کتنا بوجھ سہارے گی؟

(۱۲) ایک چرخ و محور میں اگر چرخ کا نصف قطر محور کے نصف قطر سے ۶ گنا ہو۔ اور اگر ایک ۵ پونڈ وزن کے زور کے ذریعے ایک بوجھ ۵۰ فٹ اٹھایا جائے تو معلوم کرو کہ کام کتنا ہوگا؟

(۱۳) ایک جہاز کا چرخ جس کا قطر ۲۰ انچ ہے۔ ایک بیرم کے ذریعہ چلایا جاتا ہے۔ جس کی لمبائی چرخ کے مرکز سے ۵ فٹ ہے۔ اگر اس چرخ کی امداد سے ایک جسم وزنی ایک ٹن

جو ایک سطح مائل پر پڑا ہے۔ رسی کے ذریعہ ۲۰ فٹ اسی سطح پر کھینچا جائے تو کام کی مقدار معلوم کرو۔ سطح کا میلان افق سے جیب ا ۴/۵ ہے۔ اور یہ بھی دریافت کرو کہ بیرم پر کتنا زور لگے گا۔ اور زور کا نقطۂ عمل کتنا فاصلہ طے کریگا؟

(۱۶۴) تفریقی چرخ و محور اور ویسٹن کی تفریقی چرخی میں کام کے اصول کی تصدیق کرو۔ اور ہر حالت میں رفتار کی نسبت دریافت کرو۔

پنجم۔ ترازو

(۱۶۶) ترازو میں ایک استوار ڈنڈی اب ہوتی ہے (دیکھو شکل دفعہ ۱۶۷) اس ڈنڈی کے سروں پر دو پلڑے لٹکتے ہیں۔ اور یہ ڈنڈی ایک نضاب و کے گرد بلا تکلف گھوم سکتی ہے۔ یہ نضاب ڈنڈی سے باہر ہوتا ہے لیکن نضاب اور ڈنڈی کا جوڑ استوار ہوتا ہے۔ اگر ترازو اچھی بنی ہوئی ہو۔ تو نقطہ و پر ایک فولادی فانہ ہوتا ہے جس کا تیز کنارہ نیچے کی طرف ہوتا ہے۔ اور یہ فانہ ایک چھوٹی ڈیشب کی تختی پر دھرا ہوتا ہے۔

جس جسم کو تولنا منظور ہوتا ہے۔ اسے ایک پلڑے میں رکھدیا جاتا ہے اور دوسرے پلڑے میں ایسے وزن رکھے جاتے ہیں جن کی مقدار معلوم ہو۔ ان دونوں کو اس وقت تک کم زیادہ اور ادل بدل کرتے ہیں جب تک

ترازو کی ڈنڈی اُفقی حالت میں ساکن نہ ہو جائے۔ اگر د ہ ڈنڈی پر عمود ہو۔ اور دونوں بازوؤں ہ ا اور ہ ب کا طول مساوی ہو۔ اور اگر ترازو کا مرکزِ ثقل خط د ہ پر ہو۔ تو جسم کا وزن دوسرے پلڑے کے اوزان کے مجموعے کے برابر ہوگا۔

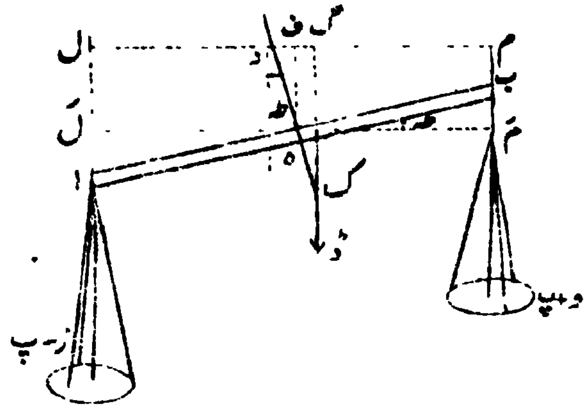
اگر جسم کا وزن دوسرے پلڑے کے اوزان کے مجموعے کے برابر نہ ہو۔ تو ترازو کی ڈنڈی اُفقی نہ ہوگی۔ بلکہ افق سے مائل ہوگی۔

بہترین ترازوؤں میں ایک لمبی سوئی ڈنڈی کے ساتھ ہ پر جڑی ہوتی ہے۔ اس سوئی کا سرا ایک درجہ دار پیمانہ پر چلتا ہے۔ اور جب ڈنڈی اُفقی ہوتی ہے۔ تو سوئی عمودی ہوتی ہے۔ اور اس کا سرا پیمانہ کے درجۂ صفر پر ہوتا ہے۔

(۱۶۷) اگر ترازو کے پلڑوں میں وزن مساوی نہ ہوں۔ تو اس کا مقام توازن دریافت کرو۔

فرض کرو کہ پلڑوں میں اوزان ز اور و ہیں اور ز بڑا ہے۔ فرض کرو کہ ہر ایک پلڑے کا وزن پ ہے۔ اور ڈنڈی اور اس کے استوار جوڑ کا وزن ڈ نقطہ ک پر عمل کرتا ہے۔ جہاں ک خط د ہ پر ہے۔

(شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو)



[شکل کے اجزا متناسب نہیں بنائے گئے ہیں۔ اس واسطے کہ مختلف نقاط پر نشان دیئے جاسکیں فی الواقع ک ڈنڈی کے بہت قریب ہوتا ہے]

فرض کرو کہ ڈنڈی کا میلان افق سے ط ہے تو د ہ کا میلان سمت عمودی سے ط ہوگا۔

فرض کرو کہ د ہ اور د ک کا طول بالترتیب ح اور ق ہے اور ا ہ یا ہ ب کا طول ی ہے۔

فرض کرو کہ د اور ہ میں سے گزرنے والے افقی خطوط ا اور ب میں سے گزرنے والے عمودی خطوط کو بالترتیب ل، م، لَ، مَ پر ملتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ہ اور ک میں سے گزرنے والے عمودی خطوط لَ مَ کو ف اور گ پر ملتے ہیں۔ جب یہ نظام توازن میں ہوگا۔ تو د کے گرد قوتوں کے معیار متوازن ہوں گے۔

∴ (ز + پ) × د ل = (و + پ) × د م + ڈ × د گ

یعنی (ز + پ) (ف ل - ف د) = (و + پ) (ف م + د ف + ڈ × د گ)

∴ (ز + پ) د ی جم ط = ح جب ط)

= (د + پ) (ی جم ط + ح جب ط) + ڈ × ق جب ط

کیونکہ د ف = د ہ جم ف د ہ = ح جب ط

د گ = د ک جب ط اور ف ل = ہ لَ = ی جم ط

∴ ی جم ط × (ز − و) = جب ط [ڈق + (ز + و + ۲پ) ح]

∴ مس ط = (ز − و) ی ÷ [ڈق + (ز + و + ۲پ) ح]

(۱۶۸) عمدہ ترازو کی لازمی شرائط

(۱) ترازو صحیح ہونی چاہیے

یہ اُس صورت میں ہوگا جب ترازو کے بازو مساوی ہوں اور پلڑوں کے وزن برابر ہوں۔ اور ڈنڈی کا مرکزِ ثقل اس خط میں واقع ہو جو نصاب سے ڈنڈی پر عمود ہو۔ کیونکہ اگر ایسا ہوگا تو پلڑوں میں مساوی وزن رکھنے سے ڈنڈی اُفقی رہیگی۔ اگر ترازو کی صحت کو جانچنا مقصود ہو۔ تو پہلے یہ دیکھو کہ پلڑے خالی ہونے کی صورت میں ڈنڈی متوازی الافق ہے یا نہیں اگر ہے تو ایک پلڑے میں ایک جسم رکھو اور دوسرے میں اتنے وزن رکھو کہ ڈنڈی پھر متوازی الافق ہو جائے۔ اب جسم کا اور وزنوں کا باہم مبادلہ کرو۔ اگر ایسا کرنے سے بھی ڈنڈی متوازی الافق ہو۔ تو ترازو صحیح ہوگی۔ لیکن اگر مبادلہ کے بعد ڈنڈی اُفق سے مائل ہو۔ تو ترازو صحیح نہ ہوگی۔

(۲) ترازو کو حسّاس ہونا چاہیئے۔ یعنی پلڑوں میں جو وزن رکھے جائیں اُن میں خواہ کتنا ہی تھوڑا فرق ہو۔ ڈنڈی کو افق سے ایسا زاویہ بنانا چاہیئے جو محسوب ہو سکے۔

دونوں پلڑوں میں ایک خاص فرق ہونے کی صورت میں ڈنڈی کا میلان افق سے جس قدر زیادہ ہوگا۔ ترازو اُسی قدر زیادہ حسّاس ہوگی۔ نیز اگر ڈنڈی کو ایک خاص میلان طہ دینا مطلوب ہو۔ تو اس میلان کو پیدا کرنے کے لئے وزنوں میں جس قدر کم فرق ہوگا۔ ترازو اسی قدر زیادہ حسّاس ہوگی۔

پس جب (ز - و) دیا ہوا ہو تو جیسا طہ بڑھے گا یعنی مس طہ بڑھے گا۔ ایسا ہی ترازو کا احساس زیادہ ہوگا۔

اور جب طہ معلوم ہو۔ تو ترازو کا احساس اس طرح بدلتا ہے جس طرح کہ $\frac{1}{\text{ز} - \text{و}}$

تو احساس کا مناسب اندازہ $\frac{\text{مس طہ}}{\text{ز} - \text{و}}$ ہے

یعنی بموجب دفعہ ۲۷۱ احساس کا اندازہ $\frac{\text{ی}}{\text{ڈ ق} + (\text{ز} + \text{و} + ۲\,\text{پ})\,\text{ح}}$ ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ احساس اس وقت زیادہ ہوگا جب ڈنڈی کے بازو کی لمبائی ی بمقابلہ فاصلوں ح اور ق کے زیادہ ہو۔ اور ڈنڈی کا وزن ڈ اس قدر کم ہو جس قدر کہ مشین کا طول اور استواری اجازت دیں۔

نیز اگر ح صفر نہ ہو۔ تو یہ ظاہر ہے کہ احساس کا انحصار ز اور و یعنی جو وزن پلڑوں میں رکھے جائیں اُن پر ہے۔

جو ترازو کہ کیمیا کے کارخانہ میں استعمال ہو۔ اس کے لئے یہ نا مناسب ہے اس وجہ سے یہ ترازو ایسے بنائے جاتے ہیں کہ ان میں ح صفر ہو۔ یعنی اُن میں نقطہ د نقطہ ہ پر منطبق ہو تب احساس اس طرح بدلے گا جس طرح $\frac{1}{ق}$ جہاں ق ڈنڈی کے مرکز ثقل کا فاصلہ د یا ہ کے نیچے ہے۔

لیکن ح اور ق دونوں صفر نہیں ہونے چاہئیں کیونکہ اس حالت میں د اور ک دونوں ہ پر منطبق ہوں گے۔ اس صورت میں یہ ہوگا۔ کہ جب پلڑوں کے وزن برابر ہوں گے۔ تو ترازو حسب دفعہ ۱۴۴ ہر مقام پر متوازن ہوگی۔ اور اگر پلڑوں میں کے وزن برابر نہ ہوں۔ تو ترازو کی ڈنڈی گھوم کر سمت عمودی کے اس قدر قریب ہو جائے گی جس قدر کہ مشین کے اجزاء اجازت دیں۔

(۳) **ترازو کو قائم ہونا چاہیئے۔ اور محل توازن پر جلدی آجانا چاہیئے۔** مشین کو محل توازن پر آنے کے لئے جو وقت درکار ہوگا۔ اس کو معلوم کرنا متحرکات کا مسئلہ ہے۔ لیکن ہم یہ مان سکتے ہیں۔ کہ اس شرط کے پورا ہونے کی بہترین صورت وہ ہوگی جب نصاب د کے گرد قوتوں کا معیار زیادہ سے زیادہ ہو۔ اگر ہر ایک پلڑے میں کا وزن ز ہو تو قوتوں کا معیار جو توازن کو بحال کرے یہ ہوگا۔

(ز + پ) (ی جم ط + ح جب ط) - (ز + پ) (ی جم ط - ح جب ط)
+ ڈ ق جب ط

یعنی [۲(ز+پ) ح + ڈ ق]

اس جملہ کی قیمت اعظم اس وقت ہوگی جب ح اور ق کی قیمتیں زیادہ سے زیادہ ہوں چونکہ ترازو زیادہ حسّاس اس وقت ہوتی ہے۔جب ح اور ق چھوٹے ہوں اور زیادہ قائم اس وقت ہوتی ہے۔ جب یہ مقادیر بڑی ہوں۔ تو ہم کو یہ معلوم ہوگیا کہ ترازو میں یہ دونوں باتیں اکٹھی نہیں ہوسکتیں کہ وہ حسّاس بھی ہو۔ اور اس سے تول بھی جلدی سکیں۔ لیکن یہ ایسا ضروری نہیں ہے۔کیونکہ جن ترازوؤں میں احساس کی ضرورت ہوتی ہے (مثلاً کیمیا کے کارخانے کی ترازو) ان سے جلدی تولنا ضروری نہیں ہوتا۔ بالعکس اس کے تجارتی کاروبار میں جہاں جلدی تولنے کی ضرورت پڑتی ہے وہاں احساس کو چنداں اہمیت نہیں دی جاتی۔

احساس اور جلدی تولنے کی دونوں خصوصیات ترازو میں حتیٰ الامکان پیدا کرنے کے لئے ترازو کو ایسا بنانا چاہیے کہ اس کی ڈنڈی اچھی خاصی لمبی ہو اور ڈنڈی سے نصاب کا فاصلہ بھی کچھ ایسا کم نہ ہو۔

(۱۶۹) **دوہرا تول**۔ اس طریقہ سے ایک جسم کا وزن ٹھیک معلوم ہوسکتا ہے۔ اگر ترازو صحیح نہ بھی ہو۔

جس جسم کو تولنا مقصود ہو۔ اسے ایک پلڑے میں رکھو۔ دوسرے پلڑے میں ریت یا کوئی اور شئے جو پل سکے ڈالو۔ یہانتک کہ ترازو میں توازن ہو۔ اب جسم کو نکال لو اور اسکی بجائے

اوزان معلومہ پلڑے میں رکھو۔ یہاں تک کہ ترازو میں پھر توازن ہو۔ اِس سے ظاہر ہے کہ جسم کا وزن اوزان معلومہ کے مجموعے کے برابر ہے

اگر بہت زیادہ صحت کی ضرورت ہو۔ تو بہترین ترازوؤں کی صورت میں بھی یہ طریقہ استعمال ہوتا ہے۔ یہ بورڈا کا طریقہ کہلاتا ہے۔

(۱۰۰) **مثال (۱)** ایک ترازو کے بازو طول میں مساوی ہیں لیکن ڈنڈی کا وزن ایک طرف زیادہ ہے۔ اگر ایک جسم کو دونو پلڑوں میں باری باری ڈال کر تولا جائے۔ تو ثابت کرو اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کا اوسط حسابی ہوگا۔

فرض کرو کہ بازو کا طول ا ہے اور ڈنڈی کے مرکز ثقل کا فاصلہ نصاب سے لا ہے۔ اور فرض کرو کہ جسم کا اصلی وزن و ہے۔ اور اس کے ظاہری وزن دونوں پلڑوں میں بالترتیب $و_۱$ اور $و_۲$ ہیں۔ اگر ڈنڈی کا وزن وَ ہو۔ تو معیار لینے سے۔

$$و \times ا = وَ \times لا + و_۱ \times ا$$

$$و_۲ \times ا = وَ \times لا + و \times ا$$

عمل تفریق سے۔

$$ا \ (و - و_۲) = ا \ (و_۱ - و) \ ا$$

$$\therefore و = \tfrac{۱}{۲}(و_۱ + و_۲) = \text{ظاہری وزنوں کا اوسط حسابی}$$

مثال (۲) ایک ترازو کے بازوؤں کا طول نامساوی ہے لیکن جب پلڑوں میں کچھ نہ ہو تو ڈنڈی افقی سمت میں

رہتی ہے تو ثابت کرو کہ اگر ایک جسم کو باری باری دونوں پلڑوں میں رکھ کر تولا جائے۔ تو اس کا اصلی وزن اُس کے ظاہری وزنوں کا اوسط ہندسی ہوگا (گاؤس کا طریقہ)

ثابت کرو کہ اگر ایک دوکاندار کسی چیز کو باری باری دونوں پلڑوں میں ایک ہی باٹ سے تول کر بیچے تو اُسے نقصان ہوگا۔

چونکہ جب پلڑوں میں کچھ نہ ہو ڈنڈی افقی سمت میں رہتی ہے اس لئے ڈنڈی اور پلڑوں کا مرکز ثقل قضاب کے عین نیچے واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ڈنڈی کے دونوں حصوں کے طول ا اور ب ہیں۔ اور فرض کرو کہ ایک جسم جس کا اصلی وزن و ہے۔ دونوں پلڑوں میں رکھ کر تولا جاتا ہے۔ اور اس کے وزن و_1 اور و_2 معلوم ہوتے ہیں۔

پس $\text{و} \times \text{ا} = \text{و}_1 \times \text{ب}$ .... (۱)

$\text{و}_2 \times \text{ا} = \text{و} \times \text{ب}$ .... (۲)

ان مساواتوں پر عمل ضرب کرنے سے

$$\text{و}^2 \times \text{اب} = \text{و}_1 \text{و}_2 \times \text{اب}$$

$$\therefore \text{و} = \sqrt{\text{و}_1 \text{و}_2}$$

یعنی اصلی وزن ظاہری وزنوں کا اوسط ہندسی ہے۔

دیگر اگر دوکاندار باری باری دونوں پلڑوں میں ایک ہی باٹ رکھ کر کوئی چیز تول کر فروخت کرے۔ تو وہ فی الحقیقت خریدار کو $(\text{و}_1 + \text{و}_2)$ وزن اس چیز کا دیگا۔

اب $و_1 + و_2 - 2و = و\frac{ا}{ب} + و\frac{ب}{ا} - 2و$

$$= و\,\frac{ا^2 + ب^2 - 2\,اب}{اب}$$

$$= و\,\frac{(ا - ب)^2}{اب}$$

ا اور ب کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں اس مساوات کی بائیں جانب ہمیشہ مثبت ہوگی یعنی $و_1 + و_2$ ہمیشہ ۲ و سے بڑا ہوگا۔ پس دوکاندار کو نقصان ہوگا۔

مثال عددی۔ اگر بازوؤں کے طول ۱۱ اور ۱۲ انچ ہوں۔ اور ۶۶ پونڈ وزن کا باٹ استعمال کیا جائے۔ تو فی الحقیقت $۶۶ \times \frac{۱۱}{۱۲}$ اور $۶۶ \times \frac{۱۲}{۱۱}$ پونڈ وزن شئے تولی جاتی ہے۔ یعنی $۶۰\frac{1}{2}$ اور ۷۲ پونڈ یعنی $۱۳۲\frac{1}{2}$ پونڈ وزن۔ اس لئے ظاہر ہے کہ دوکاندار کو $\frac{1}{2}$ پونڈ کا نقصان ہوتا ہے۔

مثال (۳) اگر ایک ترازو کے بازو طول اور وزن دونوں میں نامساوی ہوں۔ اور اگر ایک دوکاندار و وزن کا باٹ استعمال کرکے کسی چیز کو باری باری دونوں پلڑوں میں تول کر ظاہراً مقدار ۲ و فروخت کرے۔ تو ثابت کرو کہ اگر ڈنڈی کا مرکز ثقل بڑے بازو میں ہو۔ تو دوکاندار کو نقصان ہوگا۔

فرض کرو کہ بازوؤں کے طول ا اور ب ہیں اور فرض کرو کہ مشین کا مرکز ثقل انضاب سے لا فاصلہ پر بازو ب میں ہے اگر و باٹ سے کسی چیز کے وزن $و_1$ اور $و_2$ بالترتیب تولے

جائیں تو۔

$$\text{و} \times \text{ا} = \text{و}_1 \times \text{ب} + \text{وَ} \times \text{لا}$$

اور $$\text{و}_2 \times \text{ا} = \text{و} \times \text{ب} + \text{وَ} \times \text{لا}$$

جہاں وَ مشین کا وزن ہے۔

$$\therefore \text{و}_1 + \text{و}_2 - ۲\,\text{و} = \frac{\text{و}\times\text{ا} - \text{وَ}\times\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{و}\times\text{ب} + \text{وَ}\times\text{لا}}{\text{ا}} - ۲\,\text{و}$$

$$= \frac{\text{و}(\text{ب}-\text{ا})^۲}{\text{اب}} + \text{وَ}\,\frac{(\text{ب}-\text{ا})}{\text{اب}}\,\text{لا}$$

اگر ب > ا تو اس مساوات کی بائیں جانب مثبت ہے اور اس صورت میں $\text{و}_1 + \text{و}_2 > ۲\,\text{و}$

پس اگر مرکز ثقل بڑے بازو میں ہو تو دوکاندار کو نقصان ہوگا۔

امثلہ نمبری (۲۸)

(۱) ایک ترازو میں صرف یہ نقص ہے کہ اُس کے پلڑوں کا وزن نا مساوی ہے۔ ایک شے کو تولنے میں ایک پلڑے میں ۱۰ پونڈ وزن کا باٹ چڑھتا ہے اور دوسرے پلڑے میں ۱۲ پونڈ وزن کا باٹ۔ تو اس شے کا اصلی وزن دریافت کرو۔

(۲) ایک ترازو کے بازو $۸\frac{۳}{۴}$ انچ اور ۹ انچ ہیں۔ تلنے والا سامان اس کے لمبے بازو کی طرف ہے اگر ترازو سے سامان کا ظاہری وزن ۲۷ پونڈ معلوم ہو۔ تو سامان کا اصلی وزن

دریافت کرو۔

(۳) ایک ترازو کے ایک پلڑے میں کچھ بوجھ بندھا ہے۔ ایک جسم جس کا اصلی وزن ۱۰ اونس ہے ترازو میں تولنے سے ۲۰ اونس ہوتا ہے تو دریافت کرو کہ پلڑے سے کیا بوجھ بندھا ہے؟

(۴) ایک جسم کو ایک ترازو کے دونوں طرف باری باری تولنے سے اُس کے وزن بالترتیب ۹ پونڈ اور ۴ پونڈ ہوتے ہیں۔ تو بازوؤں کی نسبت اور جسم کا اصلی وزن دریافت کرو۔

(۵) ایک ترازو کے ایک پلڑے میں ایک جسم کا وزن ۲۴ پونڈ ہوتا ہے اور دوسرے پلڑے میں ۲۵ پونڈ۔ اس کا اصلی وزن تین درجہ اعشاریہ تک معلوم کرو۔ ترازو کے بازو نامساوی ہیں۔

(۶) سیسے کا ایک ٹکڑا اگر ترازو کے ایک پلڑے میں رکھا جائے تو دوسرے پلڑے میں ۱۰۰ گرین کے باٹ سے متوازن ہوتا ہے اگر دوسرے پلڑے میں سیسے کا ٹکڑا رکھا جائے۔ تو ۴۰ گرین کے باٹ رکھنے پڑتے ہیں۔ تو ڈنڈی کے دونوں حصوں کی نسبت معلوم کرو۔

(۷) ایک جسم کا وزن ترازو کے ایک پلڑے میں ۱۰ پونڈ ہوتا ہے اور دوسرے پلڑے میں ۱۱ پونڈ۔ اگر چھوٹا بازو ۱۲ انچ ہو تو بڑے بازو کا طول اور جسم کا اصلی وزن دریافت کرو۔

(۸) ایک ناقص ترازو کے بازوؤں میں نسبت ۱۰ : ۹ ہے۔ اگر سامان باری باری دونوں پلڑوں میں تول کر فروخت کیا جائے تو ثابت کرو کہ دوکاندار کو $\frac{۵}{۹}$ فی صد کا نقصان ہوگا

(ترازو کا وزن نظر انداز کیا جائے)

(۹) ایک ناقص ترازو کے بازو ۸ اور ۹ انچ لمبے ہیں۔ اگر دونوں پلڑوں سے علیحدہ علیحدہ چائے تول کر بحساب ۲ شلنگ فی پونڈ فروخت کی جائے۔ تو دریافت کرو کہ ہر دو صورت میں خریدنے والے نے کیا اصلی قیمت ادا کی؟

(۱۰) ایک تاجر کے باٹ تو ٹھیک ہیں لیکن اس کے ترازو کا ایک بازو دوسرے سے بقدر $\frac{1}{۲۴}$ کم ہے وہ ایک دوائی کے $۹\frac{1}{۲}$ پونڈ اپنے ترازو کے تول سے بحساب ۸ شلنگ فی پونڈ فروخت کرتا ہے۔ اور پھر دوسری دفعہ بھی $۹\frac{1}{۲}$ پونڈ اسی بھاؤ سے لیکن دوسرے پلڑے میں تول کر بیچتا ہے۔ تو اس کا نفع یا نقصان دریافت کرو۔

(۱۱) ایک ترازو کے پلڑوں میں جب مساوی وزن ہوتے ہیں تو اس کی ڈنڈی متوازی الافق نہیں ہوتی۔ لیکن یہ معلوم نہیں ہے کہ آیا بازوؤں کے طول نا مساوی ہیں یا پلڑوں کے وزنوں میں فرق ہے۔ اگر ایک پلڑے میں ۵۷۰۰۱۵ گرین وزن رکھا جائے۔ تو توازن کے لئے دوسرے پلڑے میں ۲۴۳۰۱۵ گرین وزن رکھا جاتا ہے۔ اور انہیں دونوں پلڑوں میں اگر بالترتیب ۲۹۵۰۲۵ گرین وزن اور ۹۷۸۰۲۵ گرین وزن رکھے جائیں۔ تو بھی توازن ہوتا ہے۔ تو ثابت کرو کہ بازو طول میں مساوی ہیں اور پلڑوں کے وزنوں میں ۲۸۷۰ گرین کا فرق ہے۔

(۱۲) ایک ترازو کے پلڑوں میں ط اور ق وزن متوازن ہیں

ان دونوں وزنوں کا مبادلہ کرنے سے توازن نہیں ہوتا جبتک ق پر $\frac{1}{۲۰}$ ق کا اضافہ نہ کیا جائے۔تو بازوؤں کی نسبت اور ط اور ق کی نسبت معلوم کرو۔

(۱۳) اگر ایک صحیح ترازو کے ایک پلڑے سے ایک پونڈ وزن باندھ دیا جائے۔اور اگر دونوں پلڑوں میں باری باری تولنے سے ایک جسم کا وزن ط پونڈ اور ق پونڈ اترے تو زائد وزن کی مقدار اور جسم کا اصلی وزن دریافت کرو۔

(۱۴) ایک ناقص ترازو کے بازو نا مساوی ہیں۔اور ایک پلڑا دوسرے سے زیادہ بھاری ہے۔ایک جسم جس کا اصلی وزن ط پونڈ ہے۔ایک پلڑے میں و پونڈ اترتا ہے اور دوسرے میں ق پونڈ۔تو بازوؤں کی نسبت اور پلڑوں کے وزنوں کا فرق معلوم کرو۔

(۱۵) ایک ترازو کے بازوؤں کے طول بھی برابر نہیں ہیں۔اور پلڑوں کے وزن بھی مساوی نہیں ہیں۔اس میں تولنے سے ط پونڈ ق پونڈ اترتا ہے اور ق پونڈ ر پونڈ اترتا ہے۔تو معلوم کرو کہ ر پونڈ کتنے پونڈ اترے گا؟

(۱۶) ایک لکڑی شکل میں لمبے فانے کی سی ہے۔اور اس کا عرض یکساں ہے۔اس کا ایک سرا $\frac{1}{۲}$ انچ موٹا ہے اور دوسرا $\frac{1}{۴}$ انچ موٹا ہے۔اس کو اس کے مرکز ثقل سے لٹکا کر بطور ترازو کی ڈنڈی کے استعمال کیا جاتا ہے۔تو لنے کا سامان لمبے بازو کی طرف رکھا جاتا ہے۔اگر سامان اس ترازو کے تول

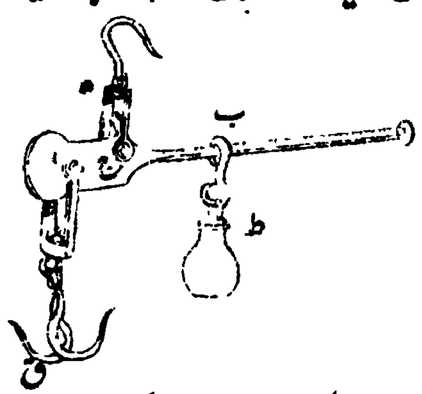
میں ۲۰ پونڈ اترے۔تو سامان کا اصلی وزن دریافت کرو۔

(۲۷) ایک ناقص ترازو کے بازو ا اور ب ہیں۔اور ب چھوٹا ہے اگر ا کی طرف وزن و رکھا جائے تو ب کی طرف وزن ط چڑھتا ہے۔اور اگر ب کی طرف و رکھا جائے تو ا کی طرف ق چڑھتا ہے۔تو ثابت کرو کہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ط-و}{و-ق}$

(۱۸) ایک آدمی ایک ترازو میں تولا جاتا ہے۔اگر وہ اپنی طرف کے بازو کے کسی نقطہ پر ایک لکڑی سے ڈنڈی کو اوپر کو دبائے تو ثابت کرو۔کہ اس کا وزن پہلے سے زیادہ معلوم ہوگا۔

ششم تیک

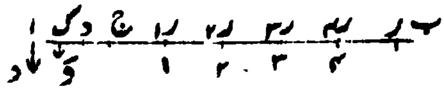
(۱۷۱) عام یا رومی تیک تولنے کی ایک مشین ہے جس میں ایک سلاخ اب ہوتی ہے۔جو نصاب ج کے گرد گھوم سکتی ہے۔



نقطہ ا پر ایک کانٹا یا پلڑا تولنے کے سامان کے واسطے ہوتا ہے۔اور بازو ج ب پر ایک وزن ط لٹکتا ہے۔جو اس کے اوپر ادھر اُدھر ہو سکتا ہے۔پلڑے میں جو جسم ہو۔اس کا وزن اس امر پر منحصر ہے۔کہ وزن ط بازو ج ب کے کس نقطہ پر رکھا جائے۔کہ ڈنڈی سمت افقی میں متوازن ہو۔بازو

ج ب پر نشان کھدے ہوئے ہوتے ہیں۔ جس نشان پر ط ہو اس سے معلوم ہو جاتا ہے کہ پلڑے میں رکھے ہوئے جسم کا کیا وزن ہے۔

(۱۷۲) **تک کی درجہ بندی۔** فرض کرو کہ تک اور پلڑے کا وزن وَ ہے۔ اور ک وہ نقطہ ہے جہاں وَ عمل کرتا ہے تک ایسا بنایا جاتا ہے۔ کہ ک چھوٹے بازو اج میں رہے۔



فرض کرو کہ جب پلڑے میں کوئی وزن نہ ہو۔ تو وَ کے ساتھ متوازن ہونے کے لئے حرکت پذیر وزن ط کو د پر رکھنا پڑتا ہے۔ تو ج کے گرد معیار لینے سے

وَ × ک ج = ط × ج د ..... (۱)

اس مساوات سے د کا مقام دریافت ہوگیا۔ اور د درجہ بندی کا صفر ہے۔

جب پلڑے میں وزن و ہو تو توازن کے لئے فرض کرو کہ وزن ط کو نقطہ ر پر رکھنا پڑتا ہے۔ معیار لینے سے

و × ج ا + وَ × ک ج = ط × ج ر ..... (۲)

مساوات (۱) و (۲) پر عمل تفریق کرنے سے۔

و × ج ا = ط × د ر ...... (۳)

اول فرض کرو کہ و = ط تب بذریعہ (۳)

ور = ج ا

اس لئے اگر و سے فاصلہ و ر (= ج ا) کے ناپیں اور نقطہ ر پر ہندسہ ا لکھدیں۔ تو اس کے یہ معنی ہوں گے کہ جب حرکت پذیر وزن یہاں ہوگا۔ تو پلڑے میں وزن ط پونڈ ہوگا۔

دوم فرض کرو کہ و = ۲ ط تب بذریعہ (۳) ور = ۲ ج ا پس و سے ایک فاصلہ ۲ ج ا ناپو اور اس کے سرے پر ہندسہ ۲ لکھو۔

سوم اگر و = ۳ ط تو بذریعہ (۳) ور = ۳ ج ا اور و سے فاصلہ ۳ ج ا ناپو اور اس کے سرے پر ہندسہ ۳ لکھو۔

پس اگر تک کی درجہ بندی کرنا منظور ہو۔ تو و سے فاصلہ ج ا، ۲ ج ا، ۳ ج ا ...... ناپو اور اُن کے سروں پر ہندسہ ۱، ۲، ۳ ..... لکھو۔ وزن ط کی کسور ظاہر کرنے کے واسطے درجوں کے درمیانی فاصلوں کی مزید تقسیم کی جا سکتی ہے۔ اگر حرکت پذیر وزن ایک پونڈ ہو۔ تو درجوں سے پونڈ ظاہر ہوں گے۔

نتیجہ صریح۔ چونکہ یکے بعد دیگرے درجوں کے درمیانی فاصلے برابر ہیں اس سے ظاہر ہے کہ پلڑے میں جو وزن ہے۔ اگر اس میں برابر برابر اضافے کئے جائیں۔ تو نصاب سے جو درجوں کے فاصلے ہیں وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے اور ان کا فرق مشترک وہ فاصلہ ہوگا۔ جو نصاب اور پلڑے کے نقطہ تعلیق کے درمیان ہے۔

(۱۷۳) جب مشین کا مرکز ثقل ک لمبے بازو میں ہو۔ تو نقطہ

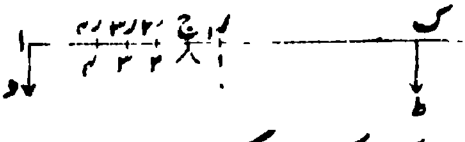
و جہاں سے درجہ بندی شروع ہوتی ہے۔ چھوٹے بازو میں ہوگا۔ اس دوسری صورت میں دلائل مسئلہ وہی ہوں گے جو پہلی صورت میں استعمال ہوئے۔ صرف اتنا فرق ہوگا۔ کہ مساوات (۱) و (۲) کو جمع کرنا ہوگا۔

(۱۷۴) **ڈنمارک کا تک**۔ اس تک میں ایک سلاخ ا ب ہوتی ہے جس کے سرے ب پر ایک گولا سا ہوتا ہے اور ا پر ایک کانٹا یا پلڑا ہوتا ہے۔ جہاں تولنے کا سامان لٹکایا جاتا ہے۔



سلاخ کے جس نقطہ پر مشین کو لٹکانے سے توازن پیدا ہو اس کو دیکھنے سے سامان کا وزن معلوم ہوتا ہے۔

[اکثر اوقات یہ عمل ایک رسی کے حلقہ کے ذریعہ کیا جاتا ہے جو سلاخ پر چڑھا ہوتا ہے اور ادھر ادھر ہوسکتا ہے۔ یہ معلوم کرتے ہیں کہ حلقہ کہاں رکھا جائے۔ کہ مشین متوازن ہو]



(۱۷۵) **ڈنمارک کے تک کی درجہ بندی**۔ فرض کرو کہ سلاخ اور پلڑے کا وزن ط ہے اور ان کا مشترک مرکز ثقل ک ہے۔ اگر پلڑے میں وزن و رکھا جائے۔ تو فرض کرو کہ نصاب ج پر ہے۔

ج کے گرد معیار لینے سے

و × اج = ط × ج ک = ط × (اک - اج)

∴ اج (ط + و) = ط × ک

∴ اج = ط/(ط+و) × اک .... (۱)

اول فرض کرو کہ و = ط تب اج = ½ اک
اس لئے اک کی تنصیف کرو اور نقطہ تنصیف ل۱ پر ہندسہ ۱ لکھو دو جب تک اس نقطہ کے گرد متوازن ہوگا تو پلڑے میں رکھے ہوئے جسم کا وزن ط ہوگا۔

دوم فرض کرو کہ و = ۲ط تب اج = ⅓ اک ا سے ⅓ اک کے فاصلہ پر ایک نقطہ ل۲ لو۔ اور اس پر ہندسہ ۲ لکھو۔
پھر و کو علی التواتر ۳ط، ۴ط .... کے برابر لو تو ان کے مطابق مساوات (۱) سے اج کی قیمتیں ¼ اک، ⅕ اک.... ہونگی ا سے یہ فاصلے ناپ کر نشانات ۳، ۴،..... لگاؤ۔

اب فرض کرو کہ و = ½ ط تو مساوات (۱) سے اج = ⅔ اک اگر و = ⅓ ط تو مساوات (۱) سے اج = ¾ اک
اس لئے ا سے فاصلے ⅔ اک، ¾ اک، ⅘ اک،....
ناپو اور ان پر نشانات ½، ⅓، ¼ .... لگاؤ۔

یہ ظاہر ہے کہ نقطہ ک آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔کیونکہ یہ نقطہ نصاب کا مقام ہے جب پلڑے میں کوئی وزن نہ ہو

نتیجہ صریح۔ چونکہ ال۱، ال۲، ال۳، ...... اعداد ۲، ۳، ۴ ... کے بالعکس متناسب ہیں اس لئے وہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

پس اگر پلڑے میں برابر وزنوں کا اضافہ کیا جائے تو پلڑے سے درجوں کے فاصلے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

مثال۔ ایک ڈنمارک کے تک کا وزن ۶ پونڈ ہے اور اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ پلڑے سے ۳ فٹ ہے تو پلڑے سے درجوں کے فاصلے دریافت کرو۔

علامات دفعہ سابقہ کے استعمال سے ط = ۶ اور اک = ۳ فٹ

∴ اج $= ۳ \times \frac{۶}{\text{و}+۶} = \frac{۱۸}{۶+\text{و}}$ فٹ

∴ جب و = ۱ تو $\text{ار}_{۱} = \frac{۱۸}{۷} = ۲\frac{۴}{۷}$ فٹ

جب و = ۲ تو $\text{ار}_{۲} = \frac{۱۸}{۸} = ۲\frac{۱}{۴}$ فٹ

جب و = ۳ تو $\text{ار}_{۳} = \frac{۱۸}{۹} = ۲$ فٹ

....

جب و = $\frac{۱}{۲}$ تو $\text{ار}_{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۸}{۶+\frac{۱}{۲}} = ۲\frac{۱۰}{۱۳}$ فٹ

علی ہذا القیاس

یہ درجہ بندی مطلوبہ ہے۔

امثلہ نمبری (۲۹)

(۱) ایک رومی تک کا وزن ۱۰ پونڈ ہے۔ نضاب سے ۴ انچ کے فاصلہ پر تلنے والا جسم لٹکایا گیا ہے اور تک کا مرکز ثقل نضاب کی دوسری طرف ۲ انچ کے فاصلہ پر ہے۔ حرکت پذیر وزن ۱۲ پونڈ ہے۔ معلوم کرو کہ ایک سٹینڈرڈ ویٹ کا درجہ کہاں ہوگا؟

(۲) ایک بھاری گاؤ دم سلاخ طول میں $14\frac{1}{2}$ انچ اور وزن میں ۳ پونڈ ہے اس کا مرکز ثقل موٹے سرے سے $1\frac{3}{4}$ انچ ہے اس کو بطور ایک تک کے استعمال کیا جاتا ہے۔ جس کا حرکت پذیر وزن ۲ پونڈ ہے تو معلوم کرو کہ نصاب کہاں ہونا چاہیئے کہ اس تک سے ۱۲ پونڈ تک تول سکیں۔ اور پونڈوں کے درجوں کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

(۳) ایک تک میں پلڑے کے نقطہ تعلیق سے نصاب کا فاصلہ ایک انچ ہے اور حرکت پذیر وزن ۶ اونس ہے۔ ۱۵ پونڈ وزن کو تولنے کے لئے حرکت پذیر وزن کو نصاب سے ۸ انچ کے فاصلے پر رکھنا پڑتا ہے۔ تو معلوم کرو کہ ۲۴ پونڈ وزن تولنے کے لئے اسے کہاں رکھنا چاہیئے؟۔

(۴) ایک تک کا نصاب پلڑے کے نقطۂ تعلیق سے $1\frac{1}{2}$ انچ اور سلاخ کے مرکز ثقل سے ۲ انچ ہے۔ سلاخ کا وزن ۳ پونڈ ہے اور حرکت پذیر وزن ۲ پونڈ ہے۔ تو پونڈوں کے درجوں کے درمیانی فاصلے کیا ہوں گے۔ اور کم از کم کتنا وزن اس تک سے تل سکتا ہے؟

(۵) ایک تک اب ۴ فٹ لمبا ہے اور ا سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ ۱۱ انچ ہے اور نصاب کا فاصلہ ۸ انچ ہے۔ اگر مشین کا وزن ۴ پونڈ ہو اور حرکت پذیر وزن ۳ پونڈ ہو۔ تو ب سے ۱۵ پونڈ کے درجے کا فاصلہ انچوں میں دریافت کرو۔

(۶) ایک ۲ فٹ لمبی سلاخ اب کا وزن ۲ پونڈ ہے۔ ا سے ۴ انچ کے فاصلے پر نضاب مقرر کرکے اس کو بطور تک کے استعمال کیا جاتا ہے۔ تو معلوم کرو کہ ۲ پونڈ حرکت پذیر وزن کے ساتھ بڑے سے بڑا کتنا وزن تل سکتا ہے اور درجے کس مقام سے ناپے گئے ہیں؟

(۷) ایک یکساں سلاخ کو ۲۰ مساوی حصّوں میں تقسیم کرکے نضاب پہلے حصہ کے سرے پر مقرر کیا گیا ہے۔ اس تک سے بڑے سے بڑا وزن ۲۰ پونڈ اور چھوٹے سے چھوٹا ۲ پونڈ تول سکتے ہیں۔ تو حرکت پذیر وزن اور سلاخ کا وزن دریافت کرو۔

(۸) ایک یکساں سلاخ طول میں ۲ فٹ اور وزن میں ۳ پونڈ ہے۔ ایک سرے سے ۲ انچ کے فاصلے پر نضاب مقرر کرکے اور حرکت پذیر وزن ا پونڈ لے کر اس کو بطور تک کے استعمال کیا جاتا ہے۔ تو معلوم کرو کہ اس مشین سے کتنا وزن اعظم اور کتنا وزن اقل تل سکتا ہے اور ۲۰ پونڈ کا درجہ کہاں ہوگا؟

(۹) ایک تک کی ڈنڈی کا طول ۳۲ انچ ہے۔ پلڑے کے نقطۂ تعلیق سے ۴ انچ کے فاصلہ پر نضاب ہے اور $5\frac{1}{2}$ انچ پر ڈنڈی کا مرکز ثقل ہے۔ اگر ڈنڈی کا وزن ۶ پونڈ ہو اور وزن اعظم جو تل سکتا ہے ۲۴ پونڈ ہو تو حرکت پذیر وزن کی مقدار دریافت کرو۔

(۱۰) ایک تک کی یکساں ڈنڈی کا طول ۳ فٹ اور وزن $\frac{1}{4}$۲ پونڈ ہے۔ اور نضاب ایک سرے سے ۴ انچ کے فاصلے پر ہے اور حرکت پذیر وزن ا پونڈ ہے۔ تو معلوم کرو کہ زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا وزن اس مشین سے تل سکتا ہے اور پونڈوں کے درجوں کا درمیانی فاصلہ کتنا ہوگا؟

(۱۱) ایک تک کی یکساں ڈنڈی ۴۰ انچ لمبی ہے۔ ڈنڈی کا وزن حرکت پذیر وزن کے برابر ہے اور وزن اعظم اس تک سے جو تل سکتا ہے وہ حرکت پذیر وزن سے چار گنا ہے تو نضاب کا مقام دریافت کرو۔

(۱۲) ایک ڈسمارک کے تک میں صفر درجہ سے لے کر ڈنڈی کے سرے تک ۲۰ مساوی حصے کر دیئے گئے ہیں اور زیادہ سے زیادہ ۳ پونڈ ۹ اونس وزن اس تک سے تل سکتا ہے تو تک کا وزن دریافت کرو۔

(۱۳) ایک ڈسمارک کے تک کا وزن ایک پونڈ ہے اور ۴ پونڈ اور ۵ پونڈ کے درجوں میں ایک انچ کا فاصلہ ہے۔ تو ڈنڈی کے درجہ دار حصے کی لمبائی معلوم کرو۔

(۱۴) ایک ڈسمارک کے تک میں نضاب پہلے اور دوسرے درجہ کے عین وسط میں ہے۔ تو ثابت کرو کہ پلڑے میں رکھا ہوا وزن ڈنڈی کے وزن سے $\frac{1}{5}$ گنا ہے۔

(۱۵) ایک تک اس قدر گھس گیا ہے کہ اس کا وزن پہلے سے نصف رہ گیا ہے۔ لیکن اس کا طول اور مرکز ثقل وہی ہے

جو پہلے تھا۔ اگر نصاب سے صفر درجہ کا فاصلہ کوئی سے دو متصل درجوں کے درمیانی فاصلے کا $\frac{1}{4}$ ہو۔ اور حرکت پذیر وزن ایک پونڈ ہو۔ تو معلوم کرو کہ ہرایک تول کی تصحیح کسطرح کی جائے ؟

(۱۶) ایک تیک کے وزن کا $\frac{1}{10}$ حصہ استعمال سے گھس گیا ہے لیکن اس کے مرکزثقل کا مقام تبدیل نہیں ہوا۔ تو معلوم کرو کہ اس کے درجوں کو کس طرح صحیح کیا جائے۔

(۱۷) ایک دوکاندار ایک عام تیک استعمال کرتا ہے اور اس کا حرکت پذیر وزن بدل دیتا ہے۔ تو معلوم کرو کہ ایسا کرنے سے دوکاندار کو نقصان ہوگا۔ یا خریدار کو۔

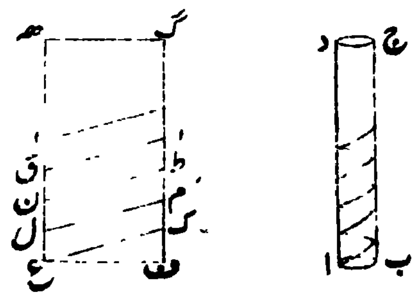
(۱۸) ایک تولنے کی مشین تیک کے اصول پر بنائی گئی ہے پونڈوں کا وزن صفر پونڈ سے ۱۴ پونڈ تک درجوں کے ذریعہ معلوم ہوتا ہے اور سٹونوں کے وزن ڈنڈی کے سرے پر ایک وزن لٹکانے سے معلوم ہوتے ہیں۔ اگر ایک سٹون کا وزن ۷ اونس وزن لٹکانے سے معلوم ہو۔ اور حرکت پذیر وزن $\frac{1}{4}$ پونڈ ہو۔ اور ڈنڈی کا طول نصاب سے ۱ فٹ ہو تو ثابت کرو کہ درجہ پونے پونے انچ پر ہوں گے۔

(۱۹) ایک تولنے کی مشین اس طرح بنائی گئی ہے۔ کہ اگر پلڑے میں ایک سٹون وزن کا اضافہ کیا جائے۔ تو ڈنڈی کے سرے پر ۴ اونس کا ایک زائد وزن لٹکانا پڑتا ہے۔ (ڈنڈی کا طول نصاب سے ایک فٹ ہے) اور پورے سے

ستون سے بڑھکر جتنے پونڈ ہوتے ہیں وہ ایک ن اونس
کے حرکت پذیر وزن سے معلوم ہوتے ہیں۔ تو ثابت کرو کہ
پونڈوں کے درجوں کا درمیانی فاصلہ $\frac{ب}{ن}$ گ انچ ہے۔ اور
نصاب سے پلڑے کے نقطہ تعلیق کا فاصلہ $\frac{۳}{۶}$ د انچ ہے۔

ہفتم۔ پیچ

(۱۶۲) یہ دھات کا ایک اسطوانہ ہوتا ہے۔ جس کے اوپر گردا
گرد دھات کی ایک ابھری ہوئی مسلسل چوڑی ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ ا ب ج د ایک ٹھوس اسطوانہ ہے۔ اور
ع ف گ ھ کاغذ کا ایک مستطیل ہے۔



جس کا قاعدہ ع ف اسطوانے کے محیط کے برابر ہے۔ ع ھ پر
نقاط ل، ن، ق .... اور ف گ پر نقاط ک، م، ط...
ایسے لو کہ ع ل، ل ن،... اور ف ک، ک م، م ط...
سب برابر ہوں اور ع ک، ل م، ن ط..... کو ملاؤ
مستطیل کو اسطوانہ پر اس طرح لپیٹو۔ کہ نقطہ ع نقطہ ا پر
اور خط ع ھ خط ا د پر منطبق ہو۔ جب مستطیل اسطوانے پر

پورا لپٹ جائے گا۔ تو ف بھی ع کے ساتھ ا پر منطبق ہوگا۔ اور خطوط ع ک، ل م، ن ط، ..... اسطوانہ کی سطح پر ایک مسلسل خط کی صورت اختیار کریں گے۔ اور اگر ہم اس مسلسل خط کو ابھرا ہوا فرض کرلیں۔ تو یہ پیچ کی چوڑی بن جائیگا۔ طرز عمل ہی سے ظاہر ہے کہ پیچ کی چوڑی ایک سطح مائل ہے جو اسطوانہ کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور اس کا میلان افق سے ہر مقام پر ایک ہی ہے۔ اور زاویہ ک ع ف کے برابر ہے۔ یہ زاویہ اکثر اوقات پیچ کا زاویہ کہلاتا ہے۔ اور محور اسطوانہ کی سمت میں دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ پیچ کی گھائی کہلاتا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ ف ک دو متصل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے برابر ہے اور ع ف اس اسطوانہ کا محیط ہے جس پر چوڑی کے خط کی ترسیم ہوئی۔

∴ پیچ کے زاویہ کا مماس = $\frac{\text{ف ک}}{\text{ع ف}}$

= $\frac{\text{پیچ کی گھائی}}{*}$

---

* اس دائرہ کا محیط جسکا نصف قطر محور سے پیچ کے کسی نقطہ کا فاصلہ ہو

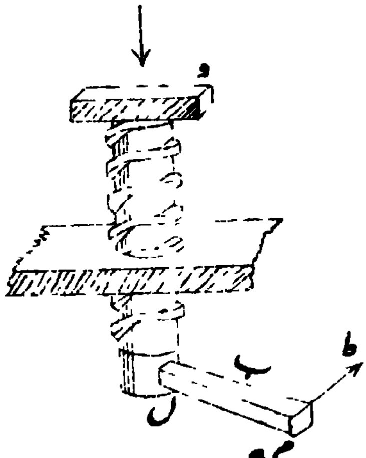
عملاً چوڑی کی تراش کی مختلف شکلیں ہوتی ہیں۔ لیکن ہم صرف مستطیل تراش پر بحث کریں گے۔

(۱۷۷) پیچ عام طور پر ایک ثابت شہتیر یا کندے میں چلتا ہے جس کے اندر پیچ کی چوڑی کی شکل کا ایک جوف ہوتا ہے

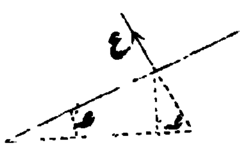
اور چوڑی اس جوف کے اندر بیٹھتی چلی جاتی ہے۔
پیچ کی حرکت صرف یہی ہو سکتی ہے کہ محور کے گرد گردش کرے اور گردش کے ساتھ ساتھ اپنے طول کی متوازی سمت میں بھی چلے۔ اگر پیچ کو جوف میں ڈالکر سیدھا کھڑا کردیا جائے اور اس کے سر پر وزن رکھدیا جائے۔ تو چونکہ پیچ اور جوف کے درمیان رگڑ کا ہونا فرض کیا گیا ہے۔ اس لئے پیچ گھومیگا اور ساتھ ساتھ نیچے کو اترے گا۔ پس پیچ کے توازن کے لئے لازم ہے کہ اس پر ایک اور قوت عمل کرے۔ یہ قوت عام طور پر ایک افقی بازو کے سرے پر لگائی جاتی ہے اس بازو کے دوسرے سرے کا پیچ کے ساتھ استوار جوڑ ہوتا ہے۔

(۱۷۸) ایک چکنے پیچ میں زور اور بوجھ کا باہمی تعلق دریافت کرو۔
فرض کرو کہ پیچ کے محور سے اس کے کسی نقطہ کا فاصلہ ا ہے اور ب پیچ کے محور سے اس نقطہ کا فاصلہ ہے جہاں زور لگایا جاتا ہے۔ پیچ مفصلہ ذیل قوتوں کے زیر عمل متوازن ہے۔ ایک تو زور ط ہے دوسرے وزن و ہے۔ اور تیسرے ان نقاط پر کے عمل ہیں۔ جہاں پیچ کی چوڑی شہتیر کے اندر جوف کو مس کرتی ہے۔

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو



فرض کرو کہ ع ، س ، ط .... پیچ کی چوڑی کے مختلف نقاط پر شہتیر کے عمل ہیں - یہ سب چوڑی پر عمود ہوں گے کیونکہ چوڑی چکنی ہے - اور فرض کرو کہ پیچ کی چوڑی کا میلان افق سے عہ ہے۔



عمل ع کا افقی جزو ترکیبی ع جب عہ ہو گا اور عمودی جزو ع جم عہ ہو گا اسی طرح ہم س ، ت .... کی تحلیل کر سکتے ہیں۔ اس لئے شہتیر کے عمل قوتوں کے دو مختلف مجموعوں کے مساوی ہیں ایک ع جم عہ، س جم عہ، ت جم عہ عمودی سمت میں ہو گا۔

اور دوسرا ع جب عہ، س جب عہ، ت جب عہ... افقی سمت میں ہو گا۔ افقی قوتیں اگرچہ پیچ کے مختلف نقاط پر عمل کرتی ہیں - لیکن پیچ کے محور سے انکا فاصلہ ایک ہی ہے - اور ان میں پیچ کو ط کی متقابل سمت میں

گھمانے کی قابلیت ہے۔ عمودی قوتوں کو وزن کے مساوی لکھنے سے ہمیں یہ مساوات حاصل ہوگی۔

و = ع جم عہ + س جم عہ + ت جم عہ + ... = (ع + س + ت + ..) جم عہ ...(۱)

پیچ کے محور کے گرد معیار لینے سے بموجب دفعہ ۹۳

ط × ب = ع جب عہ × ا + س جب عہ × ا + ت جب عہ × ا + ...

= اجب عہ (ع + س + ت + ...) .... (۲)

مساوات (۱) و (۲) پر عمل تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ط} \times \text{ب}}{\text{و}} = \frac{\text{اجب عہ}}{\text{جم عہ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{و}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \text{ مس عہ} = \frac{\text{۲ π ا مس عہ}}{\text{۲ π ب}}$$

لیکن بموجب دفعہ ۱۷۶

۲ π ا مس عہ = دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ = پیچ کی گھائی

اور ۲ π ب = اس دائرہ کا محیط جو زور کے بازو کے سرے کے گھومنے سے بنتا ہے۔

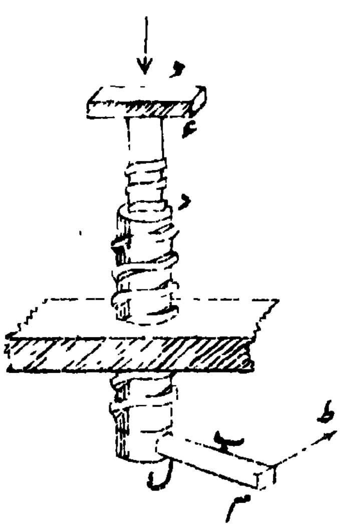
$$\text{پس مشینی مفاد} = \frac{\text{و}}{\text{ط}} = \frac{\text{۲ π ب}}{\text{۲ π ا مس عہ}}$$

$$= \frac{\text{اس دائرہ کا محیط جس کا نصف قطر زور کا بازو ہے}}{\text{دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ}}$$

کام کے اصول کی تصدیق۔ اگر زور کا بازو ایک پوری گردش کرے۔ تو پیچ اتنا اوپر کو چڑھتا ہے۔ جتنا کہ دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ ہے اس لئے ہر ایک گردش میں زور کا کام = ط × اس دائرہ کا محیط جو کہ زور کے بازو کے سرے کے گھومنے سے بنتا ہے۔ اور جو کام کہ وزن کے مقابل ہوا وہ = و × دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ

بموجب مساوات بالا یہ دونوں برابر ہیں۔

(۱۷۹) نظراً ہم پیچ کے مشینی مفاد کو جتنا چاہیں بڑھا سکتے ہیں کیونکہ چوڑیوں کے فاصلہ کو کم کرنے سے یہ نتیجہ حاصل ہو سکتا ہے۔ لیکن عملاً یہ ناممکن ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے۔ کہ اگر چوڑیوں کے فاصلہ کو نہایت کم کردیا جائے۔ تو چوڑی اس قدر مضبوط نہیں رہے گی کہ دباؤ برداشت کرسکے۔ ہنٹر کے تفریقی پیچ سے یہ مشکل حل ہو سکتی ہے۔ اس مشین میں ایک پیچ ل د ایک ثابت شہتیر کے اندر چلتا ہے۔ اور یہ پیچ ل د بھی کھوکھلا ہوتا ہے۔ اور اس کے اندر ایک نالی اس طرح کی بنی ہوئی ہوتی ہے۔ کہ اس میں ایک اور پیچ د ع داخل ہو سکے۔ پیچ د ع نقطہ ع پر ایک اور شہتیر میں اس طرح جڑا ہوا ہوتا ہے۔ کہ د ع گھوم نہ سکے لیکن اپنے طول کی سمت میں حرکت کرسکے۔



جب زور کا بازو ل م ایک چکر پورا کرتا ہے۔ تو پیچ ل د اس قدر فاصلہ اوپر کو چڑھتا ہے جس قدر کہ اسکی دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ ہے۔ اور ساتھ ہی ساتھ چھوٹا پیچ د ع بڑے پیچ ل د کے اندر اتنا داخل ہوتا ہے۔ جتنا کہ چھوٹے پیچ کی دو متصل چوڑیوں کا فاصلہ ہے۔ پس چھوٹا پیچ (لہذا وزن) ان دونوں فاصلوں کے فرق کے برابر آگے بڑھتا ہے۔ توازن کی حالت میں فرض کرو کہ بڑے پیچ اور اس کے جوف کے تعامل ع، س، ت .... ہیں اور اندرونی اور بیرونی پیچوں کے تعامل عَ، سَ، تَ... ہیں اور فرض کرو کہ پیچوں کے نصف قطر ا اور اَ اور زاویے عہ اور عہَ ہیں۔

بطرز دفعہ سابقہ چونکہ بیرونی پیچ متوازن ہے اس لئے

ط × ب = (ع + س + ت + ...) جب عہ × ا − (عَ + سَ + تَ + ...) جب عہَ × اَ ... (۱)

اور (ع + س + ت + ...) جم عہ = (عَ + سَ + تَ + ...) جم عہَ ... (۲)

نیز چونکہ اندرونی پیچ متوازن ہے اس لئے

و = (عَ + سَ + تَ + ...) جم عہ .... (۳)

(۲) و (۳) سے

عَ + سَ + ... = و / جم عہَ اور ع + س + ت + ... = و / جم عہ

اس لئے (۱) سے

ط × ب = و × ا × مس عہ − و × اَ × مس عہَ

$$\frac{\text{و}}{\text{ط}} = \frac{2\pi\ \text{ب}}{2\pi\ \text{ا مس عہ} - 2\pi\ \text{اَ مس عہَ}}$$

$$= \frac{\text{اس دائرہ کا محیط جو زور کے بازو کے سرے کے گھومنے سے بنے}}{\text{دونوں پیچوں کی گھائیوں کا فرق}}$$

دونوں پیچوں کی گھائیوں کو قریباً برابر بنانے سے ہم مشینی مفاد بہت زیادہ کر سکتے ہیں اور ایسا کرنے سے مشین کمزور بھی نہیں ہوتی۔ کام کا اصول اس صورت میں بھی تصدیق ہو سکتا ہے۔ کیونکہ وزن اس قدر اوپر کو چڑھتا ہے۔ جس قدر کہ پیچوں کی گھائیوں میں فرق ہے۔

امثلہ نمبری (۳۰)

(۱) اگر ۲۵ پونڈ وزن کے مساوی زور $۳\frac{۱}{۲}$ فٹ لمبے بازو کے سرے پر ایک چکنے عمودی پیچ کو لگایا جائے۔ تو کتنا وزن اٹھ سکیگا۔ پیچ کی گھائی $۱\frac{۱}{۲}$ انچ ہے۔

(۲) ایک پیچ میں فی انچ چھ چوڑیاں ہیں۔ تو اس میں زور کے بازو کا کیا طول ہونا چاہیئے۔ کہ مشینی مفاد ۲۱۶ ہو؟

(۳) ایک پیچ کو اگر سات چکر دئے جائیں۔ تو $\frac{۳}{۴}$ انچ آگے کو بڑھتا ہے۔ اگر اس کا زور کا بازو ۱۸ انچ لمبا ہو۔ تو پیچ کے سرے پر ۱۱۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ پیدا کرنیکے لئے کس قدر زور لگایا جائے؟

(۴) ایک پیچ جس کی گھائی ½ انچ ہے ایک ۴ فٹ لمبے بیرم کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے تو ۱۵ ہنڈرڈ ویٹ کا وزن اٹھانے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۵) ایک پیچ کا بازو ایک گز لمبا ہے۔ اور اس میں فی انچ ۲ چوڑیاں ہیں۔ تو ایک ٹن وزن اٹھانے کے لئے بازو پر کس قدر زور لگانا چاہئے؟

(۶) ایک پیچ میں فی انچ ۴ چوڑیاں ہیں۔ اگر ۲ فٹ لمبے بازو کے سرے پر ۵۰ پونڈ وزن کی قوت لگائی جائے تو پیچ کا کس قدر دباؤ ہوگا؟

(۷) ایک پیچ کا بازو ۲ فٹ لمبا ہے۔ اور اس میں فی فٹ دس چوڑیاں ہیں۔ تو ۱۱۲ پونڈ وزن کے برابر زور لگانے سے کس قدر دباؤ پیدا ہوگا؟

(۸) اگر زور ۱ فٹ لمبے بازو کے سرے پر لگایا جائے اور پیچ سات چکر کھاکر ایک فٹ آگے بڑھے۔ تو ایک ٹن وزن سہارنے کے لئے کس قدر زور درکار ہوگا؟

(۹) اگر پیچ کو چلانے کا بیرم ۶ فٹ لمبا ہو اور اگر بیرم کے دونوں سروں میں سے ہر ایک پر ۱۰ پونڈ وزن کے برابر زور لگاکر ۱۰۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ پیدا کرنا مقصود ہو۔ تو معلوم کرو کہ پیچ کی گھائی کیا ہوگی؟

(۱۰) ایک تفریقی پیچ کے دونوں حصوں میں فی انچ بالترتیب ۵ اور ۶ چوڑیاں ہیں اور ایک چار فٹ قطر والے

چکر کے محیط پہ زور لگایا جاتا ہے۔ تو اس کا مشینی مفاد دریافت کرو۔

(۱۱) ایک تفریقی پیچ میں بڑے پیچ کی چوڑیاں ۸ فی انچ ہیں اور چھوٹے کی ۹ فی انچ۔ اور زور کے بازو کی لمبائی ایک فٹ ہے تو مشینی مفاد دریافت کرو۔

(۱۲) ایک پیچ کا محور عمودی ہے۔ اور اس کی گھائی ۲ انچ ہے۔ اگر ۱۰۰ پونڈ وزن کا دروازہ اس پیچ سے لگا دیا جائے۔ جیسے کہ قبضہ کے ساتھ لگا دیا جاتا ہے۔ تو دروازہ کو بقدر ایک زاویہ قائمہ گھمانے میں کس قدر کام کرنا پڑے گا؟

(۱۳) اگر ایک رسی کو ایک دوہرے پیچ کے ذریعہ کسا جائے۔ جس کا ایک پیچ دائیں ہاتھ کے رخ چلتا ہے اور دوسرا بائیں کے رخ اور پہلے پیچ میں فی انچ ۵ چوڑیاں ہیں اور دوسرے میں فی انچ ۶ چوڑیاں ہیں اور اگر پیچ کو ۲ فٹ لمبے بیرم کے ذریعہ ۴۹ پونڈ وزن کی قوت دونوں سروں پر لگائی جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ۹ ٹن وزن کے مساوی ہوگا۔

[کیونکہ پیچ کے چکر سے رسی کے سرے بقدر $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ انچ ایک دوسرے کے قریب ہو جاتے ہیں۔ اس لئے کام کے اصول کے بموجب $ت \times (\frac{1}{5}+\frac{1}{6}) \times \frac{1}{12} = 49 \times 2\pi \times 2$
جہاں ت رسی کا تناؤ پونڈوں میں ہے]

باب سیزدہم

فرک یا رگڑ

(۱۸۰) دفعہ ۲۰ میں ہم نے چکنے جسموں کی یہ تعریف کی تھی کہ اگر ایسے اجسام ایکدوسرے کو مس کریں تو نقطہ تماس پر ان کا باہمی تعامل دونوں سطحوں پر عمود وار ہوگا۔ اس لئے چکنے جسموں کی صورت میں کوئی قوت ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے نہیں روک سکتی اگر ایک پورا چکنا جسم ایک پوری چکنی سطح مائل پر رکھدیا جائے تو جسم اور سطح مائل کے درمیان کوئی ایسا تعامل نہیں ہوگا جو جسم کو سطح مائل پر نیچے پھسلنے سے روکے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ جسم سطح مائل پر نہیں رہیگا جب تک کہ کوئی بیرونی قوت اس پر نہ لگائی جائے لیکن عملی طور پر دیکھنے میں آتا ہے کہ عالم موجودات میں ایسے اجسام نہیں ہیں جو مکمل طور پر چکنے ہوں۔ دو مس کرنیوالے اجسام کے درمیان ہمیشہ کچھ نہ کچھ ایسی قوت ہوگی جو ایک کو دوسرے پر پھسلنے سے روکیگی ایسی قوت کو قوت فرک کہتے ہیں +

فرک۔ تعریف۔ اگر دو اجسام ایک دوسرے کو مس کریں تو

ان کی وہ خاصیت جس کی وجہ سے ان کے نقطہ تماس پر ایک ایسی قوت ظہور پذیر ہوتی ہے جو ایک جسم کو دوسرے پر پھسلنے سے روکتی ہے **فرک** کہلاتی ہے۔ نیز اس قوت کو جو اجسام کے نقطہ تماس پر عمل کرتی ہے۔ قوت فرک کہتے ہیں +

(۱۸۱) قوت فرک اپنے آپ کو خود کم زیادہ کرسکتی ہے جسقدر قوت حرکت کو روکنے کے لئے کافی ہو اس سے زیادہ ظہور میں نہیں آتی۔ فرض کرو کہ ایک لوہے کی وزنی تختی کا مستوی قاعدہ ایک افقی میز پر رکھا ہے اگر ہم تختی کے کسی نقطے پر رسی باندھکر اس کو ایسی سمت افقی میں کھینچیں جو تختی کے مرکز ثقل میں سے گزرے تو ہم محسوس کریں گے کہ ایک ایسی قوت تختی پر عمل کرتی ہے جو جسم کو ہلنے نہیں دیتی یہ فرک کی مزاحمت ہے۔ اور یہ ٹھیک اس قوت کے برابر ہے جو ہم رسی کے ذریعہ تختی پر لگاتے ہیں۔ اب اگر ہم تختی کو کھینچنا چھوڑ دیں تو قوت فرک بھی عمل کرنا چھوڑ دیگی۔ کیونکہ اگر فرک کا عمل جاری رہے۔ تو جسم حرکت کرنے لگیگا +

لیکن یاد رہے کہ دو اجسام کے درمیان قوت فرک کی مقدار غیر متناہی نہیں ہوتی جو قوت ہم تختی پر لگاتے ہیں اگر ہم اس کو متواتر بڑہاتے جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ آخرکار فرک اس قوت پر غالب آنے کے لئے کافی نہیں ہوگی اور جسم حرکت کرنے لگیگا +

(۱۸۲) روز مرہ زندگی کی عملی ضرورتوں کو ممکن الحصول کرنے میں فرک رکن اعظم ہے اگر زمین اور ہمارے قوتوں کے درمیان فرک نہ ہوتو چلنا ناممکن ہوجائے۔ اگر زمین اور زینہ کے درمیان فرک نہ ہوتو زینہ کا کسی ایسی حالت میں ٹھیرنا جو سمت راس سے کوئی زاویہ بناتی ہو ناممکن ہوجائے جب تک کہ اس کو خاص طور پر تھاما نہ جائے۔فرک کے بغیر کیل اور پیچ لکڑی میں نہ ٹھیر سکیں۔اور نہ انجن ہی گاڑی کو ہلا سکے +

(۱۸۳) سکونی فرک کے قوانین حسب ذیل ہیں +

قانون اول۔ جب دو اجسام مس کریں تو ان میں سے کسی ایک جسم پر فرک کی قوت نقطہ تماس میں سے گزریگی اور اس کی سمت اس سمت کے متقابل ہوگی جس میں کہ یہ نقطہ تماس حرکت کرنی شروع کرے گا +

قانون دوم۔ حالت توازن میں فرک کی مقدار جسم کو ہلنے سے روکنے کے لئے عین کافی ہوتی ہے +

(۱۸۴) فرض کرو کہ دفعہ ۱۵۶ کی صورت اول میں سطح مائل کھردری ہے اور جسم بلا تکلف سطح پر ساکن ہے یعنی کوئی قوت اس کو سہارے ہوئے نہیں ہے اس صورت میں زور ز کی جگہ فرک جسم کو سہارنے میں مدد دیگی۔اور اسکی مقدار و جب عہ ہوگی +

مثال (۱) ذیل کی دو صورتوں میں قوت فرک کی تعیین

دریافت کرو (۱) گاڑی کا پہیہ (۲) آدمی کا پاؤں جب وہ زمین پر چلے

مثال (۲) ایک ۳۰ پونڈ وزنی جسم ایک کھردری افقی سطح پر ساکن ہے اور ایک ۱۰ پونڈ وزنی قوت جو افق سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے اس پر عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ فرک ۸۶۶ء۸ پونڈ وزنی قوت کے برابر ہے +

مثال (۳) ایک جسم ایک کھردری افقی سطح پر ساکن ہے اور اس پر دو افقی قوتیں بالترتیب ۷ اور ۸ پونڈ وزنی عمل کرتی ہیں قوتوں کا باہمی میلان °۶۰ ہے ثابت کرو کہ فرک ایک ۱۳ پونڈ وزنی قوت کے برابر ہے پہلی قوت سے زاویہ $\text{جب}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{13}$ بناتی ہے +

مثال (۴) ایک ۴۰ پونڈ وزنی جسم ایک کھردری سطح مائل پر جو افق سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے فرداً فرداً مفصل ذیل قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے:-

(۱) ایک ۱۴ پونڈ وزنی قوت جو سطح کے متوازی اوپر کی طرف عمل کرتی ہے (۲) ایک ۲۵ پونڈ وزنی قوت جو سطح کے اوپر کی طرف عمل کرتی ہے (۳) ایک ۲۰ پونڈ وزنی افقی قوت (۴) ایک ۳۰ پونڈ وزنی قوت جو سطح سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے۔ ہر ایک صورت میں فرک کی قوت دریافت کرو +

جواب (۱) ۶ پونڈ وزنی قوت سطح کے اوپر کی طرف (۲) ۵ پونڈ وزنی قوت سطح کے نیچے کی طرف (۳) ۶۸ء۲ پونڈ وزنی قوت سطح کے اوپر کی طرف (۴) ۹۸ء۵ پونڈ وزنی قوت سطح کے نیچے کی طرف

(۱۸۵) قوانین بالا بالعموم درست ہیں۔ لیکن فرک کی مقدار ہر ایک صورت میں محدود ہوتی ہے اکثر اوقات توازن عین بگڑنے کو ہوتا ہے اور حرکت شروع ہوجاتی ہے +

انتہائی فرک۔تعریف۔ جب ایک جسم دوسرے جسم پر عین پھسلنے کو ہو تو ان کا توازن انتہائی توازن کہلاتا ہے اور فرک کی قوت جو ان کے درمیان عمل کرتی ہے انتہائی فرک کہلاتی ہے +

(۱۸۶) انتہائی فرک کی سمت قانون اول (دفعہ ۱۸۳) سے معلوم ہوتی ہے +

اور انتہائی فرک کی مقدار ذیل کے تین قوانین سے حاصل ہوگی۔

قانون سوم۔ انتہائی فرک کی مقدار عمودی تعامل کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتی ہے اور یہ نسبت صرف ان اشیا پر منحصر ہوتی ہے جن سے اجسام بنے ہوئے ہوں +

قانون چہارم۔ انتہائی فرک مس کرنیوالی سطحوں کی شکل اور وسعت پر منحصر نہیں ہوتی جب تک کہ عمودی تعامل نہ بدلے +

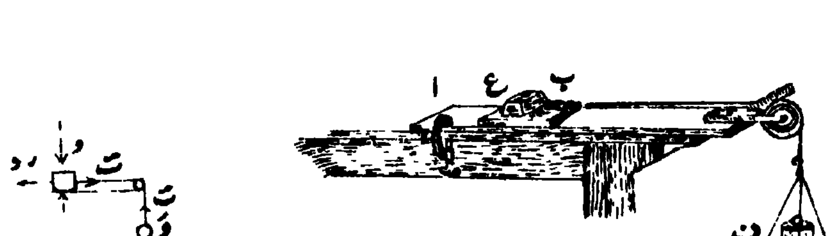
قانون پنجم۔ جب ایک جسم دوسرے پر پھسلنا شروع ہوجائے تو فرک کی سمت حرکت کی سمت کے متقابل ہوتی ہے اور فرک کی مقدار رفتار پر منحصر نہیں ہوتی لیکن اگر جسم حرکت کرتا ہو تو فرک اور عمودی تعامل کی باہمی نسبت ذرا کم ہوتی ہے بمقابلہ اس صورت کے جب جسم ساکن ہو اور عین حرکت کی حد تک پہنچ جائے +

یہ قوانین صرف تجربہ پر مبنی ہیں اور ہم ان کو بالکل صحیح

نہیں خیال کرسکتے اگرچہ عام حالتوں میں قریباً درست ہیں +
مثلاً۔ اگر ایک جسم کو دوسرے جسم پر اس طرح دبایا جائے کہ باہم مس کرنیوالی سطحوں کی نوبت ٹوٹنے پر آجائے۔ تو اس صورت میں قانون سوم صحیح نہیں رہیگا ایسی حالت میں فرک کے بڑہنے کی شرح عمودی تعامل کی شرح سے زیادہ ہوگی +

(۱۸۷) قدر فرک۔ انتہائی فرک اور عمودی تعامل کی باہمی مستقل نسبت کو قدر فرک یعنی رگڑ کا اندازہ کہتے ہیں اس کو ہم ر سے تعبیر کریں گے۔ پس جب دو اجسام کا توازن عنقریب معدوم ہونے کو ہو اس وقت اگر فرک کو ف سے اور عمودی تعامل کو ع سے تعبیر کریں تو ف/ع = ر یعنی ف = ر × ع +
باہم مس کرنیوالی اشیا کے اگر مختلف جوڑے لئے جائیں تو ر کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن اشیاء کے کوئی ایسے جوڑے معلوم نہیں جن میں قدر فرک ایک کے برابر ہو +

(۱۸۸) بذریعہ تجربہ فرک کے قوانین کی تصدیق کرو +



تجربہ (۱) ایک بڑا چکنی لکڑی کا چپٹا ٹکڑا لو اور ایک شکنجے کے ذریعہ اس کو مضبوطی سے میز کے ساتھ جکڑ دو تاکہ وہ

ہل نہ سکے یہ بھی دیکھ لو کہ وہ متوازی الافق ہے ایک اور لکڑی کا ٹکڑا ب لو اس کو اتنا چکنا بناؤ جتنا ممکن ہو۔ اس کو ہم پھسلنے والا ٹکڑا کہیں گے۔ دوسرے ٹکڑے کو ایک ہلکی رسی باندھو اور رسی کو دوسری طرف ایک ہلکی چرخی سے گذارو جو ٹکڑے ا کے سرے پر لگی ہوئی ہے رسی کے دوسرے سرے پر ایک پلڑا لٹکاؤ +

چرخی کو ا کے ایسے مقام پر لگانا چاہیئے کہ رسی کا وہ حصہ جو عمودی نہ ہو افقی ہو +

پھسلنے والے ٹکڑے پر ایک وزن معلوم ع رکھو اور پلڑے میں اوزان ف رکھتے جاؤ جب تک کہ پھسلنے والا ٹکڑا عین حرکت کرنے کی حد تک نہ پہونچ جائے وزن مطلوب ف کی تقریبی قیمت بآسانی معلوم ہوسکتی ہے اگر ہم ثابت ٹکڑے ا کو آہستہ سے چوٹ لگائیں +

اب بائیں طرف کی شکل پر غور کرو

فرض کرو کہ ع اور پھسلنے والے ٹکڑے دونوں کا مجموعی وزن و ہے نیز ف اور پلڑے ہر دو کے اوزان کا مجموعہ وَ ہے چونکہ پھسلنے والا ٹکڑا عین حرکت کرنے کی حد پر ہے اس لئے فرک کی مقدار جو اس پر عمل کرتی ہے ر × و ہے۔

نیز رسی کا تناؤ ت = وَ کیونکہ یہ ف اور پلڑے کے وزن کے ساتھ ملکر متوازن ہوتا ہے +

پھسلنے والے ٹکڑے کے توازن سے

ر و = ت = وَ

∴ $ر = \frac{وَ}{و}$

اس کے بعد پھسلنے والے ٹکڑے پر ایک مختلف وزن رکھو اور اس کے مطابق وزن ت کو کم زیادہ کرو جبتک کہ پھسلنے والا ٹکڑا حد حرکت تک نہ پہنچ جائے نیز و اور وَ کی نئی قیمتیں $و_1$ اور $وَ_1$ دریافت کرو تب بموجب سابق

$ر = \frac{وَ_1}{و_1}$

پھسلنے والے ٹکڑے پر مختلف اوزان رکھکر پھر تجربہ کرو اور مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

$\frac{وَ_2}{و_2}$ ، $\frac{وَ_3}{و_3}$ ، ....

تب معلوم ہوگا کہ $\frac{وَ}{و}$ ، $\frac{وَ_1}{و_1}$ ، $\frac{وَ_2}{و_2}$ .... کی قیمتیں تقریباً مساوی ہیں +

اس سے قانون سوم کے حصہ اول کی تصدیق ہوتی ہے یعنی اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ر کی قیمت عمودی تعامل پر منحصر نہیں ہے +

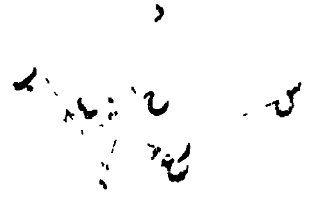
تجربہ (۲) اب ایک اور لکڑی کا ٹکڑا ب لو جس کی شکل اس لکڑی کے ٹکڑے سے جو تجربہ (۱) میں استعمال ہوا بالکل مختلف ہو۔[اس ٹکڑے کو اسی زندہ کی ہوئی لکڑی سے کاٹو جس سے پہلا ٹکڑا ب لیا گیا تھا] تجربہ اول کی نسبت اس صورت میں ٹکڑے ب کا رقبہ جو تختہ أ کو مس کرے

مختلف ہونا چاہیئے خواہ بڑا ہو یا چھوٹا +
تجربہ اول کو دہراؤ اور ر کی قیمت دریافت کرو تجربہ کی حدود کے اندر اس کی وہی قیمت ہوگی جو تجربہ (۱) میں معلوم ہوئی لیکن یاد رہے کہ دونوں تجربوں میں صرف فرق یہ ہے کہ اجسام کی کھردری سطوں کا رقبہ تماس مختلف ہے +
پس قانون چہارم کی تصدیق ہوگئی +
تجربہ (۳) اب مختلف قسم کی لکڑی کا ایک اور ٹکڑا ج لو اور اس کو اچھی طرح رندے سے صاف کرو اس میں سے کئی ایک ٹکڑے کاٹو جن کے رقبے مختلف ہوں لیکن جنکی سطین باقی ہر طرح سے ایک جیسی ہوں +
تجربات (۱) اور (۲) کو دہرانے سے ر کی قیمت دریافت کرو۔ اب ر کی قیمت اُس صورت سے مختلف ہوگی جبکہ پھسلنے والا ٹکڑا پہلی قسم کی لکڑی ب کا بنا ہوا تھا۔ اس سے قانون سوم کے حصہ دوم کی تصدیق ہوتی ہے۔ یعنی فرک اور عمودی تعامل کی باہمی نسبت ان اشیا پر منحصر ہے جن سے اجسام بنے ہوئے ہوں +
تجربہ (۴) اخیر میں مندرجہ بالا تین تجربوں کو دہراؤ لیکن اس صورت میں ف کو اس طرح منتخب کرو کہ پھسلنے والا ٹکڑا حرکت کی حد تک ہی نہ پہنچا ہوا ہو بلکہ ایک مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہو اس سے قانون پنجم کی تقریباً تصدیق ہوگی۔ مندرجہ بالا تجربوں میں خواہ سطین کتنی احتیاط سے تیار کیجائیں

ہمارے عددی نتائج میں کچھ نہ کچھ نا مطابقت ضرور ہوگی نیز چرخی کو پھرانیوالی قوت کے لئے ہم کو اپنے نتیجہ کی تصحیح کرلینی چاہیئے۔ خواہ یہ کیسی ہلکی اور اچھی بنی ہو اس کے محور پر کچھ نہ کچھ فرک ضرور ہوگی اس لئے رسی کے تناؤ دونوں طرف بالکل برابر نہیں ہوں گے جیساکہ ہم نے مان لیا ہے۔ دوسرے الفاظ میں ف کا کچھ حصہ چرخی کو پھرانے میں صرف ہوگا+
اس ترکیب کو موریں نے ۱۸۳۳ عیسوی میں استعمال کیا تھا+

(۱۸۹) زاویہ فرک۔ اگر توازن انتہائی ہو اور فرک اور عمودی تعامل کا حاصل دریافت کیا جائے تو جو زاویہ یہ حاصل عمود سے بنائے اس کو زاویہ فرک کہتے ہیں اور اس قوت واحد کو حاصل عمل کہتے ہیں+

فرض کرو کہ دو اجسام کا نقطہ تماس ا ہے اور اب اور اس بالترتیب عمودی قوت ع اور فرک رع کی سمتیں ہیں+
فرض کرو کہ حاصل عمل ح کی سمت اد ہے پس زاویہ فرک ب اد ہے اس کو لہ سے تعبیر کرو چونکہ ع اور ر قوت ح کے اجزائے ترکیبی ہیں



اس لئے ح جم لہ = ع اور
ح جب لہ = رع اس لئے
مربع لینے اور جمع کرنے سے
ح = ع $\sqrt{\text{۱}+\text{ر}^{\text{۲}}}$ اور تقسیم سے
مس لہ = ر پس معلوم ہوا کہ قدر فرک زاویہ فرک کے مماس کے

برابر ہوتی ہے ؞

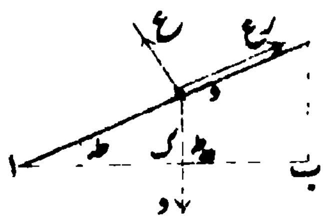
(۱۹۰) چونکہ فرک کی بڑی سے بڑی قیمت ر ع ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑا زاویہ جو حاصل عمل عمود سے بنا سکتا ہے وہ لہ یعنی مس‌ا ر ہے۔ پس اگر دو اجسام مس کریں اور اگر ان کے مشترک عمود کو محور اور نقطہ تماس کو راس مانکر ہم ایک مخروط بنائیں جس کا نصف زاویہ راس مس‌ا ر ہو تو یہ ممکن ہے کہ حاصل عمل کی سمت میں اس مخروط کے اندر یا اوپر واقع ہوسکے لیکن اس کی سمت مخروط کے باہر واقع نہیں ہوسکتی۔ اس مخروط کو مخروطِ فرک کہتے ہیں ؞

(۱۹۱) جدول ذیل کا اقتباس پروفیسر رانکن کی کتاب مشنری اینڈ ملورک (مشین اور کارخانہ) سے کیا گیا ہے اس میں چند اشیا کے متعلق قدر فرک اور زاویہ فرک کی قیمتیں دی گئی ہیں ؞

اشیاء	ر	لہ
لکڑی پر لکڑی ـــــ خشک	۰٫۲۵ سے ۰٫۵ تک	۱۴° سے ۲۶½° تک
" " ـــــ جن پر صابون ملا ہوا ہو	۰٫۰۴ سے ۰٫۲ تک	۲° سے ۱۱½° تک
دھاتوں پر دھاتیں ـــــ خشک	۰٫۱۵ سے ۰٫۲ تک	۸½° سے ۱۱½° تک
" " " تر	۰٫۳	۱۶½°
دھاتوں پر چمڑا ـــــ خشک	۰٫۵۶	۲۹½°
" " ...... تر	۰٫۳۶	۲۰°
" " ـــــ روغنی	۰٫۱۵	۸½°

(۱۹۲) اگر ایک جسم ایک کھردری سطح مائل پر ساکن ہو اور اس پر صرف دو قوتیں عمل کریں ایک سطح کا عمل اور دوسرے اس کا اپنا وزن۔ اور اگر سطح کے میلان کو بتدریج بڑہایا جائے جسم نیچے کی طرف پھسلنے کو اُس وقت ہوگا جب سطح کا میلان افق سے زاویہ فرک کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ جب جسم پھسلنے کو ہے سطح مائل کا میلان افق سے ط ہے نیز فرض کرو کہ جسم کا وزن و اور عمودی عمل ع ہے۔



چونکہ جسم نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہے فرک سطح کے اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اور اس کی مقدار رع ہے قوتوں کو سطح کی عمودی سمت اور سطح کے متوازی تحلیل کرنے سے

و جم ط = ع

اور و جب ط = رع

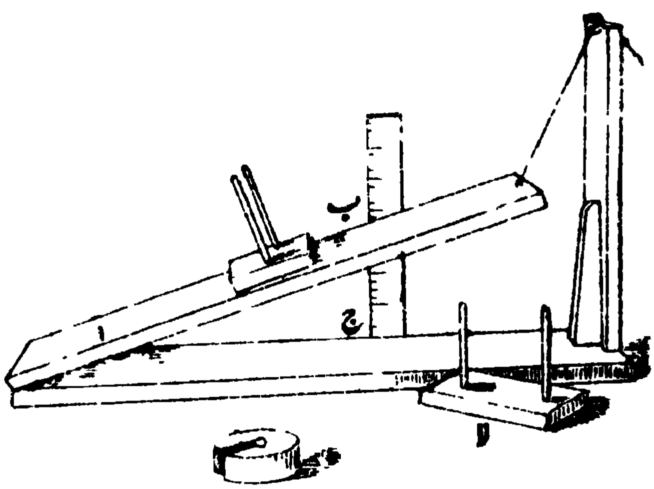
اس لئے تقسیم سے مس ط = ر = مس (زاویہ فرک)

∴ ط = زاویہ فرک

لیکن یہ اسطرح سے بھی ثابت ہوسکتا ہے۔ چونکہ جسم اپنے وزن اور حاصل عمل کے زیر عمل متوازن ہے اس لئے ضرور ہے کہ حاصل عمل سمت راس میں عمل کرے لیکن چونکہ توازن انتہائی ہے اس لئے حاصل عمل سطح کی عمودی سمت

سے زاویہ فرک بناتا ہے +
اس لئے معلوم ہوا کہ سطح کے عمود اور سمت راس کے درمیان جو زاویہ انتہائی توازن کی حالت میں بنتا ہے وہ زاویہ فرک کے برابر ہے یعنی سطح کا میلان افق سے زاویہ فرک کے برابر ہے +
اس خاصیت کی وجہ سے زاویہ فرک کو زاویہ سکون بھی کہتے ہیں۔ طالب علم کو بخوبی یاد رکھنا چاہیئے کہ جب جسم ایک سطح مائل پر پڑا ہو اور ایک بیرونی قوت اس کو سہارے ہوئے ہو تو قدر فرک اس زاویہ کے مماس کے برابر نہیں ہوتی جو سطح مائل افق سے بناتی ہے +
(۱۹۳) بذریعہ تجربہ فرک کی قدر معلوم کرو اور قوانین فرک کی تصدیق کرو [دوسرا طریقہ]
دفعہ گزشتہ کے مسئلہ سے دو اجسام کی باہمی فرک کی قدر تجربے سے حاصل ہو سکتی ہے +
فرض کرو کہ سطح مائل کسی ایک چیز کی بنی ہوئی ہے اور اسکی بالائی سطح اتنی صاف اور چکنی ہے جتنی کہ ممکن ہے۔اس سطح پر ایک تختی رکھو جسکا قاعدہ مستوی ہو۔ اور جو دوسری چیز کی بنی ہوئی ہو +
اگر سطح کا زاویہ میلان بتدریج بڑھایا جائے یہانتک کہ تختی پھسلنے کی حد تک پہنچ جائے تو اسوقت زاویہ میلان کا مماس قدر فرک کے برابر ہوگا +
صحیح نتیجہ حاصل کرنے کی خاطر اس تجربے کو کسی دو اشیاء کی

صورت میں کئی مرتبہ دہرانا چاہیئے اور پھر سب نتائج کا اوسط لینا چاہیئے۔ جس آلے کی شکل ذیل میں دی ہوئی ہے اس میں ایک تختہ ہے جس کا ایک سرا ایک اور تختے کے ساتھ ایک قبضہ کے ذریعہ لگا ہوا ہے اور یہ دوسرا تختہ ایک میز پر نصب کردیا جاسکتا ہے اوپر کا تختہ ایک رسی کے ذریعہ جس کا ایک سرا تو تختے سے بندھا ہوا ہے اور دوسرا ایک ثابت ستون کی چوٹی پر سے گزرتا ہے اوپر نیچے ہوسکتا ہے +



اوپر کے تختے پر مختلف ناپ اور مختلف اشیا کے بنے ہوئے پھسلنے والے اجسام رکھے جاسکتے ہیں اور پھر ان اجسام پر ہم مختلف اوزان رکھ سکتے ہیں۔ ہر ایک پھسلنے والے جسم لا پر دو سلاخیں لگی ہوئی ہیں اور ان پر اوزان چڑھائے جاسکتے ہیں تاکہ وہ دوران تجربہ میں سطح پر سے پھسل نہ جائیں

ایک درجہ دار عمودی پیمانہ نچلے تختہ پر لگا ہوا ہے اس سے اوپر کے تختے کی اونچائی کسی نقطہ ب سے بآسانی معلوم ہوسکتی ہے اب نسبت $\frac{ب ج}{ا ج}$ یعنی دفعہ ۱۸۵ کا مس طہ بآسانی حاصل ہوسکتا ہے +

اس آلے کی مدد سے فرک کے قوانین کی تصدیق ہوسکتی ہے کیونکہ اس تجربہ کے حدود کے اندر یہ معلوم ہوگا کہ $\frac{ب ج}{ا ج}$ یعنی ر کی قیمت :—

(۱) ہمیشہ وہی رہتی ہے جبتک کہ پھسلنے والا ٹکڑا لا ایک ہی چیز کا بنا ہوا ہو اور اس کی سطح کی صفائی کی حالت ایک ہی ہو۔

(۲) پھسلنے والے ٹکڑے کی شکل پر یا ان اوزان پر جو ٹکڑے پر رکھے جائیں ر کی قیمت منحصر نہیں ہوتی +

(۳) مختلف چیزوں کے لئے یہ مختلف ہوتی ہے

اس ترکیب کو کولوم نے ۱۷۸۵ عیسوی میں استعمال کیا تھا۔

(۱۹۴) ایک کھردری سطح مائل پر اجسام کا توازن

ایک کھردری سطح مائل زاویہ فرک سے بڑا زاویہ افق سے بناتی ہے اور اس پر ایک جسم ہے جس کو ایک ایسی قوت سہارے ہوئے ہے جو سطح کے متوازی خط میلان اعظم کی سمت میں عمل کرتی ہے قوت کی حدود دریافت کرو +

فرض کرو کہ سطح کا میلان افق سے عہ جسم کا وزن و اور عمودی تعامل ع ہے (شکل (۱) دفعہ ۱۵۶)

(۱) فرض کرو کہ جسم سطح کے نیچے کیطرف حرکت کرنے کو ہے

اس صورت میں فرک اوپر کیطرف عمل کریگی اور ر ع کے برابر ہوگی فرض کرو کہ قوت ط جسم کو سہارے ہوئے ہے اطلاع۔ دفعہ ۱۵۶ میں زور کو ز سے موسوم کیا گیا تھا باب ہذا میں قوت ط سے تعبیر کی گئی ہے۔

قوتوں کو سطح کے متوازی اور عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

ط + ر ع = و جب عہ .... (۱)

ع = و جم عہ .... (۲)

∴ ط = و (جب عہ ـ ر جم عہ)

اگر ر = مس لہ تو

ط = و [جب عہ ـ مس لہ جم عہ]

= و [(جب عہ جم لہ ـ جب لہ جم عہ) / جم لہ]

= و جب (عہ ـ لہ) / جم لہ .... (۳)

(۲) فرض کرو کہ جسم اوپر کیطرف حرکت کرنے کو ہے اس صورت میں فرک نیچے کیطرف عمل کرتی ہے اور ر ع کے برابر ہے فرض کرو کہ جسم کو سہارنے کے لئے قوت ط لگانے کی ضرورت پڑتی ہے۔ پس اس صورت میں

ط ـ ر ع = و جب عہ

اور ع = و جم عہ

پس ط = و (جب عہ + ر جم عہ)

= و (جب عہ + مس لہ جم عہ) = و جب (عہ + لہ) / جم لہ .... (۴)

جسم کو متوازن رکھنے کے لئے قوت کی انتہائی قیمتیں ط اور ط̣ ہیں اور اگر قوت ط اور ط̣ کے درمیان واقع ہوتو جسم متوازن رہیگا۔ مگر کسی سمت میں عین حرکت کرنے کو نہیں ہوگا +

پس توازن کے لئے قوت کو لازماً و جب(عہ+لہ)/جم لہ اور و جب(عہ-لہ)/جم لہ کے درمیان واقع ہونا چاہیئے +

یادرہے کہ ط̣ کی قیمت ط میں ر کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوسکتی ہے +

(۱۹۵) اگر سطح مائل پہ ایک جسم ہو اور ایک قوت ط اس پر ایسی سمت میں عمل کرے جو سطح مائل سے زاویہ طہ بناتی ہو (دیکھو دفعہ ۱۵۶ صورت سوم) تو جب جسم نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہوگا اور قوت فرک اوپر کو عمل کرے گی تو معادلات توازن یہ ہوں گی

ط جم طہ + ر ع = و جب عہ ....(۱)

ط جب طہ + ع = و جم عہ ....(۲)

پس (۲) کو ر میں ضرب دینے اور تفریق کرنے سے

ط = و (جب عہ - ر جم عہ)/(جم طہ - ر جب طہ) = و جب (عہ - لہ)/جم (طہ + لہ)

مساوات (۲) میں ط کی یہ قیمت مندرج کرنے سے ع کی قیمت حاصل ہوسکتی ہے +

جب جسم اوپر کیطرف حرکت کرنے کو ہوتو ر کی علامت

بدلنے سے یہ مساوات حاصل ہوگی۔

$$\text{ط} = \text{و}\,\frac{\text{جب}\,(\text{ع} + \text{لہ})}{\text{جم}\,(\text{ط} - \text{لہ})}$$

نتیجہ صریح۔ جو قوت جسم کو اوپر کیطرف حرکت دینے کے لئے عین کافی ہو اسکی مقدار چھوٹی سی چھوٹی اس صورت میں ہوگی جب

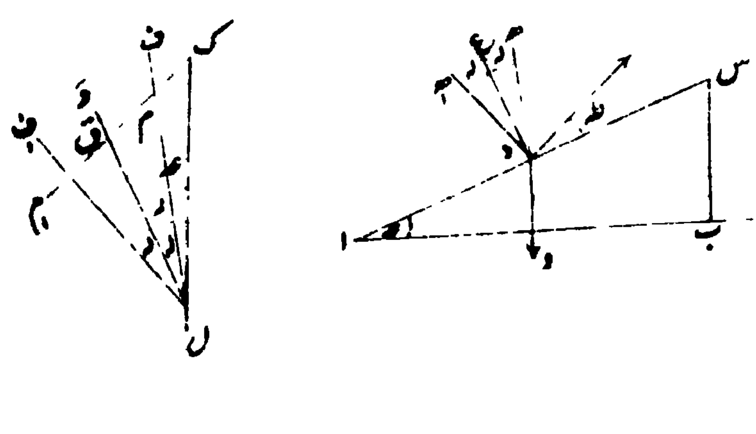
$$\text{و}\,\frac{\text{جب}\,(\text{ع} + \text{لہ})}{\text{جم}\,(\text{ط} - \text{لہ})}$$ اقل ہو۔

یعنی جس وقت جم (ط - لہ) ایک کے برابر ہو

یعنی جس وقت ط = لہ

اس لئے ثابت ہوا کہ جسم کو اوپر کی طرف حرکت دینے والی قوت کی مقدار چھوٹی سے چھوٹی اُس وقت ہوگی جب اس کو ایسی سمت میں لگایا جائے جو سطح مائل کے ساتھ زاویہ فرک کے برابر زاویہ بنائے +

(۱۹۶) دفعہ گذشتہ کے نتائج ہندسی عمل سے اس طرح حاصل ہوسکتے ہیں۔



ایک ایسا خط عمودی ک ل کھینچو جو کسی موزوں پیمانہ کے موافق وزن و کو تعبیر کرے (یعنی ایک انچ فی پونڈ یا ایک انچ فی دس پونڈ)۔ل وَ کو عمودی عمل ع کی سمت کے متوازی کھینچو۔زوایا وَل ف اور وَل ف میں سے ہر ایک کو زاویہ فرک لہ کے برابر بناؤ جیسا کہ شکل میں ہے۔ظاہر ہے کہ وھ اور وھ نقطہ و پر کے حاصل عمل کی سمتیں ہیں اگر جسم بالترتیب نیچے یا اوپر کی طرف حرکت کرنے کو ہو۔ اور ل ف اور ل ف خطوط وھ اور وھ کے بالترتیب متوازی ہیں۔

سہارنیوالی قوت ط کے متوازی خط ک م م کھینچو جو ل ف اور ل ف کو نقاط م اور م پر ملے۔

توازن کی انتہائی صورتوں کے لئے ک ل م اور ک ل م مربعاً قوتوں کے مثلث ہیں۔پس معلوم ہوا کہ جس پیمانہ پر ک ل وزن و کو تعبیر کرتا ہے اسی پیمانہ پر ک م اور ک م دفعہ گزشتہ کی قوتوں ط اور ط کو تعبیر کرتے ہیں +

مربعاً وَل ک = خط اِس اور ع کے درمیانی زاوئے کے = عہ

پس م ل ک = عہ - لہ اور م ل ک = عہ + لہ اسی طرح سے ک ق وَ = ع اور ط کی سمتوں کا درمیانی زاویہ

$= 90^\circ -$ طہ

پس ک ق ل $= 90^\circ +$ طہ، ک م ل $= 90^\circ -$ طہ $+$ لہ

اور ک ل م $= 90^\circ +$ طہ $+$ لہ

اس لئے $\frac{ط}{و} = \frac{ک م}{ک ل} = \frac{جب ک ل م}{جب ک م ل} = \frac{جب (ع - لہ)}{جب (۹۰ + ط + لہ)} = \frac{جب (ع - لہ)}{جم (ط + لہ)}$

اور $\frac{ط_1}{و} = \frac{ک م_1}{ک ل} = \frac{جب ک ل م_1}{جب ک م_1 ل}$

$= \frac{جب (ع + لہ)}{جب (۹۰ + ط - لہ)} = \frac{جب (ع + لہ)}{جم (ط - لہ)}$

نتیجہ صریح۔ ظاہر ہے کہ ک م₁ کا طول اس وقت چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جب یہ ل ف پر عمود ہو یعنی جب ط₁ حاصل عمل د ح کی سمت کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے یعنی جب قوت ط₁ سطح مائل سے زاویہ لہ بنائے +

امثلہ نمبری (۳۱)

(۱) ایک ۴ پونڈ وزنی جسم ایک کھردری افقی سطح پر ساکن ہے سطح کی قدر فرک ۲۵ء ہے تو کم سے کم قوت دریافت کرو جو افقی سمت میں عمل کرنے سے جسم کو ہلاسکے نیز ایسی کم سے کم قوت دریافت کرو جو افق سے زاویہ جم$^{-1}\frac{۴}{۵}$ بنائے اور جسم کو عین ہلاسکنے کے قابل ہو۔ ہر ایک صورت میں حاصل عمل کی سمت اور مقدار دریافت کرو +

(۲) ایک وزنی کندے کا قاعدہ مستوی ہے اور وہ ایک کھردری افقی سطح پر ساکن ہے اس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جو سطح سے زاویہ ۴۵° بناتی ہے۔ اگر قدر فرک ۵ء ہو

اور قوت کو بتدریج بڑہاتے جائیں یہانتک کہ جسم ہلنے لگے تو اس حالت میں قوت کا مقابلہ کنندے کے وزن سے کرو +

(۳) ایک کھردری افقی سطح پر ۳۰ پونڈ مقدار مادہ ساکن ہے اور ایک ۱۰ پونڈ وزن کی افقی قوت اس کو عین ہلانے کے قابل ہے قدر فرک اور سطح کے حاصل عمل کی سمت اور مقدار دریافت کرو +

(۴) ثابت کرو کہ قوت کی کم سے کم مقدار جو ایک وزن و کو ایک کھردری سطح افقی پر ہلاسکے و جب لہ ہے جہاں لہ زاویہ فرک ہے +

(۵) ایک کھردری سطح کا میلان افق سے جب $\frac{12}{13}$ ہے اگر قدر فرک $\frac{1}{4}$ ہوتو ثابت کرو کہ ایسی کم سے کم قوت کی مقدار جو سطح کے متوازی عمل کرے اور سطح پر ایک ہنڈرڈویٹ وزن کو سہارنے کے قابل ہو $\frac{8}{13}$ ۸ پونڈ وزن کے برابر ہے۔ نیز ثابت کرو کہ $\frac{7}{13}$ ۷۷ پونڈ وزنی قوت جسم کو سطح مائل کے اوپر کیطرف ہلانے کے لئے عین کافی ہوگی +

(۶) ایک سطح مائل کا قاعدہ ۴ فٹ اور ارتفاع ۳ فٹ ہے سطح کے متوازی عمل کرنیوالی قوت ایک ۲۰ پونڈ وزن کو نیچے پھسلنے سے عین روک سکتی ہے قدر فرک دریافت کرو +

(۷) ایک ۴ پونڈ وزنی جسم ایک کھردری سطح مائل پر جو افق سے زاویہ ۳۰° بناتی ہے انتہائی توازن میں ہے۔ اگر سطح کا میلان ۶۰° کردیا جائے تو سطح کے متوازی عمل کرنیوالی ایسی

قوت دریافت کرو جو جسم کو سہارے رکھے +

(۸) ایک کھردری سطح مائل کا ارتفاع اس کے طول کا $\frac{۳}{۵}$ ہے اور ایک ۳۰ پونڈ وزن اس پر عین ساکن رہ سکتا ہے ثابت کرو کہ اس کو سطح کے اوپر کیطرف عین ہلانے کے لئے ۳۶ پونڈ وزنی قوت کی ضرورت ہوگی +

(۹) ایک کھردری سطح مائل پر ایک ۶۰ پونڈ وزنی جسم رکھا ہے اگر سطح کے متوازی ۲۴ پونڈ وزنی قوت عمل کرے تو جسم نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہوتا ہے اور ایک ۳۶ پونڈ وزنی قوت سطح کے متوازی جسم کو اوپر کیطرف حرکت دینے کے لئے عین کافی ہے تو فرک کی قدر دریافت کرو +

(۱۰) دو مائل سطحوں کا ایک مشترک راس ہے اور راس پر ایک چھوٹی چکنی چرخی لگی ہوئی ہے۔ چرخی پر سے ایک رسی گزرتی ہے جو اپنے سروں پر دو مساوی اوزان کو سہارتی ہے اگر ایک سطح کھردری ہو اور دوسری چکنی تو دونوں سطحوں کے زوایاء میلان دریافت کرو۔ جبکہ اس حالت میں چکنی سطح پر کا وزن عین نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہو +

(۱۱) ایک کھردری سطح مائل پر ایک ثابت چرخی ہے اس پر سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے سروں سے دو غیرمساوی اوزان بند ہے ہیں سطح کا بڑے سے بڑا میلان دریافت کرو جس پر کہ توازن قائم رہ سکے +

(۱۲) دو مائل سطحیں یکساں کھردری ہیں اور ان کو ایک دوسرے

کے ساتھ اس طرح پشت بہ پشت رکھدیا گیا ہے کہ ان کا ارتفاع ایک ہی ہے سطحوں کی چوٹی پر سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہیں اگر سطحوں کے زاوئے بالترتیب ۳۰° اور ۶۰° ہوں تو ثابت کرو کہ اوزان عین حرکت کرنے کو ہوں گے اگر فرک کی قدر ۲-۳۷ ہو +

(۱۳) ایک کھردرے کرے کی بیرونی سطح پر ایک ذرہ رکھا گیا ہے سطح کی قدر فرک ر ہے ثابت کرو کہ جب ذرے اور کرہ کے مرکز کو ملانیوالا نصف قطر خط راس سے زاویہ مس$^{-1}$ ر بنائے گا تو ذرہ عین پھسلنے کو ہوگا +

(۱۴) ایک مجوف کرہ کا نصف قطر ا اور قدر فرک $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے معلوم کرو کہ اس کے اندر کس بلندی پر ایک ذرہ ساکن رہ سکتا ہے +

(۱۵) بتاؤ کہ ایک بے پہیہ گاڑی کو کس زاویہ میلان پر رسے باندھے جائیں کہ ایک پہاڑی پر کھینچکر چڑھانے میں کم سے کم زور لگے +

(۱۶) ایک مکعب پتھر کا وزن ۵۰ ہنڈرڈویٹ ہے اس کو ایک کھردری سطح افقی پر ایک قوت ط کے ذریعہ جو افق سے زاویہ ۳۰° بناتی ہے کھینچنا منظور ہے اگر زاویہ فرک ۲۵° ہو تو عمل ترسیمی سے ط کی چھوٹی سی چھوٹی قیمت دریافت کرو +

(۱۷) ایک سطح مائل کا زاویہ میلان ۲۵° ہے اس پر ایک ہنڈرڈویٹ وزنی جسم ہے جس کو ایک ۱۵ پونڈ وزنی قوت

جو سطح کے اوپر کی طرف عمل کرتی ہے نیچے پھسلنے سے روکے ہوئے ہے عمل ترسیمی سے اس قوت کی مقدار دریافت کرو جو اس کو اوپر کیطرف کھینچنے کے لئے عین کافی ہو اور قدر فرک بھی معلوم کرو +

(۱۹۷) ایک کھردری سطح مائل پر ایک جسم ساکن ہے اس کو سطح کے اوپر کی طرف کھینچنے میں جتنا کام کیا جائے اسکی مقدار معلوم کرو۔

دفعہ نمبر ۱۹۴ صورت دوم سے ہم کو معلوم ہے کہ قوت ط جو ایک جسم کو سطح کے اوپر کیطرف حرکت دینے کیلئے عین کافی ہے۔ و (جب ع + ر جم ع) ہے۔

اس لئے جسم کو ا سے ج تک کھینچنے میں کام کی مقدار

= ط × ا ج (شکل دفعہ ۱۵۶)

= و (جب ع + ر جم ع) × ا ج

= و × ا ج جب ع + ر و × ا ج جم ع

= و × ب ج + ر و × ا ب

= اس کام کی مقدار جو جسم کو اسی عمودی ارتفاع تک بغیر وساطت سطح مائل کے کھینچنے میں کیا جائے

+ اس کام کی مقدار جو جسم کو ایک ایسے افقی فاصلے میں کھینچنے سے کیا جائے جو سطح مائل کے قاعدہ کے برابر ہو اور جس کا کھردراپن بھی وہی ہو جو سطح مائل کا ہے +

(۱۹۸) دفعہ گزشتہ سے ظاہر ہے کہ اگر سطح مائل کھردری ہو تو جو کام زور کرتا ہے وہ اس کام سے زیادہ ہوتا ہے جو

بوجھ کے مقابل کیا جائے اور یہ بات ہر ایک کل کیلئے
صحیح ہے اس اصول کو ہم اس طرح بیان کرسکتے ہیں
کسی مشین یا کل میں جو کام زور کرتا ہے اس کی مقدار
مفصلہ ذیل کاموں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے
(۱) وہ کام جو بوجھ کے مقابل کیا جائے (۲) وہ کام
جو کل کی فرکی مزاحمتوں پر غالب آنے میں کیا جائے
(۳) وہ کام جو مشین یا کل کے اجزائے ترکیبی کے اوزان
کے مقابل کیا جائے +
کسی مشین میں بوجھ پر جو کام کیا جائے اس کی مقدار کو جو نسبت اس
تمام کام سے ہو جو زور کو کرنا پڑتا ہے اس کو کل کی قابلیت کہتے ہیں پس

$$\text{قابلیت} = \frac{\text{مفید کام جو کل نے کیا}}{\text{کل کام جو کل پر کیا گیا}}$$

اگر فرک نہ ہو تو فرض کرو کہ زور طِ لگتا ہے اور فرض کرو فی الواقع
زور ط لگانا پڑتا ہے۔ کام کی مقدار جو وزن کے مقابل کیا گیا ہو
= طِ × وہ فاصلہ جو اس کا نقطۂ عمل طے کرتا ہو +
اور کل کام جو کل کے چلانے میں کیا جاتا ہے۔
= ط × وہ فاصلہ جو اس کا نقطۂ عمل طے کرتا ہے +
اس لئے تقسیم سے

$$\text{قابلیت} = \frac{\text{طِ}}{\text{ط}} = \frac{\text{زور جب فرک نہ ہو}}{\text{اصلی زور}}$$

کوئی کل بلا وزن نہیں ہوسکتی اور نہ ہم اس کی فرکی مزاحمتوں کو

ساقط کرسکتے ہیں۔اس سے ظاہر ہے کہ کام کی کچھ نہ کچھ مقدار ضروران دو وجوہ کے باعث ضائع ہوگی اس لئے ایک کل کی قابلیت کبھی ایک کے برابر نہیں ہوسکتی اور ایک کے جتنی قریب یہ قابلیت پہنچ جائے گی اتنی ہی مفید اور اچھی کل ہوگی۔ایسی کوئی کل نہیں ہے جس کے ذریعہ ہم کام پیدا کرسکیں اور عملاً خواہ کتنی چکنی اور کامل مشین ہو اس میں کام کا ہمیشہ نقصان ہوگا۔مشین یا کل کا صرف یہ فائدہ ہے کہ جو قوت ہم لگاتے ہیں اس کی مقدار کل کی وساطت سے بڑھ جاتی ہے لیکن ساتھ ہی وہ فاصلہ جس میں قوت کو کام کرنا پڑتا ہے نسبتاً بڑھ جاتا ہے +

(۱۹۹) کھردرے پیچ کا توازن

ایک پیچ کی صورت میں جب فرک کا لحاظ کیا جائے زور اور مزاحمت کا باہمی تعلق دریافت کرو +



ہم دفعہ ۱۷۸ کا طریق کتابت استعمال کریں گے فرض کرو کہ پیچ نیچے کیطرف حرکت کرنے کو ہے یعنی اس صورت میں فرک اوپر کی طرف چوڑی کی سمت میں عمل کرتی ہے (بموجب دفعہ ۱۷۶ اس کی تراش مستطیلی ہے) اس صورت میں جوف کے عمودی دباؤ

ع (جم عہ + ر جب عہ) ماس (جم عہ + ر جب عہ)^۲ ...... ہیں

اوران دباؤں کے افقی اجزائے ترکیبی ع (جب عہ۔ ر جم عہ)^۲ س (جب عہ۔ ر جم عہ) ہیں

اس لئے دفعہ ۱۷۰ کی معادلات (۱) اور (۲) کی صورت یہ ہوگی

$$\text{و} = (\text{ع} + \text{س} + \text{ت} + \ldots)(\text{جم عہ} + \text{ر جب عہ}) \ldots\ldots (1)$$

$$\text{اور}\quad \text{ط} \times \text{ب} = \text{ا}\,(\text{ع} + \text{س} + \text{ت} + \ldots)(\text{جم عہ} - \text{ر جب عہ}) \ldots (2)$$

اس لئے تقسیم سے

$$\frac{\text{ط} \times \text{ب}}{\text{و}} = \text{ا}\,\frac{\text{جب عہ} - \text{ر جم عہ}}{\text{جم عہ} + \text{ر جب عہ}} = \text{ا}\,\frac{\text{جب عہ جم لہ} - \text{جم عہ جب لہ}}{\text{جم عہ جم لہ} + \text{جب عہ جب لہ}} = \text{ا}\,\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{لہ})}{\text{جم}\,(\text{عہ} - \text{لہ})}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{و}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{مس}\,(\text{عہ} - \text{لہ})$$

اسی طرح سے اگر پیچ اوپر کیطرف حرکت کرنیکو ہوتو ر کی علامت بدلنے سے

$$\frac{\text{ط}_1}{\text{و}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\frac{\text{جب عہ} + \text{ر جم عہ}}{\text{جم عہ} - \text{ر جب عہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{مس}\,(\text{عہ} + \text{لہ})$$

اگر زور کی کوئی قیمت ط اور ط_1 کے درمیان ہوتو پیچ متوازن ہوگا لیکن فرک انتہائی نہیں ہوگی +

یاد رہے کہ اگر پیچ کا زاویہ عہ زاویہ فرک لہ کے برابر ہو تو زور ط کی قیمت صفر ہوگی اس صورت میں پیچ صرف اس فرک کے سہارے متوازن ہوگا جو پیچ کی چوڑی کی سمت میں عمل کرتی ہے اگر عہ < لہ تو ط منفی ہوگا یعنی پیچ نیچے نہیں اتریگا جبتک کہ اس کو اوپر سے دبایا نہ جائے

مثال (۱) ایک پیچ کا محیط ۲ انچ ہے اور اس کی گھائی $\frac{1}{2}$ انچ ہے قدر فرک $\frac{1}{5}$ ہے اگر پیچ پر ۱ ہنڈرڈ ویٹ وزن رکھا جائے اور اس حالت میں پیچ متوازن ہوتو وہ حدود دریافت کرو جن کے درمیان زور کو لازماً واقع ہونا چاہئیے زور کا بازو ۱۲ انچ ہے

اس صورت میں ۲π ا = ۲ اور ۲π ا مس ع = $\frac{۱}{۴}$

∴ ا = $\frac{۱}{\pi}$ اور مس ع = $\frac{۱}{۴}$

نیز مس ل = $\frac{۱}{۵}$ اور ب = ۱۲

اس لئے وہ قوت جو پیچ کو عین سہار سکے

= ۱۱۲ × $\frac{۱}{ب}$ مس (ع − ل)

= ۱۱۲ × $\frac{۱}{\pi ۱۲}$ × $\frac{\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۴} + ۱}$ = $\frac{۱۱۲}{\pi ۱۲}$ × $\frac{۱}{۲۱}$

= $\frac{۱۴}{۹۹}$ پونڈ وزن = ۱۴۱ء پونڈ وزن

نیز وہ قوت جو پیچ کو اوپر کیطرف عین حرکت دے سکے

= ۱۱۲ × $\frac{۱}{ب}$ مس (ع + ل) = $\frac{۱۱۲}{\pi ۱۲}$ × $\frac{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۴} - ۱}$

= $\frac{۱۱۲}{\pi ۱۲}$ × $\frac{۹}{۱۹}$ = ۱ $\frac{۸۵}{۲۰۹}$ پونڈ وزن

= ۱ء۴۰۶۷ پونڈ وزن

پس پیچ متوازن ہوگا اگر زور ۱۴۱ء اور ۱ء۴۰۶۷ پونڈ وزن کے درمیان واقع ہو

اگر پیچ چکنا ہوتو قوت مطلوبہ یہہ ہوگی

۱۱۲ × $\frac{۱}{ب}$ مس ع = $\frac{۱۱۲}{\pi ۱۲}$ × $\frac{۱}{۴}$

= $\frac{۴۹}{۶۶}$ = ۷۴۲ء پونڈ وزن

اس لئے قابلیت بموجب دفعہ ۱۹۸

= $\frac{۷۴۲ء}{۱ء۴۰۶۷}$ = ۵۲۷ء

مثال ۲- لوہے کی قدر فرک لکڑی پر ۱۵ء ہے اگر ایک پیچ صرف اپنے وزن کے زیر عمل ایک لکڑی کے تیار کردہ جوف میں پھسل سکے تو ثابت کرو کہ اس کی چوڑی کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ میلان مس$^{-۱}$ $\frac{۳}{۲۰}$ ہوگا +

مثال ۳۔ اگر ایک پیچ کا محیط $\frac{۳}{۴}$ انچ ہو قدر فرک ۱۵، زور کے بازو کا طول ۱۲ انچ ہو اور اگر ایک انچ میں تین چوڑیاں ہوں تو بالترتیب وہ قوتیں دریافت کرو جو پیچ کو عین سہار سکیں اور عین ہلا سکیں جبکہ اس پر ایک وزن و رکھا ہوا ہو نیز جب پیچ چکنا ہو تو زور کی مقدار دریافت کرو اس سے پیچ کی قابلیت معلوم کرو۔ جواب $\frac{و}{۲۱۶}$ (۷۰۰۰)، $\frac{و}{۲۱۶}$ (۵۸۳۰۰)، $\frac{و}{۲۱۶}$ (۲۰۰۰)، ۷۷،۵

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ ایک پیچ کی قابلیت اسوقت بڑی سی بڑی ہوگی جب اس کا زاویہ $۴۵^\circ - \frac{لہ}{۲}$ ہو

جب قوت فرک عمل کرتی ہو تو وزن و کو اٹھانیکے لئے قوت مطلوبہ

$$= و \frac{ا}{پ} \text{ مس } (عہ + لہ)$$

اور جب فرک عمل نہ کرے تو قوت

$$= و \frac{ا}{پ} \text{ مس } عہ$$

بموجب دفعہ ۱۹۸ قابلیت **ق**

= ان دونوں کی نسبت

$$= \frac{\text{مس } عہ}{\text{مس } (عہ+لہ)} = \frac{\text{جب } عہ \text{ جم } (عہ + لہ)}{\text{جم } عہ \text{ جب } (عہ + لہ)}$$

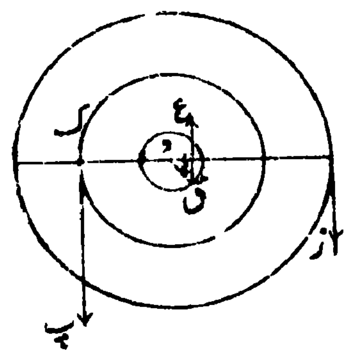
$$\therefore ۱ - ق = ۱ - \frac{\text{جب } عہ \text{ جم } (عہ+لہ)}{\text{جم } عہ \text{ جب } (عہ + لہ)} = \frac{\text{جب } لہ}{\text{جم } عہ \text{ جب } (عہ+لہ)} = \frac{\text{۲ جب } لہ}{\text{جب } (۲عہ + لہ) + \text{جب } لہ}$$

$\therefore$ ق بڑے سے بڑا اسوقت ہوگا جب ۱ - ق چھوٹے سے چھوٹا ہو۔

یعنی جس وقت جب (۲ عہ + لہ) بڑی سے بڑی ہو۔

یعنی جس وقت ۲ عہ + لہ = ۹۰° اور اس وقت عہ = $۴۵^\circ - \frac{لہ}{۲}$

(۲۰۰) چرخ اور محور جس میں محور کے سرے کھردرے سہاروں پہ رکھے ہوں +



فرض کرو کہ سب سے اندر کا دائرہ شکل دفعہ ۱۵۹ میں محور کے سروں ا اور ب کو بڑے پیانہ پر اس صورت میں تعبیر کرتا ہے جبکہ ان کو اطراف سے دیکھا جائے محور کے سروں اور سہاروں کے درمیان جو حاصل عل ہے وہ لازماً سمت راس میں ہوگا کیونکہ یہ ز اور پ کو متوازن رکھتا ہے۔ جہاں ز زور ہے اور پ بوجھ ہے +
نیز اگرہم یہ فرض کریں کہ ز بوجھ پر عین غالب آنیکو ہے تو ظاہر ہے کہ یہ حاصل عل نقطہ تماس ق پر عمود کے ساتھ زاویہ فرک لہ بنائیگا۔ اس سے معلوم ہوا کہ ق چول کے سب سے نچلے نقطہ پہ منطبق نہیں ہوسکتا لیکن ضرور ہے کہ اس کا وہ مقام ہو جو شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی و ق خط راس سے زاویہ لہ

بناتا ہے پس ق پر کا حاصل عمل سمت راس میں عمل کرتا ہے +
چونکہ ع، ز، پ متوازن ہیں اس لئے

ع = ز + پ ....(۱)

نیز نقطہ و کے گرد معیار لینے سے

ز × چ - ح × ج جب لہ = پ × م ....(۲)

جہاں ج چول کا نصف قطر ہے اور چ اور م چرخ اور محور کے نصف قطر ہیں۔ (۱) اور (۲) کو حل کرنے سے

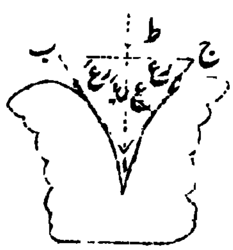
ز = (م + ج جب لہ) / (چ - ج جب لہ) × پ

اگر ز صرف بوجھ پ کو سہارنے کیلئے کافی ہو یعنی اگر شین سمت ا میں حرکت کرنے کو ہو تو لہ کی علامت بدلنے سے

ز = (م - ج جب لہ) / (چ + ج جب لہ) × پ

اس صورت میں نقطہ تماس ق اس خط راس کی بائیں طرف واقع ہے جو نقطہ و میں سے گزرتا ہے +

(۲۰۱) فانہ۔ ایک لوہے یا دھات کا ٹکڑا ہوتا ہے اس کے دو مستوی رخ ہوتے ہیں جن کے ملنے سے ایک تیز دھار پیدا ہوتی ہے یہ لکڑی یا دیگر سخت اشیا کے پھاڑنے میں کام آتا ہے۔ سب سے پہلے اس کی دھار لکڑی کے ایک



شگاف کے اندر داخل کردی جاتی ہے پھر اس کو تھوڑے کی ضربوں سے سارا اندر داخل کردیا جاتا ہے اس طرح سے لکڑی پھٹ جاتی ہے +

فانہ کے عمل کی تحقیق دراصل علم حرکت کے متعلق ہے +

اس جگہ ہم صرف اس سکونی صورت پر غور کریں گے جبکہ ایک مستقل قوت جو فانہ کی اوپر کی سطح پر عمل کرتی ہو اسکو توازن میں رکھے۔ فرض کرو کہ اب ج فانے کی ایک تراش ہے اور فرض کرو کہ اس کے دونوں رخ قاعدہ ب ج سے مساوی زاویے بناتے ہیں نیز فرض کرو کہ زاویہ ج ا ب = عہ

فرض کرو کہ فانے کے سرپر قوت ط عمل کرتی ہے ع اور عَ لکڑی کے تعامل ان نقاط پر ہیں جہاں فانہ لکڑی کو مس کرتا ہے اور ر ع اور ر عَ رگڑ کی قوتیں ہیں یہ بات بھی ہم فرض کرتے ہیں کہ فانہ قوتوں کے زیر عمل نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہے +

ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ قوت ط خط ب ج کے نقطۂ وسط پر اس کی عمودی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس لئے زاویہ ب ا ج کی تنصیف کرتی ہے ب ج کی سمت میں اور ب ج کی عمودی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے۔

ر ع جب $\frac{عہ}{۲}$ - ع جم $\frac{عہ}{۲}$ = ر عَ جب $\frac{عہ}{۲}$ - عَ جم $\frac{عہ}{۲}$ ......(۱)

اور ط = ر (ع + عَ) جم $\frac{عہ}{۲}$ + (ع + عَ) جب $\frac{عہ}{۲}$ ....(۲)

مساوات (۱) سے حاصل ہوگا کہ ع = عَ اور پھر اس

تعلق کو مساوات (۲) میں استعمال کرنے سے حاصل ہوگا کہ

$$ط = ۲ ع (ر جم \frac{عہ}{۲} + جب \frac{عہ}{۲})$$

اس لئے

$$\frac{۲ع}{ط} = \frac{۱}{ر جم \frac{عہ}{۲} + جب \frac{عہ}{۲}} = \frac{جم لہ}{جب \frac{عہ}{۲} جم لہ + جم \frac{عہ}{۲} جب لہ} = \frac{جم لہ}{جب (\frac{عہ}{۲} + لہ)}$$

جہاں لہ زاویہ فرک ہے +

فانے میں جو پھاڑنے کی قوت ہے اس کا اندازہ ع سے ہوتا ہے۔ایک قوت معلومہ ط کیلئے اس پھاڑنے والی قوت کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب عہ چھوٹے سے چھوٹا ہو۔نظراً ایسی صورت صرف اسوقت پیدا ہوگی جب عہ صفر کے برابر ہو لیکن اسوقت فانہ نہایت کمزور ہوگا۔عملاً پھاڑنے کی قوت اس حالت میں زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے جب زاویہ اتنا چھوٹا ہوکہ فانہ کی مضبوطی پر اثر نہ پڑے

(۲۰۲) اگر فانے اور لکڑی میں فرک نہ ہو (اگرچہ عملی حالتوں میں یہہ کبھی نہیں ہوسکتا) تو اس صورت میں لہ = ۰ اوراس لئے

$$\frac{۲ع}{ط} = \frac{۱}{جب \frac{عہ}{۲}} = قم \frac{عہ}{۲}$$

(۲۰۳) اگر لکڑی کے دباؤ کی قوت فانے پر کافی ہو تو ممکن ہے کہ قوت ط فانے کو نیچے کیطرف حرکت نہ دیسکے بلکہ فانہ دباؤ کے زور سے باہر نکل جائے +

اگر ط کی قیمت اس صورت میں طَ ہو تو اس کی قیمت دفعہ ۲۰۱ میں ر کی علامت بدل دینے سے حاصل ہوسکتی ہے

یعنی $ط_۱ = ۲ع \left(جب \frac{ع}{۲} - ر\, جم \frac{ع}{۲}\right) = ۲ع \frac{جب\left(\frac{ع}{۲} - لہ\right)}{جم\, لہ}$

اگر $\frac{ع}{۲} > لہ$ تو $ط_۱$ کی قیمت مثبت ہوگی اگر $\frac{ع}{۲} < لہ$ تو $ط_۱$ منفی ہوگی اور فانہ صرف اسوقت باہر نکلنے کو ہوگا جبکہ ایک قوت اس کو اوپر کی طرف کھینچے +

اگر $\frac{ع}{۲} = لہ$ تو بغیر کسی بیرونی قوت کے فانہ ٹھیک پھنسا رہیگا +

مثال۔ ایک شکنجے کی متصل چوڑیوں کا فاصلہ ج ہے اس میں قوت ایک سلاخ کے سروں پر لگائی جاتی ہے جس کا طول ۲ ب ہے۔ثابت کرو کہ اس شکنجے کی صورت میں جو مشینی مفاد حاصل ہوتا ہے وہ ایک متساوی الساقین فانے کے مفاد کے برابر ہوگا اگر

$$جب \frac{ع}{۲} = ج \div ۴\pi ب$$

(۴۰۴) عملی طور پر مشینوں کے چلانے میں فرک کا اثر ایک ایسا جزو اعظم ہے کہ ہماری نظری تحقیقات اتنی کارآمد نہیں ہوتی۔کسی خاص مشین میں نتائج مطلوبہ کو تجربہ سے حاصل کرنا چاہیئے۔تمام قسم کی مشینوں کیلئے ترکیب عمل ایک ہی ہے۔ رفتاری نسبت تجربہ سے حاصل ہوسکتی ہے کیونکہ تمام کلوں میں اس کی قیمت ایک ایسی کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ تو وہ فاصلہ ہے جو زور طے کرے اور جس کا نسب نماء وہ فاصلہ ہے جو بوجھ یا مزاحمت طے کرے۔ فرض کرو کہ یہ کسر ن ہے

فرض کرو کہ وزن و ایک کل کے ذریعہ اٹھایا گیا ہے۔اگر رگڑ نہ ہوتو نظراً زور $\frac{و}{ن}$ کے برابر ہوگا۔اب تجربہ سے اصلی زور ط کی قیمت دریافت کرو جو وزن و کو ٹھیک اٹھا سکے۔کل کا اصلی مشینی مفاد $\frac{و}{ط}$ ہے اور اس کی قابلیت بموجب دفعہ ۱۹۸ $\frac{ط_1}{ط}$ ہے قابلیت اور رفتاری نسبت کا حاصل ضرب

$$= \frac{ط_1}{ط} \times \frac{و}{ط_1} = \frac{و}{ط} = \text{مشینی مفاد}$$

(۲۰۵) ہم ایک چھوٹے تفریقی چرخ اور محور کی مثال دیتے ہیں جس پر چند تجربے کئے گئے تھے۔کل اچھی حالت میں نہیں تھی اور استعمال سے پہلے بخوبی صاف نہیں کی گئی تھی نیز اس کے اور اس کی چرخی کے پرزوں کو تجربہ سے قبل تیل نہیں دیا گیا تھا۔

دفعہ ۱۶۴ کے طریق کتابت کے موافق مَ، ج، م کی قیمتیں بالترتیب $۱\frac{۱}{۲}$، ۳، $۶\frac{۳}{۴}$ انچ تھیں پس رفتاری نسبت ن

$$= \frac{۲ ج}{م - مَ} = \frac{۶\frac{۳}{۴} \times ۲}{۳ - ۱\frac{۱}{۲}} = ۹$$

یہ قیمت بذریعہ تجربہ بھی تصدیق کی گئی تھی کیونکہ ہم نے دیکھا تھا کہ اگر و ایک انچ اوپر اٹھے تو ط نو انچ نیچے جاتا ہے۔ ط کا اندازہ ہم نے اوزان سے کیا تھا جو ایک پلڑے میں رکھے گئے تھے اور جن کا وزن ط میں شامل تھا اسی طرح سے و کے وزن کا اندازہ کیا گیا تھا۔

اس چرخی کا وزن بھی جس سے وزن و لٹکایا گیا تھا وزن و میں شامل تھا۔

ا اور و کی مطابق قیمتیں گراموں کے وزنوں میں جدول ذیل
ں مندرج ہیں ط کی قیمت ایسی تھی جو وزن و پر ٹھیک
لب آنے کے لئے کافی ہو تیسرے خانے میں طَ کی مطابق
تیں دی ہوئی ہیں یعنی اس خانہ میں مطابق زوروں کی وہ
بتیں مندرج ہیں جو فرک کے معدوم ہونیکی صورتمیں مطلوب ہوں

و	ط	طَ = و/ن	ق = طَ/ط	ف = و/ط
۵۰	۲۸	۵٫۵۵	٫۲	۱٫۷۹
۱۰۰	۳۶	۱۱٫۱۱	٫۳۱	۲٫۷۸
۱۵۰	۴۵	۱۶٫۶۷	٫۳۷	۳٫۳
۲۵۰	۶۰	۲۷٫۷۸	٫۴۶	۴٫۱۷
۴۵۰	۹۰	۵۰	٫۵۶	۵
۶۵۰	۱۱۹	۷۲٫۲۲	٫۶۱	۵٫۴۶
۸۵۰	۱۴۷	۹۴٫۴۴	٫۶۴	۵٫۷۸
۱۰۵۰	۱۷۵	۱۱۶٫۶۷	٫۶۷	۶
۱۲۵۰	۲۰۳	۱۳۸٫۸۸	٫۶۸	۶٫۱۶
۱۴۵۰	۲۳۲	۱۶۱٫۱۱	٫۶۹۴	۶٫۲۵

وتھے خانہ میں قابلیت ق اور آخری خانہ میں مشینی مفاد
ف کی قیمتیں مندرج ہیں ؎

یک مربع دار کاغذ پر طالب علم کو نتائج مندرجہ بالا کی ترسیم
نی چاہیئے۔ ایسا کرنے سے معلوم ہوگا کہ ط کے سب نقاط
ریباً ایک خطہ مستقیم پر واقع ہیں جو مندرجہ بالا میں سے تیسرے

اور آخری نقطے میں سے گزرتا ہے اس لئے موافق مسائل ترسیمات
ط اور و کے باہمی تعلق کی صورت یہ ہوگی ط = ا و + ب
جہاں ا اور ب مقادیر مستقل ہیں۔
نیز ط = ۴۵، جب و = ۱۵۰ اور ط = ۲۳۲، جب و = ۱۴۵۰
∴ ۴۵ = ۱۵۰ ا + ب اور ۲۳۲ = ۱۴۵۰ ا + ب
اس کو حل کرنے سے ا = ۱۴۴ء، اور ب = ۴ء۲۳ تقریباً

پس ط = ۱۴۴ء × و + ۴ء۲۳

اس کو مشینی قانون کہتے ہیں +

نیز طِ = ۱/۹ و = ۱۱۱ء × و

اس لئے ق = طِ/ط = (۱۱۱ء × و) / (۴ء۲۳ + و × ۱۴۴ء)

اور ف = و/ط = و / (۴ء۲۳ + و × ۱۴۴ء)

اگر و کی قیمت معلوم ہو تو ان مساواتوں سے ق اور ف کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں۔ و کے بڑھنے سے ق اور ف کی قیمتیں بڑھتی ہیں اگر فرض کرلیا جائے کہ ق کی قیمت بالا و کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے تو اس کی بڑی سی بڑی قیمت اسوقت ہوگی جب و لاانتہا بڑا ہو +

اس وقت ق = ۱۱۱ء/۱۴۴ء = ۷۷ء تقریباً

پس اس کل میں کم ازکم ۲۳ فی صدی کام ضائع ہوتا ہے +
اس کے مطابق مشینی مفاد کی بڑی سے بڑی قیمت = ۱/۱۴۴ء = ۷ تقریباً
اگر تجربہ سے پیشتر کل خوب صاف اور چکنی ہوتی تو اس سے بہتر نتائج حاصل ہوسکتے تھے +

(۲۰۶) جیسا کہ دفعہ گذشتہ کی مثال میں ہم نے دیکھا ہر ایک کل کی اصلی قابلیت ایک سے کہیں کم ہوتی ہے۔ لیکن جن کلوں کی قابلیت متقابلۃً کم ہو ان کے استعمال میں بالعموم ایک عملی فائدہ ہوتا ہے۔

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر کسی کل میں زور کی مقدار کا فرک پر کوئی اثر نہ ہو تو جب زور نہ لگایا جائے تو بوجھ خود بخود نیچے نہیں گرجاتا بشرطیکہ کل کی قابلیت $\frac{1}{2}$ سے کم ہو۔ایسی کلوں کی مثالیں حسب ذیل ہیں: پیچ جس کی گھائی چھوٹی ہو اور جس پر زور سمت افقی میں عمل کرے جیسا دفعہ ۱۸۹ میں۔ اور ایک ایسی سطح مائل جس میں زور سطح کے اوپر کی طرف عمل کرے جیسا دفعہ ۱۹۴ میں۔ جن کلوں میں فرک اس زور پر منحصر ہوتی ہے جو کل کو چلانے کے لئے لگایا جانے ان میں کوئی عام قاعدہ نظری طور پر ثابت نہیں ہو سکتا۔ ایسی حالتوں میں ہر ایک صورت جداگانہ غور طلب ہوتی ہے لیکن اس بات کو بطور ایک عام اصول کے مان لینا چاہئے کہ جب کسی مشین میں زور کا اثر مقدار فرک پر متقابلۃً کم ہو تو بوجھ خود بخود نیچے کی طرف حرکت نہیں کرے گا بشرطیکہ قابلیت $\frac{1}{2}$ سے کم ہو۔ ایسی کل کی بابت کہتے ہیں کہ وہ نہیں الٹتی۔ مثلاً تفریقی چرخی (دفعہ ۱۶۵) کو بالعموم اس طرح بناتے ہیں کہ قابلیت $\frac{1}{2}$ سے کم ہو اور جب چرخی پر کوئی قوت

نہ عمل کرے یعنی جب کل کی زنجیر کو ہاتھ سے چھوڑ دیا جائے
تو بوجھ نیچے کی طرف خود بخود حرکت نہیں کرسکتا۔
کل کی یہ خاصیت کہ وہ بآسانی نہیں الٹ جاتی ایک بڑی حد تک اسکی مقابلۃً کم قابلیت کی تلافی کر دیتی ہے۔ چرخ و محور میں بالعموم مشینی مفاد بہت بڑا ہوتا ہے اور قابلیت بھی ½ سے بہت زیادہ ہوتی ہے لیکن اس بات کے لحاظ سے کہ یہ آسانی سے الٹ جاتا ہے یہ بعض صورتوں میں تفریقی چرخی سے زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔
جس طالب علم کو کلوں کے عملی طور پر چلنے چلانے کی مزید واقفیت کی ضرورت ہو اسے عملی جر ثقیل مصنفہ مسٹر رابرٹ بال یا اسی مضمون کی اور کتابیں پڑھنی چاہئیں +

امثلہ نمبری (۳۲)

(۱) ایک کھردری سطح مائل کا ارتفاع ۳ فٹ اور قاعدہ ۴ فٹ ہے اور اگر قدر فرک $\frac{2}{15}$ ہو تو معلوم کرو کہ ۶ ہنڈرڈ ویٹ بوجھ کو سطح کے اوپر کھینچنے میں کتنا کام کرنا پڑے گا؟
(۲) ایک کھردری سطح مائل کا میلان ۳۰° اور قدر فرک $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے اگر ایک ۱۰ ٹن وزن سطح مائل کے اوپر کی طرف ۳۳۰ فٹ آدھ گھنٹہ میں کھینچا جائے تو صرف شدہ کام کی مقدار دریافت کرو۔ نیز اس انجن کی اسپی طاقت دریافت کرو جو یہ کام کرسکتا ہے
(۳) ایک تالاب ۲۴ فٹ لمبا ۱۲ فٹ چوڑا اور ۱۶ فٹ گہرا ہے

اس کو ایک کنوئیں کے پانی سے بھرا گیا ہے جس کی سطح تالاب کی چوٹی سے ہمیشہ ۸۰ فٹ نیچی رہتی ہے۔تالاب کو بھرنے میں جتنا کام کیا گیا ہو اس کی مقدار معلوم کرو۔نیز اس انجن کی اسپی طاقت دریافت کرو جس کی قابلیت ۵ء ہو اور جو تالاب کو ۴ گھنٹے میں بھر دے۔

(۴) ایک بھاپ انجن کے گول فشارہ کا قطر ۶۰ انچ ہے اور وہ ایک منٹ میں ۱۱ دھکے لگاتا ہے ہرایک دھکے کا طول ۸ فٹ ہے اور فشارہ کے ایک مربع انچ پر اوسط دباؤ ۱۵ پونڈ ہے۔اگر انجن کی قابلیت ۶۵ء ہو اور یہ فرض کرلیا جائے کہ انجن کا کام ضائع نہیں ہوتا تو معلوم کرو کہ انجن ایک گھنٹے میں ۳۰۰ فٹ گہرے کنوئیں سے کتنے مکعب فٹ پانی نکال سکیگا؟

(۵) ایک انجن کے فشارہ کا قطر ۸۰ انچ ہے اور اوسط دباؤ فی مربع انچ ۱۲ پونڈ ہے۔دھکے کا طول ۱۰ فٹ اور دوہرے دھکوں کی تعداد فی منٹ ۱۱ ہے۔انجن ایک ۵۰۰ فیدم گہرے کنوئیں سے ایک منٹ میں $\frac{1}{2}$ ۴۲ مکعب فٹ پانی نکالتا ہے۔ثابت کرو کہ اس کی قابلیت تقریباً ۶ء ہے۔

(۶) ایک چرخ اور محور کے نصف قطر بالترتیب ۴ فٹ اور ۶ انچ ہیں اگر ۲۰۰ پونڈ مزاحمت پر غالب آنے کے لئے ۵۶ پونڈ وزنی قوت کی ضرورت ہو تو مشین کی قابلیت دریافت کرو۔

(۷) چرخیوں کے دوسرے نظام کے ساتھ تجربے کرتے وقت

یہ دیکھا گیا کہ جب اوزان ۱۰، ۸۰ اور ۱۶۰ پونڈ اٹھائے جائیں تو زور کی مطابق قیمتیں ۲۳ ، ۵۸ اور ۸۵ پونڈ ہوتی ہیں اگر کل کی رفتاری نسبت ۴ ہو تو ہر ایک صورت میں مشین کی قابلیت دریافت کرو۔

(۸) ایک خاص مشین میں یہ تجربہ کیا گیا ہے کہ ۱۲ اور ۱۵، ، وزنی قوتوں کے ساتھ ہم بالترتیب ۷۰۰ اور ۳۰۰ پونڈ مزاحمتوں پر غالب آسکتے ہیں اگر فرض کرلیا جائے کہ ط = ا + ب و تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۹) ایک شکنجے کے ساتھ تجربہ کرتے وقت یہ دیکھا گیا ہے کہ اگر بوجھ و کی قیمتیں ۱۵۰، ۱۸۰، ۲۱۰، ۲۴۰، ۲۷۰ پونڈ وزنی ہوں تو زور ط کی مطابق قیمتیں ۹ ؛ ۲۰ ، ، ۲۲ ، ۵ ، ۷ ، ۱۲۵ ، ۴ ، ۲۸ اور ۴ ، ۳۱ پونڈ وزن ہوتی ہیں ان نتائج کو ایک مربع دار کاغذ پر مرتسم کرو اور ط = ا + ب و فرض کرنے سے ا اور ب کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱۰) چرخیوں کے دوسرے نظام کے ساتھ تجربے کرتے وقت و کی قیمتیں (جن میں نچلے سہارے کا وزن بھی شامل ہے) اور ط کی قیمتیں گراموں میں حسب ذیل معلوم ہوئیں۔

و =	۷۵	۱۷۵	۲۷۵	۴۷۵	۶۷۵	۸۷۵	۱۰۷۵
ط =	۲۵	۴۸	۷۱	۱۱۹	۱۶۶	۲۱۴	۲۶۴

نیز نچلے سہارے پر پانچ رسیاں تھیں ط اور و کا تقریبی تعلق دریافت کرو اور مشین کی قابلیت اور مشینی مفاد کی

مطابق قیمتیں معلوم کرو۔
ط ، ط٠، ق اور م کے ترسیمات بناؤ۔

(۱۱) ایک حمالہ کے ذریعہ چند بوجھ اٹھائے گئے ہیں جدول ذیل میں یہ بوجھ ٹنوں میں اور ان کے مطابق زور مندرج ہیں

بوجھ	۱	۳	۵	۷	۹	۱۰	۱۱
زور	۹	۲۰	۲۸	۳۷	۴۲	۵۱	۵۶

مشین کا قانون دریافت کرو اور اگر رفتاری نسبت ۵۰ ہو تو ۵ اور ۱۰ ٹن اوزان کے لئے مشین کی قابلیت دریافت کرو۔

(۱۲) ایک شکنجے کی گھاٹی $\frac{1}{4}$ انچ ہے اور قوت ایک ۱۵ انچ لمبے بیرم کی عمودی سمت میں لگائی جاتی ہے اگر پیچ کے ذریعے ایک وزن اٹھایا جائے جس کی قیمتیں ٹنوں میں اور مطابق قوت کی قیمتیں پونڈوں میں حسب ذیل ہیں۔

وزن	۱	۲٫۵	۵	۷	۸	۱۰
قوت	۲۴	۳۲	۴۶	۵۷	۶۳	۷۳

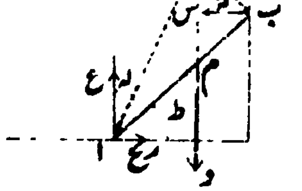
تو مشین کا قانون دریافت کرو اور اوزان ۴ اور ۹ ٹن کیلئے کل کی قابلیت دریافت کرو۔

باب چہاردہم

فرک (مسلسل)

(۲۰۰) اس باب میں ہم سوالات حل کرنے کی چند اور مثالیں دیں گے جن میں فرک شامل ہے۔

مثال (۱) ایک یکساں زینے کا ایک سرا زمین پر اور دوسرا سرا ایک عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور وہ اس حالت میں متوازن ہے۔ زمین اور دیوار دونوں کھردری ہیں اور ان کی فرک کی قدریں بالترتیب ر اور رَ ہیں۔ اگر زینے کے دونوں سرے پھسلنے کی حدتک پہنچ جائیں تو زینے کا میلان افق سے دریافت کرو۔ فرض کرو کہ **اب** زینہ ہے اور اسکا مرکز ثقل **م** ہے فرض کرو کہ **ا** اور **ب** پر عمودی عمل بالترتیب **ع** اور **س** ہیں



اب چونکہ زینے کا سرا ا دیوار سے باہر کی طرف پھسلنے کو ہے اس لئے قوت فرک ر ع دیوار کی طرف عمل کرتی ہے اور سرا ب نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہے

اس لئے فرک رَ س اوپر کی طرف عمل کرتی ہے۔
فرض کرو کہ زینے کا طول ۲ ا ہے اور وہ افق سے زاویہ ط بناتا ہے۔ افقی اور عمودی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

ر ع = س .... (۱)

ع + رَ س = و .... (۲)

نیز ا کے گرد معیار لینے سے

و × ا جم ط = رَ س × ۲ ا جم ط + س × ۲ ا جب ط

∴ و جم ط = ۲ س (رَ جم ط + جب ط) .... (۳)

(۱) اور (۲) سے

ر (و - رَ س) = س

∴ ر و = س (ا + ر رَ) ..... (۴)

(۳) اور (۴) سے بذریعہ تقسیم

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{ر}} = \frac{\text{۲ (رَ جم ط + جب ط)}}{\text{ا + ر رَ}}$$

∴ جم ط (ا - ر رَ) = ۲ ر جب ط

$$\text{اس لئے مس ط} = \frac{\text{ا - ر رَ}}{\text{۲ ر}}$$

بطرز دیگر۔ فرض کرو کہ ا اور ب پر کے زاویائے فرک له اور لهَ ہیں خط ا ج اس طرح کھینچو کہ وہ ا پر کے عمود کے ساتھ زاویہ له بنائے اور ب ج اس طرح کھینچو کہ وہ ب پر کے ساتھ زاویہ لهَ بنائے۔ ملاحظہ ہو شکل بموجب دفعہ ۱۸۹ نقاط ا اور ب پر کے حاصل عملوں کی سمتیں ا ج اور ب ج ہیں اور یہ حاصل عمل اور زینے کا

وزن ملکر زینے کو توازن میں رکھتے ہیں اس سے ثابت ہوا کہ ان کی سمتیں لازماً ایک نقطے میں ملینگی اور اسلئے م میں سے گزرنے والا خط شاقولی نقطہ ج میں سے گزرے گا دفعہ ۹۷ کے ضابطہ (۱) سے

(ا + ا) مم ج م ب = امم اج م - امم ب ج م

یعنی ۲ مس ط = مم لہ - مس لہَ = ۱/رَ - رَ.

∴ مس ط = (۱ - رَ^۲)/۲رَ

مثال (۲) ایک زینے کا ایک سرا زمین پر اور دوسرا سرا ایک عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور وہ اس طرح سے ایک خاص حالت میں ساکن ہے۔اگر زمین اور دیوار دونوں کھردری ہوں اوران کےزوایا ے فرک باترتیب لہ اور لہَ ہوں تو عمل ترسیمی سے دریافت کرو کہ ایک آدمی زینے پر کہانتک اوپر چڑھے کہ زینے کی نوبت عین پھسلنے کی آجائے۔

فرض کرو کہ اب (شکل مثال ۱) زینہ ہے خطوط اج اور ب ج اس طرح کھینچو کہ وہ زمین اور دیوار کے نقاط ا اور ب پر کے عمودوں سے فرک کے زاوئے بنائیں۔

ج م سمت شاقولی میں کھینچو اور فرض کرو کہ وہ اب سے م پر ملتا ہے اگر آدمی اور زینے کا مرکز ثقل ا اور م کے درمیان واقع ہو تو زینہ ساکن رہے گا۔ورنہ یہ پھسل جائیگا۔

کیونکہ اگر یہ مرکز ثقل م اور ب کے درمیان واقع ہو تو اس مرکز میں سے گزرنے والا خط راس خط ب ج سے جو نقطہ ب پر فرک کی انتہائی سمت ہے ایک ایسے نقطہ ف پر ملیگا کہ زاویہ ف ا ع نقطہ ا پر کے زاویہ فرک سے بڑا ہوگا اور اس طرح سے توازن ناممکن ہوگا۔ اگر یہ مرکز ثقل م اور ا کے درمیان ہو تو توازن ممکن ہوگا۔ کیونکہ اگر یہ بھی فرض کرلیا جائے کہ نقطہ ا پر توازن انتہائی ہے پھر بھی اس مرکز ثقل میں سے گزرنے والا خط راس ا ج سے ایک ایسے نقطہ ف پہ ملیگا کہ زاویہ ف ب س > لَہ پس اس صورت میں توازن ممکن ہوگا۔ اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ اگر نقطہ ب پر کی فرک انتہائی ہو تو اس صورت میں بھی توازن قایم رہیگا۔ پس اگر زینے کا مرکز ثقل م، ہو اور آدمی زینے پر زیادہ سے زیادہ م، تک چڑھ سکے اور زینے اور آدمی کے اوزان بالترتیب و، اور و۲ ہوں تو م۲ اس مساوات سے معلوم ہوگا۔

$$و_1 \times م م_1 = و_2 \times م م_2$$

امثلہ نمبری (۳۳)

(۱) ایک ۱۳ فٹ لمبے یکساں زینے کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر اور دوسرا ایک کھردری سطح افقی پہ دیوار سے

۵ فٹ کے فاصلہ پر ٹکا ہوا ہے اگر زینے کا وزن ۵۰ پونڈ ہو تو زمین اور زینے کے درمیان فرک دریافت کرو۔

(۲) ایک یکساں زینے کا ایک سرا ایک افقی فرش پر اور دوسرا سرا ایک عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور فرک کی قدریں بالترتیب $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ ہیں زینے کا میلان اوقت دریافت کرو جبکہ وہ عین پھسلنے کو ہو۔

(۳) آخری مثال میں اگر فرک کی قدر ہر ایک صورت میں $\frac{1}{3}$ ہو تو ثابت کرو کہ زینہ اسوقت عین پھسلنے کو ہوگا جب اس کا میلان سمت شاقولی سے مس$^{-1}$ $\frac{3}{4}$ ہو۔

(۴) ایک یکساں زینے کا سرا ایک کھردرے فرش پر اور دوسرا سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور اس طرح زینہ انتہائی توازن میں ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا میلان سمت شاقولی سے مس$^{-1}$ (۲ ر) ہے۔

(۵) ایک یکساں زینہ دیوار سے لگا ہوا ہے۔ اگر زمین اور دیوار دونوں کی قدر فرک مس ط ہو تو ثابت کرو کہ سمت شاقولی سے زینے کا انتہائی میلان ۲ ط ہے۔ جب زینہ اس حالت میں ہو تو معلوم کرو کہ کیا زینے کی چوٹی تک بغیر زینے کے پھسلنے کے چڑھنا ممکن ہے؟

(۶) ایک یکساں زینے کا ایک سرا ایک کھردری افقی سطح پر اور دوسرا ایک چکنی صاف عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور زینہ انتہائی توازن میں ہے ایک شخص زینے پہ

چڑھنا شروع کرتا ہے۔ثابت کرو کہ وہ نصف سے زیادہ نہیں چڑھ سکتا۔

(۷) ایک یکساں زینے کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر اور دوسرا سطح زمین پر ساکن ہے۔زمین کی قدر فرک $\frac{1}{4}$ ہے اگر زینہ کا میلان سطح زمین سے ۴۵° ہو تو ثابت کرو کہ ایک شخص جس کا وزن زینے کے وزن کے مساوی ہو زینے کی عین چوٹی تک اس طرح چڑھ سکتا ہے کہ زینہ پھسلنے نہ پائے۔

(۸) ایک یکساں زینہ طول میں ۷۰ فٹ ایک عمودی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے دیوار اور زینے کے درمیان زاویہ ۴۵° ہے اور فرک کی قدر $\frac{1}{3}$ ہے۔نیز زمین اور زینے کے درمیان فرک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔اگر ایک شخص جس کا وزن زینے کے وزن کا نصف ہو زینے پر چڑھنا شروع کرے تو بتاؤ کہ اس کے کتنا اونچا چڑھنے پر زینہ پھسلیگا؟

اگر ایک لڑکا زینے کے سب سے نچلے ڈنڈے پر کھڑا ہو تو معلوم کرو کہ اس کا کم از کم وزن کتنا ہو کہ وہ آدمی زینے کی چوٹی تک چڑھ سکے۔

(۹) دو مساوی زینے ہرایک وزن میں و ایک دوسرے کے سہارے ساکن ہیں ان کے نچلے سرے ایک کھردرے افقی فرش پر ٹکے ہوئے ہیں اگر قدر فرک ر اور زینوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہو تو بتاؤ کہ ان کی چوٹی پر کتنا وزن

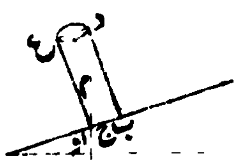
رکھا جائے کہ ان کے پھسلنے کی نوبت آجائے
اگر مس عہ > ۲ ر یا < ۰ ر تو ہر حالت میں اس کا مطلب بیان کرو۔

(۱۰) ایک یکساں زینے کا میلان افق سے ۴۵° ہے اور اس کا اوپر کا سرا ایک کھردری عمودی دیوار پر اور نچلا سرا زمین پر لگا ہوا ہے اگر انتہائی توازن کی حالت میں زمین اور دیوار کی قدریں بالترتیب ر اور رَ ہوں تو ثابت کرو کہ چھوٹی سی چھوٹی افقی قوت جو نچلے سرے کو دیوار کی طرف کھینچ سکے گی

$\frac{1}{2}$ و $\frac{۱ + ۲ر - ررَ}{۱ - ررَ}$ ہوگی

(۱۱) مثال ۹ میں اگر وزن ایک زینے کے نقطہ وسط پر رکھا جائے اور اس کی مقدار اتنی ہو کہ پھسلنا شروع ہوجائے تو ثابت کرو کہ دوسرا زینہ پہلے پھسلیگا۔

(۲۰۸) **مثال** (۱) ایک یکساں اسطوانے کا مستوی قاعدہ ایک کھردری سطح مائل پر رکھا ہوا ہے اور سطح کے میلان کو بتدریج بڑھایا گیا ہے ثابت کرو کہ اگر اسطوانے کے قطر اور ارتفاع کی باہمی نسبت قدر فرک سے کم ہو تو پھسلنے سے پہلے اسطوانے کے الٹ جانے کی نوبت آجائے گی۔



فرض کرو کہ جب اسطوانہ سطح پر عین الٹنے کو ہو تو اس وقت سطح کا

میلان افق سے فہ ہے اسطوانے کے مرکز ثقل م میں سے گزرنے والا خط عمودی۔ ایسی حالت میں عین قاعدہ کے سرے پر واقع ہوگا۔

پس اگر اب قاعدہ ہو تو خط م ا عمود ہوگا۔

فرض کرو کہ قاعدہ کا نقطہ وسط ج ہے اور رَ نصف قطر اور ف اسطوانے کا ارتفاع ہے۔

∴ مس فہ = مم ج ام = اج / ج م = رَ / ½ف = ۲رَ / ف (۱)

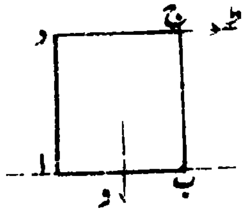
نیز جب اسطوانہ عین پھسلنے کو ہو تو اس وقت اس کا میلان افق سے مساوات ذیل سے حاصل ہوگا۔

مس طہ = ر . . . . (۱)

اس لئے اسطوانہ پھسلنے سے پہلے الٹ جائے گا اگر فہ > طہ

یعنی اگر ۲رَ / ف > ر

مثال (۲) ایک مستطیل اب ج د کا قاعدہ اب ایک کھردری میز پر رکھا ہوا ہے اور مستطیل سطح عمودی میں ساکن ہے۔ ایک بتدریج بڑھنے والی قوت د ج کی سمت میں عمل کرتی ہے بتاؤ کہ مستطیل پہلے پھسلیگا یا الٹیگا؟



فرض کرو کہ قوت ط ہے اور مستطیل کا وزن و ہے

فرض کرو کہ اب = ۲ل اور ب ج = ف اگر مستطیل عین الٹنے کو ہو تو نقطہ ب کے گرد ط اور و کے معیار

ٹھیک متوازن ہوں گے یعنی ط × ف = و × ل ..... (۱)
نیز مستطیل اس وقت عین پھسلنے کو ہوگا جب ط انتہائی رگڑ کے برابر ہو۔

یعنی جب ط = ر و .... (۲)

مستطیل پہلے الٹیگا یا پھسلیگا اگر ط کی قیمت جو مساوات (۱) سے حاصل ہو وہ کم ہو یا زیادہ اس قیمت سے جو مساوات (۲) سے حاصل ہو۔

یعنی اگر $\frac{ل}{ف} \gtrless$ ر

یعنی اگر ر $\lessgtr$ اس نسبت سے جو مستطیل کے قاعدہ کو دو چند ارتفاع سے ہو۔

امثلہ نمبری (۳۴)

(۱) ایک اسطوانے کا گول قاعدہ ایک کھردری سطح پر رکھا ہوا ہے اور رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔ اگر اسطوانہ عین پھسلنے اور الٹ جانے کو ہو تو اس کے قطر اور ارتفاع کا باہمی تعلق دریافت کرو۔ نیز سطح کا میلان افق سے معلوم کرو

(۲) ایک ٹھوس اسطوانے کا ایک مستوی سرا ایک کھردری افقی سطح پر پڑا ہے اور اوپر کے سرے کے مرکز میں سے ایک افقی قوت عمل کرتی ہے۔ اگر یہ قوت جسم کو ہلانے کیلئے عین کافی ہو تو ثابت کرو کہ اسطوانہ الٹنے سے پہلے پھسلنا شروع کرے گا اگر رگڑ کی قدر اس نسبت سے کم ہو

جو قاعدہ کے نصف قطر کو اسطوانے کے ارتفاع سے ہے۔

(۳) ایک مثلث متساوی الاضلاع کا قاعدہ ایک کھردری سطح افقی پر ساکن ہے اور مثلث سطح عمودی میں واقع ہے۔ اگر ایک بتدریج بڑھنے والی قوت مثلث کی سطح میں اس کے راس پر عمل کرے تو ثابت کرو کہ اگر فرک کی قدر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ سے کم ہو تو مثلث اپنے قاعدے کے کنارے کے گرد الٹنے سے پیشتر پھسلنے کی حد تک پہنچ جائے گا۔

(۴) شکر کی ایک مخروطی ڈلی ایک کھردری میز پر پڑی ہے جس کا کھردراپن اس کو پھسلنے سے روکنے کے لئے کافی ہے۔ ڈلی کا ایک کنارہ اس قدر اٹھایا گیا ہے کہ وہ عین الٹنے کو ہے۔ اگر ڈلی کا ارتفاع اس کے قاعدے کے قطر کا دو چند ہو تو اس حالت میں مستوی قاعدہ کا میلان افق سے دریافت کرو۔

(۵) ایک مخروط ایک کھردری سطح مائل پر ساکن ہے اور اس کا زاویہ راس ۲ عہ ہے ثابت کرو کہ اگر سطح کے میلان کو بتدریج بڑھایا جائے تو مخروط الٹنے سے پہلے پھسلنا شروع کرے گا بشرطیکہ فرک کی قدر ۴ مس عہ سے کم ہو۔

(۶) ایک قائم مخروط کا قاعدہ ایک کھردری سطح مائل پر ساکن ہے اور فرک کی قدر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے اگر مخروط عین پھسلنے اور الٹنے کی حالت میں ہو تو اس کا زاویہ دریافت کرو۔

(۷) ایک مخروط ایک کھردری میز پر پڑا ہے اور ایک رسی کا

ایک سرا مخروط کے راس سے بندھا ہے اور دوسرا سرا ایک چکنی چرخی پر سے گزر کر ایک وزن کو سہارتا ہے۔ نیز چرخی کا ارتفاع میز کی سطح سے مخروط کے ارتفاع کے برابر ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وزن کو بتدریج بڑھایا جائے تو مخروط الٹ جائے گا یا پھسلنے لگیگا اگر ذرک کی قدر بالترتیب > یا < مس عہ جہاں عہ مخروط کے زاویہ راس کا نصف ہے۔

(۸) ایک مکعب ایک کھردری سطح مائل پر اسطرح ساکن ہے کہ اس کے کنارے سطح کے کناروں کے متوازی ہیں اگر سطح مائل کو بتدریج اٹھانے پر مکعب پھسلنے سے پہلے الٹنے کی حد تک پہنچ جائے تو معلوم کرو کہ ذرک کی قدر کی چھوٹی سی چھوٹی قیمت کیا ہو سکتی ہے؟

(۹) ایک مثلثی پترے ا ب ج کا ضلع ب ج ایک کھردری سطح افقی پر ساکن ہے اگر سطح کو ایک ایسے محور کے گرد اٹھایا جائے جو سطح کے اندر واقع ہو اور ب ج پر عمود ہو اور زاویہ ب زاویہ ج سے نیچا ہو تو ثابت کرو کہ پترا پھسلنے یا الٹنے لگیگا اگر ذرک کی قدر مس ا سے بالترتیب کم ہو یا زیادہ ہو۔

(۱۰) ایک مربع یکساں دہات کی تختی ا ب ج د کا ضلع ب ج ایک مکمل کھردری سطح مائل پر ساکن ہے سطح کا میلان افق سے عہ ہے اور ایک رسی ا ف ایک طرف تو تختی کے سب سے اونچے نقطہ ا پر بندھی ہے

اور دوسری طرف ایک چرخی پر سے گزر کر ایک وزن و کو سہارتی ہے۔چرخی سطح کے راس پر واقع ہے اور حالت توازن میں ا ف متوازی الافق ہے اگر تختی کا وزن و، ہو تو ثابت کرو کہ اگر و، کو بتدریج بڑھایا جائے تو تختی نقطہ ب کے گرد گھومنے لگیگی جب

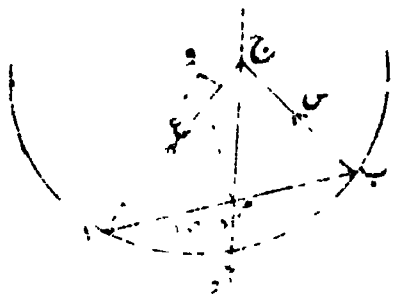
$$و_۱ > و \frac{۱ + مس عہ}{۲}$$

(۱۱) ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح جسم وزن میں اٹن ایک مربع قاعدہ پر قائم ہے۔قاعدہ کا ضلع ۶ فٹ اور جسم کا ارتفاع ۸ فٹ ہے۔جسم ایک کھردرے بلا وزن تختے پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے قاعدہ کے اضلاع تختے کے طول اور عرض کے متوازی ہیں اور قاعدہ کا مرکز تختے کے ایک سرے سے ۹ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔تختے کا دوسرا سرا اتنا اٹھایا گیا ہے۔کہ جسم پھسلنے کے بغیر الٹ جاتا ہے۔کام کی مقدار معلوم کرو۔

(۲۰۹) **مثال**۔ ایک یکساں سلاخ ایک کھردرے مجوف کرہ کے اندر انتہائی توازن میں پڑی ہے۔اگر سلاخ کے محاذی کرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ عہ بنے اور فرک کا زاویہ لہ ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا میلان افق سے

$$مس^{-۱}\left(\frac{مس (عہ + لہ) - مس (عہ - لہ)}{۲}\right)$$ ہوگا۔

فرض کرو کہ ا ب سلاخ ہے م اسکا مرکز ثقل او و کرہ



مرکز ہے یعنی

زاویہ م و ا = زاویہ م و ب = عہ

نقاط ا اور ب میں سے خطوط اج اور ب ج کھینچو جو کرہ کے مرکز اور نقاط ا اور ب کے خطوط وصل سے زاویے لہ لہ بنائیں۔

بموجب دفعہ ۱۸۹ نقاط ا اور ب پر کے حاصل عملوں ع اور س کی سمتیں بالترتیب اج اور ب ج ہیں۔

چونکہ یہ عمل اور سلاخ کا وزن سلاخ کو توازن میں رکھتے ہیں اس لئے نقطہ م میں سے گزرنے والا خط راس ج میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ افقی خط ا د جو ا میں سے گزرتا ہے خط ج م کو نقطہ د پر قطع کرتا ہے پس زاویہ م ا د = طہ

زاویہ ج ا م = و ا م − لہ = ۹۰° − عہ − لہ

اور زاویہ ج ب م = و ب م + لہ = ۹۰° − عہ + لہ

اس لئے دفعہ ۹۷ کے مسئلہ (۲) سے حاصل ہوگا۔

(ل + ل) ممج ج م ب = ل ممج ج ا ب − ل ممج ج ب ا

یعنی ۲ مس طہ = ممج (۹۰° − عہ − لہ) − ممج (۹۰° − عہ + لہ) = مس (عہ + لہ) − مس (عہ − لہ) ۔۔۔ (۱)

یا بطرز دیگر۔ اس سوال کا حل شرائط دفعہ ۸۳ کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

قوتوں کو سلاخ کے طول کی سمت میں تحلیل کرنے سے۔

ع جم(۹۰° - عہ - لہ) - سَ جم(۹۰° - عہ + لہ) = وَ جب طہ

یعنی ع جب(عہ + لہ) - سَ جب(عہ - لہ) = وَ جب طہ .....(۲)

سلاخ کی عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

ع جم(عہ + لہ) + سَ جم(عہ - لہ) = وَ جم طہ ....(۳)

نیز ا کے گرد معیار لینے سے

ع × اب جب(۹۰° - عہ + لہ) = وَ × ام جم طہ

یعنی ۲ سَ جم(عہ - لہ) = وَ جم طہ ....(۴)

معادلات (۳) اور (۴) سے

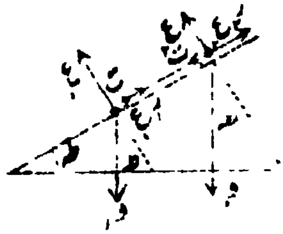
ع جم(عہ + لہ) = سَ جم(عہ - لہ) = ½ وَ جم طہ

مساوات (۲) میں ع اور سَ کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

مس(عہ + لہ) - مس(عہ - لہ) = ۲ مس طہ

عددی مثال۔ اگر سلاخ کے محاذی کرہ کے مرکز پر زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کرو کہ اس کا میلان افق سے زاویہ ؤک کا دو چند ہوگا۔

(۲۱۰) دو جسم وزنی و۱ اور و۲ پونڈ ایک سطح مائل پر ایک ہلکی رسی کے ذریعہ مربوط ہیں جو سطح کے ایک خط میلان اعظم پر منطبق ہوتی ہے اگر اجسام اور سطح کے درمیان ؤک کی قدریں ر۱ اور ر۲ ہوں تو سطح کا میلان اسوقت دریافت کرو جب دونوں جسم حرکت کرنے کو ہوں۔ یہ مان لو کہ زیادہ چکنا جسم نیچے ہے۔



نچلا جسم اس وقت پھسلنے کو ہوگا جب میلان مس$^{-1}$ر$_1$ ہو لیکن اوپر کا جسم حرکت نہیں کرے گا جب تک کہ میلان مس$^{-1}$ر$_2$ نہ ہو۔ جب دونوں اکٹھے بندھے ہوئے ہوں تو دونوں کے اکٹھے پھسلنے کی صورت میں سطح کا میلان ان دو قیمتوں کے درمیان واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ میلان ط ہے اور اسوقت اجسام کے عمودی عمل ع$_1$ اور ع$_2$ ہیں نیز فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت ہے۔ فرکین ر$_1$ ع$_1$ اور ر$_2$ ع$_2$ ہر دو سطح کے اوپر کی طرف عمل کرتی ہیں۔

و$_1$ کے توازن کے لئے ضروری ہے کہ

و$_1$ جب ط = ت + ر$_1$ ع$_1$

اور و$_1$ جم ط = ع$_1$

∴ ت = و$_1$ (جب ط - ر$_1$ جم ط) ..... (۱)

و$_2$ کے توازن کے لئے لازماً

و$_2$ جب ط + ت = ر$_2$ ع$_2$

اور و$_2$ جم ط = ع$_2$

∴ ت = ر$_2$ ع$_2$ - و$_2$ جب ط = و$_2$ (ر$_2$ جم ط - جب ط)... (۲)

اس لئے (۱) اور (۲) سے

$$\text{و}_1\,(\text{جب طہ} - \text{ر}_1\,\text{جم طہ}) = \text{و}_2\,(\text{ر}_2\,\text{جم طہ} - \text{جب طہ})$$

$$\therefore (\text{و}_1 + \text{و}_2)\,\text{جب طہ} = (\text{و}_1\text{ر}_1 + \text{و}_2\text{ر}_2)\,\text{جم طہ}$$

$$\therefore \text{مس طہ} = \frac{\text{و}_1\text{ر}_1 + \text{و}_2\text{ر}_2}{\text{و}_1 + \text{و}_2}$$

مثال (۱) دو مساوی جسم ایک ہلکی رسی کے ذریعہ مربوط ہیں اور ان کو ایک کھردری سطح مائل پر رکھا گیا ہے اگر فرک کی قدریں بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ ہوں تو ثابت کرو کہ وہ دونوں عین اسوقت حرکت کرنے کو ہوں گے جب سطح کا میلان افق سے مس$^{-1}\frac{5}{12}$ ہو۔

مثال (۲) تین مساوی اجسام اس طرح مربوط ہیں کہ ان کے باہمی فاصلے ہمیشہ ایک ہی رہتے ہیں۔ ان کو ایک سطح مائل پر رکھدیا گیا ہے۔ اور ان کی فرک کی قدریں بالترتیب $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{8}$، $\frac{3}{8}$ ہیں۔ ثابت کرو کہ سطح پر بغیر پھسلنے کے ساکن رہنے کیلئے سطح کا میلان افق سے مس$^{-1}\frac{1}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

(۲۱۱) **مثال**۔ ایک کھردری سطح مائل پر ایک ذرہ ہے۔ جس پر ایک قوت ط سطح کے متوازی ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو سطح مائل کے خط میلان اعظم سے زاویہ یہ بناتی ہے اگر سطح کا میلان افق سے عہ اور قدر فرک ر ہو اور توازن انتہائی ہو تو جسم کی ابتدائی سمت حرکت دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و اور عمودی عمل ع ہے۔ ضرور ہے کہ

سطح مائل کی عمودی سمت میں جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ صفر کے برابر ہوں یعنی ع = و جم عہ .... (۱)

وزن کا دوسرا جزو ترکیبی و جب عہ ہوگا جو خط میلان اعظم کے نیچے کی طرف عمل کرے گا۔

فرض کرو کہ فرک ر ع ایک ایسی سمت ا ب میں عمل کرتی ہے جو خط میلان اعظم سے زاویہ طہ بناتی ہے یعنی فرض کرو کہ ذرہ سمت ب ا ممدودہ میں حرکت کرنی شروع کرتا ہے۔ چونکہ سطح مائل کے متوازی عمل کرنیوالی قوتیں توازن میں ہیں اس لئے بموجب مسئلہ لامی

ر ع / جب بہ = و جب عہ / جب (طہ + بہ) = ط / جب طہ ...... (۲)

(۱) اور (۲) سے ع اور و کو ساقط کرو تو حاصل ہوگا۔

جم عہ = ع / و = جب عہ جب بہ / ر جب (طہ + بہ)

اس لئے جب (طہ + بہ) = مس عہ جب بہ / ر ...... (۳)

جس سے زاویہ طہ حاصل ہوتا ہے۔

عددی مثال۔ فرض کرو کہ سطح کا میلان ۳۰° ہے فرک کی قدر ½ اور قوت ط اور خط میلان اعظم کا درمیانی زاویہ ۳۰° ہے اس صورت میں

جب (طہ + ۳۰°) = مس ۳۰° × جب ۳۰° / ½ = [illegible] = جب ۹۰° .... (۴)

پس ط = ۲۰° اور جسم سطح کے نیچے کی طرف ایسی سمت میں حرکت کرنی شروع کرتا ہے جو خط میلان اعظم سے زاویہ ۳۰° کا بناتی ہے اور یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ قوت ط = $\frac{و}{۲}$ ۳√ ۔اگر قوت وزن پر عین غالب آنے کو ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے [یا یہ مساوات (۴) سے ظاہر ہے چونکہ اس کا ایک اور حل ط = ۹۰° ہے] کہ فرک ر ع افقی سمت میں عمل کرتی ہے یعنی ذرہ افقی سمت میں حرکت کرنی شروع کرتا ہے اور ط کی مطابق قیمت $\frac{و}{۲}$ ۳√ ہے۔

امثلہ نمبری (۳۵)

(۱) ایک زینے کا مرکز ثقل اس کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے طول ا اور ب ہیں۔ زینے کا ایک سرا ایک کھردرے افقی فرش پر اور دوسرا ایک کھردری عمودی دیوار پر ساکن ہے اگر فرش اور دیوار کی فرک کی قدریں بالترتیب ر اور رَ ہوں تو ثابت کرو کہ جب توازن انتہائی ہو تو زینے کا میلان فرش سے

$$\text{مس}^{-1} \frac{ا - ب ر رَ}{ر (ا + ب)}$$ ہوگا۔

(۲) ایک بلا وزن سلاخ دو کھردری مائل سطحوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں افقی حالت میں

ساکن ہے اور فرک کا زاویہ لہ ہر ایک سطح کے میلان سے کم ہے۔ثابت کرو کہ سلاخ کے اس حصہ کا طول جس پر ایک وزن بغیر حرکت پیدا کرنے کے رکھا جا سکتا ہے سلاخ کے کل طول کا ۲ عہ × جب ۲ لہ ہے۔اس میں عہ ہر ایک سطح کے میلان کو تعبیر کرتا ہے۔

(۳) ایک وزنی یکساں سلاخ دو افقی کھونٹیوں میں سے ایک کے اوپر اور دوسری کے نیچے ساکن ہے اور تمام سلاخ سطح عمودی میں واقع ہے۔ثابت کرو کہ چھوٹی سے چھوٹی سلاخ کا طول جو ایسی حالت میں ساکن رہ سکتی ہے (ا+مس عہ مم لہ) ہے جہاں ا کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ اور عہ ان کے خط وصل کا میلان افق سے اور لہ ان کا زاویہ فرک ہے۔

(۴) ایک یکساں وزنی سلاخ کا طول ایک فٹ ہے اس کا ایک سرا کھردرا اور دوسرا چکنا ہے اور وہ ایک عمودی چکر کے اندر ساکن ہے جس کا نصف قطر ۱۰ انچ ہے۔اگر سلاخ کا انتہائی توازن عین اس وقت ہو جب اس کا کھردرا سرا چکر کے سب سے نچلے نقطہ پر ہو۔ تو ثابت کرو کہ فرک کی قدر $\frac{۲۴}{۴۳}$ ہے۔

(۵) ایک وزنی یکساں سلاخ کے سرے ایک کھردرے گول چکر پر ساکن ہیں اور چکر سطح عمودی میں واقع ہے۔سلاخ سے مقابل چکر کے مرکز پر زاویہ ۱۲۰° بنتا ہے اور جب توازن انتہائی ہو تو سلاخ افق سے زاویہ طہ بناتی ہے۔اگر ۳√ ر = مس عہ

جہاں ر قدر فرک ہے تو ثابت کرو کہ

مس ط : مس ۲ عہ :: ۲ : $\sqrt{3}$

(۶) ا اور ب دو چھوٹے مساوی وزنی چھلّے ہیں جو ایک کھردری افقی سلاخ پر پھسل سکتے ہیں فرک کی قدر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے۔ ایک اور مساوی وزنی چھلّا ج ایک بلا وزن چکنی رسی سے جو ا اور ب پر مربوط ہے لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن انتہائی کی صورت میں ا ب ج ایک مثلث متساوی الاضلاع ہوگا۔

(۷) ایک وزنی یکساں سلاخ ا ب کا ایک سرا ایک کھردری افقی سلاخ ا ج پر پھسل سکتا ہے جس کے ساتھ اس کا تعلق ایک چھلّے کی ذریعہ کردیا گیا ہے اور ب اور ج کو ایک رسی سے ملا دیا گیا ہے۔ اگر سلاخ کے عین پھسلنے کے وقت ا ب ج قائمہ ہو اور ر قدر فرک اور عہ خط ا ب اور سمت راس کا درمیانی زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ر = \frac{\text{مس عہ}}{\text{مس}^2\,\text{عہ} + 2}$$

(۸) ایک یکساں سلاخ کے سرے دو ایک سی کھردری ثابت سلاخوں پر پھسل سکتے ہیں۔ ان ثابت سلاخوں میں سے ایک کی سمت عمودی ہے اور دوسری افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اگر متحرک سلاخ عین پھسلنے کو ہو تو ثابت کرو

افق سے اس کا میلان طہ مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{۱} \mp \text{۲ ر مس عہ} - \text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۲ (مس عہ} \pm \text{ر)}}$$ سے حاصل ہوگا۔

(۹) ایک یکساں زینے کا طول ا اور وزن و ہے اس کا ایک سرا ایک عمودی دیوار پر اور دوسرا ایک افقی فرش پر ٹکا ہوا ہے۔ دیوار اور فرش دونوں ایک سے کھردرے ہیں اور ان کی قدر فرک مس لہ ہے۔ اگر زینہ کا میلان افق سے طہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک شخص وزنی ن زینہ پر زیادہ سے زیادہ $\text{ا} - \frac{\text{و جم ۲ لہ + ن جم لہ} - \text{(و + ن) مس طہ}}{\text{۲ن}}$ ا جم ۲ لہ چڑھ سکتا ہے

(۱۰) ایک ٹینس کے جال کے کھمبے دو رسیوں کے ذریعہ عمودی سمت میں ساکن ہیں ۔ ایک ایک رسی ایک ایک کھمبے سے بندھی ہے اور ہرایک رسی کا دوسرا رسی ایک کھونٹی کے گرد گزرتا ہے جس کا فاصلہ کھمبے سے ۲ فٹ ہے اگر کھونٹیوں اور رسیوں کے درمیان قدر فرک $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ہو تو ثابت کرو کہ کھونٹیوں کا میلان خط راس سے $\text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{۲}}{\text{۱۱}}$ سے کم نہیں ہوسکتا۔ ہرایک کھمبے کی اونچائی ۴ فٹ ہے۔

(۱۱) ایک صندوق کی شکل قائم الزاویہ متوازی السطوح ہے اس کا وزن بغیر ڈھکنے کے ۲۰۰ پونڈ ہے اور اس کا عرض پشت سے سامنے کے رخ تک ۱ فٹ ہے نیز اس کے ڈھکنے کا وزن ۵۰ پونڈ ہے اور صندوق کی پشت ایک چکنی دیوار کے متوازی ہے اور اس سے ۶ انچہ کے فاصلہ پر ہے

اگر ڈھکنے کو کھولکر دیوار کے ساتھ لگا دیا جائے تو صندوق اور زمین کے درمیان قدر فرک کی چھوٹی سی چھوٹی قیمت دریافت کرو تاکہ صندوق ساکن رہ سکے۔

(۱۲) ایک وزنی گول تختی ایک کھردری سطح مائل پر ایک رسی کے ذریعہ جو سطح کے متوازی ہے اور دائرہ کو مس کرتی ہے سطح عمودی میں ساکن ہے ثابت کرو کہ تختی سطح پر پھسلیگی اگر فرک کی قدر ½ مس طہ سے کم ہو جہاں طہ سطح کا میلان ہے۔

(۱۳) ایک کھردری میز پر ایک ذرہ پڑا ہے اور ایک رسی کے ذریعہ جسکا طول ا ہے اس کو میز کے ایک نقطہ ثابت ث سے باندھ دیا گیا ہے۔میز کی قدر فرک ر ہے۔ذرے سے ایک اور رسی باندھی گئی ہے جو میز کے چکنے سرے پر سے گذر کر ایک مساوی معلق ذرے کو سہارے ہوے ہے۔ ثابت کرو کہ میز پر کا ذرہ اس دائرے کے کسی نقطہ ف پر ساکن رہے گا جس کا مرکز ث ہو اور نصف قطر ا بشرطیکہ رسی ث ف ہمیشہ تنی رہے اور دوسری رسی کا فاصلہ ث سے بہ نسبت ر ا کے بڑا نہ ہو۔

(۱۴) ایک وزنی سلاخ کا طول ۲ا ہے اس کا ایک سرا ایک کھردری عمودی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور دوسری طرف وہ ایک کھردری کھونٹی پر ساکن ہے۔اگر کھونٹی کا فاصلہ دیوار سے ج ہو اور دیوار اور کھونٹی دونوں پر زاویہ فرک لہ ہو تو ثابت کرو کہ جب سلاخ کا نقطہ تماس دیوار کے

ساتھ کھونٹی کے اوپر ہوگا تو سلاخ اس وقت نیچے پھسلنے کو ہو گی۔ جب

جب³ طہ = ج/ا جم² لہ

جہاں سلاخ کا میلان دیوار کے ساتھ طہ ہے + اگر سلاخ کا نقطہ تماس دیوار کے ساتھ کھونٹی کے نیچے ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ نیچے کی طرف پھسلنے کو ہو گی جب

جب² طہ جب (طہ + ۲ لہ) = ج/ا جم² لہ

اور سلاخ اوپر کی طرف پھسلنے کو ہو گی جب

جب² طہ جب (طہ - ۲ لہ) = ج/ا جم² لہ

(۱۵) ایک گول تختی کا نصف قطر ا اور وزن و₁ ہے اس کو ایک چکنے کرہ کے اندر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر ب ہے، نیز تختی پر ایک وزن و₂ رکھدیا گیا ہے۔ اگر ذرہ اور تختی کے درمیان قدر فرک ر ہو تو تختی کے مرکز سے بڑے سے بڑا فاصلہ دریافت کرو جہاں پر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

(۱۶) ایک چکنے کرہ کا وزن و معلوم ہے اور وہ ایک عمودی دیوار اور ایک منشور کے درمیان جو اپنے ایک رخ کے بل سطح افقی پر پڑا ہوا ہے ساکن ہے اگر سطح افقی اور منشور کے درمیان قدر فرک ر ہو تو ثابت کرو کہ منشور کا کم سے کم وزن جو توازن کے قائم رہنے کے لئے ضروری ہے و(مس عہ/ر - ۱) ہے جہاں عہ منشور کے اس رخ کا میلان افق سے ہے جو کرہ کو مس کرتا ہے۔

(۱۷) دو مساوی سلاخوں کو باہم وصل کرنے سے ایک مربع کے دو اضلاع بنائے گئے ہیں ہر ایک سلاخ کا طول ۲ ا ہے اور ان میں سے ایک، ایک کھردری کھونٹی پر ٹکی ہوئی ہے ثابت کرو کہ سلاخ کے نقطہ وسط سے نقاط تماس کے انتہائی فاصلے $\frac{1}{2}$ (۱ ± ر) ہیں جہاں ر قدر فرک ہے۔

(۱۸) اج اور ب ج دو یکساں سلاخیں ہیں ان کو نقطہ ج پر استوار جوڑ کے ذریعہ وصل کرنے سے ایک یکساں خمیدہ سلاخ بنائی گئی ہے جس کے دونوں حصے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ اس خمیدہ سلاخ کو ایک کھردری میز کے کنارے پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ اج کا نقطہ وسط میز کے کنارے کو چھوتا ہے۔ اگر ب ج کا طول اج کے طول کا تین گنا ہو تو ثابت کرو کہ افق سے اج کا میلان مس$^{-1}$ $\frac{1}{3}$ ہے۔ قدر فرک کی کم سے کم قیمت دریافت کرو کہ سلاخ کا نقطہ ا میز کے کنارے پر متوازن ہو سکے۔

(۱۹) دو مائل سطحوں کے راس مشترک پر ایک چرخی ہے اور ایک وزنی رسی چرخی پر سے گزر کر سطحوں پر ساکن ہے۔ اگر رسی حرکت کرنے کو ہو تو ثابت کرو کہ رسی کے دونوں سروں کو ملانے والا خط افق سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جو زاویہ فرک کے برابر ہے۔

(۲۰) ایک کھردری سطح مائل پر (ر = $\frac{1}{2}$) ایک وزن و کو ایک ایسی قوت $\frac{و}{2}$ سہارے ہوئے ہے جو سطح کے متوازی

اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اگر قوت $\frac{و}{۲}$ سطح پر خط میلان اعظم سے ۶۰° کے زاویئے پر عمل کرے تو اس چھوٹی سے چھوٹی قوت کی مقدار اور سمت دریافت کرو جو سطح میں عمل کرے اور وزن کو حرکت کرنے سے روکے۔

(۲۱) ایک کھردری سطح مائل (ر = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$) افق سے زاویہ ۴۵° بناتی ہے اس پر ایک وزن و دھرا ہے ایک رسی ایک طرف تو وزن سے بندھی ہے اور دوسری طرف سطح کی چوٹی پر ایک چھلے میں سے گزر کر ایک وزن ف کو سمت شاقولی میں سہارتی ہے۔ اگر و = ۳ ف تو ثابت کرو کہ اگر رسی او کا میلان سطح میں خط میلان اعظم کے ساتھ طہ ہو تو

$$\text{جم طہ} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

نیز وزن و کی حرکت کی ابتدائی سمت دریافت کرو۔

(۲۲) ایک کھردری سطح مائل کا میلان افق سے عہ ہے اور ایک وزن و اس پر ساکن ہے اگر فرک کی قدر ۲ مس عہ ہو تو ثابت کرو کہ کم سے کم افقی قوت جو اسی سطح میں عمل کرے اور جسم کو ہلانے کے لئے کافی ہو $\sqrt{۳}$ و جب عہ ہے۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ جسم ایسی سمت میں حرکت کرنا شروع کریگا جو سطح کے خط میلان اعظم سے ۶۰° کا زاویہ بنائے گی۔

(۲۳) دو مساوی اوزان ایک سے کھردرے نہیں ہیں انکو ایک ہلکی استوار سلاخ کے ذریعہ وصل کرکے ایک سطح مائل پر

رکھدیا گیا ہے جس کا میلان افق سے عہ ہے اور زاویہ عہ کا ماس فرک کی قدروں کے اوسط ہندسی کے برابر ہے۔ ثابت کرو کہ حالت توازن میں بڑے سے بڑا زاویہ جو سلاخ خط میلان اعظم سے بنا سکتی ہے $\text{جم}^{-1}\left(\frac{ر_۲ + ر_۱}{۲ ر_۱ ر_۲}\right)$ ہے جہاں $ر_۱$ اور $ر_۲$ فرک کی قدریں ہیں۔

(۲۴) ایک وزنی ذرہ ایک کھردری سطح مائل پر ساکن ہے سطح کا میلان افق سے عہ ہے وزن ایک تنی ہوئی بلا وزن رسی اف کے ذریعہ سطح کے ثابت نقطہ ا پر باندھ دیا گیا ہے اگر اب خط میلان اعظم ہو اور طہ زاویہ ف اب کو اس وقت تعبیر کرے جب ذرہ عین پھسلنے کو ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} = \text{ر م عہ}$$

اگر ر م عہ ایک سے بڑا ہو تو اس نتیجے کا مطلب بیان کرو۔

(۲۵) ایک کھردری سطح کا زاویہ فرک لہ ہے اور ایک نصف کروی خول اس پر ساکن ہے ثابت کرو کہ خول کے مستوی قاعدے کا میلان افق سے جب^{-1} (۲ جب لہ) سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

(۲۶) ایک ٹھوس یک ذات نصف کرہ ایک طرف ایک کھردری سطح افقی پر اور دوسری طرف ایک چکنی عمودی دیوار کے ساتھ ساکن ہے۔ اگر فرک کی قدر $\frac{۳}{۸}$ سے زیادہ ہو تو ثابت کرو کہ کرہ ہر ایک حالت میں ساکن رہ سکتا ہے اور اگر یہ $\frac{۳}{۸}$ سے

کم ہو تو چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو نصف کرہ کا قاعدہ سمت راس سے بنائیگا وہ $\text{جم}^{-۱}\frac{\text{۳ر}}{\text{۸}}$ ہوگا۔ اگر دیوار کھردری ہو (قدر فرک رَ) تو ثابت کرو کہ یہ زاویہ $\text{جم}^{-۱}\left(\frac{\text{۳ر}}{\text{۸}} \times \frac{\text{۱ + رَ}}{\text{۱ + ر رَ}}\right)$ ہوگا۔

(۲۷) ایک وزنی یکذات نصف کرہ کی محدب سطح ایک کھردری سطح مائل پر رکھی ہوئی ہے ثابت کرو کہ سطح مستوی کا زیادہ سے زیادہ میلان افق سے $\text{جب}^{-۱}\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ ہے۔

ثابت کرو کہ یکذات کرہ کسی سطح مائل پر توازن میں ساکن نہیں رہ سکتا خواہ سطح کتنی کھردری ہو۔

(۲۸) اگر ایک نصف کرہ کی منحنی سطح ایک سطح مائل پر جس کا زاویہ میلان $\text{جب}^{-۱}\frac{\text{۳}}{\text{۱۶}}$ ہو ساکن ہو تو نصف کرہ کے قاعدہ مستوی کا میلان سمت راس سے دریافت کرو۔

(۲۹) ایک یکساں کرہ کا نصف قطر ا اور وزن و ہے اس کی کروی سطح ایک سطح افقی پر دھری ہوئی ہے اور اس کی سطح مستوی پر ایک کھردرا ذرہ وَ رکھدیا گیا ہے ثابت کرو کہ ذرہ کا فاصلہ سطح مستوی کے مرکز سے $\frac{\text{۳ ور}}{\text{۸ وَ}}$ سے زیادہ نہیں ہے اس میں ر قدر فرک ہے

(۳۰) ایک کرہ ایک سطح مائل پر جس کا زاویہ میلان عہ ہے انتہائی توازن میں ہے اگر کرہ کا نصف قطر ا ہو اور اس کے مرکز ثقل اور مرکز کا باہمی فاصلہ ج ہو تو ثابت کرو کہ اگر اس کو زاویہ $\text{۲جم}^{-۱}\left(\frac{\text{اجب عہ}}{\text{ج}}\right)$ میں پھرا دیا جائے تو بھی اس کا توازن انتہائی قائم رہے گا۔

باب پانزدہم

متفرق

(۲۱۲) چکنے قبضوں کے ذریعے ملائے ہوئے جسم۔جب دو جسم قبضہ کے ذریعہ جوڑے جائیں تو قبضہ کی دو صورتیں ہوتی ہیں ایک تو یہ ہے۔کہ ایک جسم کا ایک گول سرا ہوتا ہے۔ اور دوسرے جسم میں اسی کے مطابق ایک کھوکھ یا جوف تیار کیا جاتا ہے اور گول سرا اس کھوکھ میں اس طرح پھنسا دیا جاتا ہے کہ جوڑ کھیلتا ہوا رہے۔مثلاً۔ گردانک کا جوڑ۔ دوسری صورت یہ ہے کہ دونوں جسموں میں سے ہر ایک میں ایک سوراخ کیا جاتا ہے اور ایک کیلی یا کوئی اور علٰحدہ جوڑ ان دونوں سوراخوں میں سے گزارا جاتا ہے۔ جیسے کہ دروازے کے قبضے ہوتے ہیں۔

اگر جسم چکنے ہوں۔ تو ہر صورت میں قبضہ پر کا عمل ہر ایک جسم پر ایک قوت واحد ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ۔شکل (صفحہ ۴۴۵) دو جسموں کے جوڑ کی تراش ہے۔ اگر یہ جوڑ چکنا ہو تو



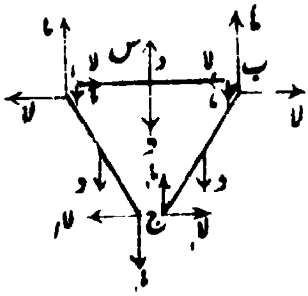
ں کے تمام نقاط پر کے عمل کیلی کے
ز میں سے گزریں گے اور ان کا
صل ایک قوت واحد ہوگی۔ جو نقطہ
ہیں سے گزرے گی۔ اور قبضہ کا
ل ایک جسم پر وہی ہے جو دوسرے جسم پر ہے۔ لیکن
ں کی سمت متقابل ہے کیونکہ ان عملوں کے متساوی
ور متقابل قوتیں کیلی کو متوازن رکھتی ہیں۔ کیلی کا وزن
ظر انداز کیا گیا ہے۔

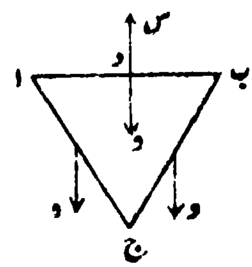
اگر جوڑ چکنا نہ ہو۔ تو نقاط تماس ا، ب، ج، د .... پر
فرکی یعنی رگڑ کی مزاحمتیں بھی ہوں گی جو بالترتیب وا، وب، وج،
پر عمود ہوں گی ایک جوڑ پر عمل کرنے والی قوتیں عموماً
ایک قوت واحد میں تحویل نہیں ہو سکتیں لیکن ایک قوت
اور ایک جفت میں تحویل ہوگی۔ (دیکھو دفعہ ۰۰)

پکنے قبضوں کے متعلق سوالات حل کرنے میں قبضہ کے
عمل کی سمت اور مقدار بالعموم نا معلوم ہوتی ہے۔ اس لئے
عام طور پر اس میں سہولت ہوگی کہ ایک جسم پر قبضہ کے
عمل کے دو اجزا فرض کرلئے جائیں جو ایک دوسرے سے
زاویہ قائمہ بنائیں۔ دوسرے جسم پر کے عمل بھی یہی اجزا ہونگے
لیکن سمتوں میں متقابل اور ہر ایک جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں
قبضے کے عملوں کے ساتھ ملکر متوازن ہیں۔
توازن کی عام شرائط جو دفعہ ۸۳ میں بیان ہو چکی ہیں۔ عائد ہونگی

ہر ایک جسم پر عمل کرنے والے اجزا کے متعلق غلطیوں سے بچنے کیلئے یہ بہتر ہوگا کہ شکل بنانے میں دونوں جسموں کو ملایا نہ جائے بلکہ ذرا فرق رکھا جائے جیسا کہ اگلی مثال کی دوسری شکل میں ہے

(۲۱۳) مثال - ایک چکنے جوڑوں والا مثلث مساوی الاضلاع تین مساوی یکساں سلاخوں سے بنا ہوا ہے - جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے - اگر مثلث کو ایک ضلع کے نقطہ وسط پر سہارا جائے - تو ثابت کرو - کہ سب سے نچلے زاویہ پر کا عمل و $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ہے - اور باقی دو میں سے ہر ایک و $\frac{\sqrt{13}}{12}$ ہے -





فرض کرو کہ سلاخوں کا مثلث ا ب ج ہے - اور ا ب کے نقطہ وسط د پر سہارا گیا ہے - فرض کرو کہ نقطہ ا پر قبضہ کا عمل جو سلاخ ا ب پر ہے - اس کے دو اجزا ہیں - لا افقی اور ما عمودی - اس لئے سلاخ ا ج پر کے عمل کے بھی وہی دو اجزا ہوں گے - لیکن متقابل سمتوں میں - چونکہ یہ تمام نظام نقطہ د میں سے گزرنیوالے خط عمودی کے گرد تشاکل ہے - اس لئے نقطہ ب پر کے

عمل بھی لا اور ما ہوں گے۔ جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔
فرض کرو کہ نقطہ ج پر قبضہ کا عمل جو سلاخ ج ب پر ہے
اس کے دو اجزا لا، اور ما، بالترتیب افقی اور عمودی سمتوں
میں ہیں۔ تو ج ا پر بھی یہی عمل ہوں گے۔ لیکن متقابل
سمتوں میں۔ جیسا کہ شکل میں ہے۔

ا ب کے لئے عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

س = و + ۲ ما .... (۱)

جہاں س کھونٹی د کا عمل ہے۔

ج ب کیلئے افقی اور عمودی تحلیل کرنے اور ج کے گرد معیار لینے سے

لا + لا، = صفر .... (۲)

و = ما + ما، .... (۳)

و × ل × جم ۶۰° + لا × ۲ل × جب ۶۰° = ما × ۲ل × جم ۶۰° .... (۴)

جہاں ۲ل ایک سلاخ کا طول ہے۔

ج ا کے لئے عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

و = ما - ما، .... (۵)

مساوات (۳) اور (۵) سے ما، = ۰ اور ما = و

اس لئے مساوات (۴) سے

لا = ½ و مم ۶۰° = و / ۲√۳ = (√۳ / ۶) و

لہذا مساوات (۲) سے لا، = (√۳ / ۶) و

نیز (۱) سے س = ۳ و

اس لئے ب پر قبضہ کا عمل ایک قوت $\sqrt{ل^{2} + م^{2}}$ (یعنی و$\sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}}$) کے برابر ہے۔ جو افق سے زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{م}{ل}$ (یعنی مس$^{-۱}$ $\frac{۲}{۳}$) بناتی ہے۔ نیز ج پر قبضہ کا عمل ایک افقی قوت و$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کے مساوی ہے۔

ابتدائی اصولوں سے بھی یہ ظاہر ہے کہ ج پر کا عمل افقی ہونا چاہیئے۔ کیونکہ کل نظام خط ج د کے گرد تشاکل ہے۔ اور جب تک جزو م، صفر نہ ہو۔ قوتوں میں تشاکل نہیں ہوگا

امثلہ نمبری (۳۶)

(۱) دو مساوی یکساں شہتیر اب اور ب ج ایک کھیلتے ہوئے جوڑ کے ذریعہ ب پر جوڑے گئے ہیں اور اب کا سرا ا ایک دیوار میں ایک قبضہ سے اس طرح لگا ہے کہ اب ایک عمودی سطح میں بلا تکلف حرکت کر سکتا ہے تو معلوم کرو۔ کہ ب ج کے کون سے نقطے پر ایک عمودی قوت لگائی جائے۔ کہ دونوں شہتیر ایک ہی افقی خط میں رہیں۔ اور اس قوت کی مقدار کیا ہوگی؟

(۲) ایک چکنا قبضہ ج دو یکساں شہتیروں اج اور ج ب کو جوڑے ہوئے ہے۔ اور ان کے دوسرے سرے بالترتیب دو نقاط ا اور ب پر ٹکے ہوئے ہیں۔ خط اب افقی ہے۔ اگر دونوں شہتیر ایک ہی چیز کے بنے ہوئے

، اور ان کا مجموعی وزن ۴۰ پونڈ ہو۔ اور ہر ایک کا
ن افق سے ۶۰° ہو۔ تو ثابت کرو کہ ج پر کا عمل ایک
ے قوت ۷۵√۳ پونڈ وزن کے برابر ہے۔

) ایک پرکار کے دونوں حصے یکساں ہیں۔ اور ایک
وزن و ہے اور پرکار اس طرح ساکن ہے کہ اس کی
ون شاخوں کے نقاط وسط دو چکنی کھونٹیوں پر رکھے
، ہیں۔ اور قبضہ نیچے کو ہے۔ اور کھونٹیاں ایک ہی
ں خط میں واقع ہیں۔ اور پرکار کے سرے ایک
، وزن سلاخ کے ساتھ جڑے ہوئے ہیں اور پرکار
شاخوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہے۔ تو ثابت کرو کہ
نہ پر کا عمل اور سلاخ میں کا دباؤ ہر ایک ½ و مم عہ
ے مساوی ہے۔

۴) دو مساوی یکساں سلاخوں اب اور اج میں اپر
ا قبضہ لگا ہے۔ اور ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے
ر یہ نظام ایک عمودی سطح میں ایک چکنی میز پر رکھا
ا ہے۔ اور ایک رسی ج و ج کو اب کے نقطہ وسط
ے ملاتی ہے۔ توازن کو قائم رکھتی ہے۔ تو ثابت کرو کہ
ی کا تناؤ اور ا پر کا عمل ہر ایک و/۴ قم عہ √(۱ + ۸ جم² عہ)
کے مساوی ہے۔ اور ہر ایک کا میلان افق سے زاویہ
س⁻¹(½ مس عہ) ہے جہاں ہر ایک سلاخ کا میلان
فق سے عہ ہے۔

(۵) دو مساوی شہتیر ا ج اور ب ج ایک کھیلتے ہوئے جوڑ ج کے ذریعہ ملائے گئے ہیں اور ایک کھردری افقی سطح پر اس طرح رکھ دئے گئے ہیں۔ کہ نقاط ا اور ب کھردری سطح پر ہیں۔ اور سطح ا ب ج عمودی ہے۔ اگر قدر فرک $\frac{1}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ ا ج ب ایک قائمہ سے زیادہ نہیں ہو سکتا اور کسی ایک حالت توازن میں ج پر کا عمل دریافت کرو۔

(۶) تین یکساں وزنی سلاخوں ا ب، ب ج، ج ا کے طول بالترتیب ۵، ۴، ۳ فٹ ہیں ان کے سرے قبضوں سے جوڑ کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ تو ثابت کرو کہ اگر ا ب کے نقطہ وسط سے $\frac{1}{5}$۱ انچ ا کی طرف ایک نقطہ بطور نصاب لیا جائے تو کل مثلث اس نصاب پر متوازن ہوگا۔ اگر سلاخوں کا مجموعی وزن و ہو۔ تو ثابت کرو کہ حالت توازن میں ا اور ب پر کے عملوں کے اجزاء عمودی بالترتیب $\frac{۵۳۷}{۹۰۰}$ و اور $\frac{۱۶۳}{۹۰۰}$ و ہوں گے۔

(۷) دو مساوی سلاخین ا ب اور ب ج، ب پر جُڑی ہوئی ہیں۔ اور ان کے نقاط وسط سے اس قدر لمبی رسی بندھی ہے کہ سلاخون کے درمیان زاویہ قائمہ ہونے کی حالت میں کس جاتی ہے۔ اگر یہ نظام نقطہ ا سے لٹکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ ا ب کا میلان سمت راس سے $\frac{1}{3}$ مس ا ہوگا اور رسی کا تناؤ اور قبضہ پر کا عمل بھی دریافت کرو۔

(۸) دو مساوی سلاخیں اب اور ب ج نقطہ ب پر جوڑ دی گئی ہیں۔ اور تین رسیوں و ا، و ب، و ج کے ذریعہ ایک کھونٹی و سے لٹکا دی گئی ہیں۔ ہر ایک سلاخ اور ہر ایک رسی کا طول ا فٹ ہے۔ اور دونوں سلاخیں اور تینوں رسیاں ایک ہی سطح میں ہیں۔ تینوں رسیوں کے تناؤ اور جوڑ پر کا عمل دریافت کرو۔

(۹) تین یکساں شہتیر اب، ب ج، ج د موٹائی میں مساوی اور طول میں بالترتیب ل، ۲ل، ل ہیں۔ ب اور ج پر قبضے لگا کر ان کو جوڑ دیا گیا ہے اور تینوں شہتیروں کو ایک چکنے کرہ پر جس کا نصف قطر ۲ ل ہے اس طرح رکھ دیا گیا ہے۔ کہ ب ج کا نقطہ وسط اور سرے ا اور د کرہ کو مس کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ ب ج کے نقطہ وسط پر کا دباؤ شہتیروں کے وزن کا $\frac{91}{100}$ ہے۔

(۱۰) تین یکساں سلاخیں اب، ب ج، ج د طول میں بالترتیب ل، م، ن ہیں۔ اور ان کے وزن ان کے طولوں کے تناسب ہیں۔ ب اور ج پر قبضے لگا کر تینوں سلاخوں کو جوڑ دیا گیا ہے۔ اور دو کھونٹیوں ط اور ق پر اس طرح رکھدیا گیا ہے۔ کہ تینوں ایک افقی خط میں ہیں تو ب اور ج پر کے عمل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ط اور ق کا درمیانی فاصلہ $\frac{ل^2}{2ل + م} + \frac{ن^2}{2ن + م} + م$ ہونا چاہئے۔

(۱۱) دو مساوی یکساں سلاخیں اب اور اج جن میں سے

ہر ایک کا طول ل ہے۔ قبضہ ا کے ذریعہ جوڑ دی گئی ہیں اور ب د ایک بے وزن سلاخ جس کا طول م ہے ایک طرف تو ب پر جوڑ دیگئی ہے۔ اور دوسری طرف ایک چکنے چھلّے د سے جو ا ج پر چڑھا ہوا ہے باندھ دی گئی ہے یہ تمام نظام ا سے لٹکا دیا گیا ہے تو ثابت کرو۔ کہ ا ج کا میلان سمت راس سے زاویہ $\text{مس}^{-1} \frac{م}{ل + \sqrt{۲ل^۲ - م^۲}}$ ہے۔

(۱۲) چار مساوی یکساں سلاخوں کو قبضے لگا کر ایک مربع شکل ا ب ج د بنائی گئی ہے۔ اور یہ نظام نقطہ ا سے لٹکا دیا گیا ہے اور ا اور ج سے رسی باندھ کر مربع کی شکل قائم رکھی گئی ہے۔ تو ثابت کرو۔ کہ رسی کا تناؤ چاروں سلاخوں کے وزن کا نصف ہے۔ اور ب یا د پر کے عمل کی سمت اور مقدار معلوم کرو۔

(۱۳) چار مساوی سلاخوں کو جوڑ کر ایک شکل معین بنائی گئی ہے۔ اور مقابل کے کونوں پر قطروں کی جگہ رسیاں باندھ دی گئی ہیں۔ اور کل نظام ایک چکنی افقی میز پر رکھدیا گیا ہے۔ تو ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ ان کے طولوں کے متناسب ہیں۔

(۲۱۴) **ریسمانی یعنی رسی کا کثیر الاضلاع**۔ اگر ایک ہلکی رسی کے سرے دو نقاط معینہ سے باندھ دئیے جائیں۔ اور اس کے مختلف نقاط پر وزن باندھ دئیے جائیں تو رسی جو شکل اختیار کرے اس کو رسی کا کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ط اور ط۱ دو نقطے ہیں جہاں رسی کے دونوں سرے بندھے ہیں۔ اور ا۱، ا۲، ا۳، ...... ان رسی کے وہ نقاط ہیں جہاں اجسام بندھے ہیں جن کے وزن بالترتیب

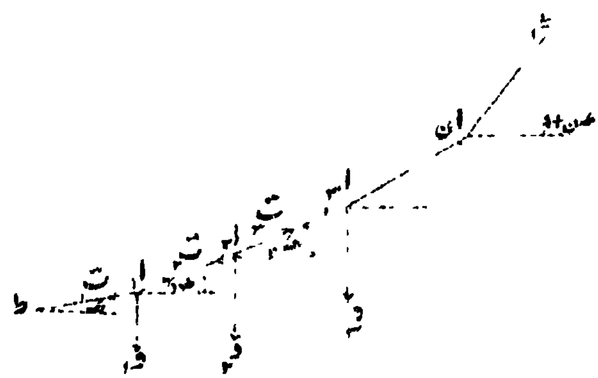
و۱، و۲، و۳، ...... ون ہیں۔

فرض کرو کہ رسی کے حصوں ط ا۱، ا۱ ا۲، ا۲ ا۳، ..... ان ط۱ کے طول بالترتیب ل۱، ل۲، ل۳، ...... لن+۱ ہیں اور ان کے میلان افق سے عہ۱، عہ۲، ...... عہن+۱ ہیں۔
فرض کرو کہ ط اور ط۱ کے درمیان افقی اور عمودی فاصلے بالترتیب ھ اور ک ہیں۔ اس لئے۔

ل۱ جم عہ۱ + ل۲ جم عہ۲ + ... + لن+۱ جم عہن+۱ = ھ ....(۱)

ل۱ جب عہ۱ + ل۲ جب عہ۲ + ... + لن+۱ جب عہن+۱ = ک ....(۲)

فرض کرو کہ ت۱، ت۲، ..... تن+۱ بالترتیب رسی کے مختلف حصوں کے تناؤ ہیں۔



یکے بعد دیگرے ہر ایک وزن کے توازن کے لئے عمودی

اور افقی سمتوں میں تحلیل کرنے سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی۔

$$\text{ت}_{2}\,\text{جب}\,\text{ع}_{2}-\text{ت}_{1}\,\text{جب}\,\text{ع}_{1}=\text{و}_{1} \quad \text{اور} \quad \text{ت}_{2}\,\text{جم}\,\text{ع}_{2}-\text{ت}_{1}\,\text{جم}\,\text{ع}_{1}=0$$

$$\text{ت}_{3}\,\text{جب}\,\text{ع}_{3}-\text{ت}_{2}\,\text{جب}\,\text{ع}_{2}=\text{و}_{2} \quad \text{اور} \quad \text{ت}_{3}\,\text{جم}\,\text{ع}_{3}-\text{ت}_{2}\,\text{جم}\,\text{ع}_{2}=0$$

$$\text{ت}_{4}\,\text{جب}\,\text{ع}_{4}-\text{ت}_{3}\,\text{جب}\,\text{ع}_{3}=\text{و}_{3} \quad \text{اور} \quad \text{ت}_{4}\,\text{جم}\,\text{ع}_{4}-\text{ت}_{3}\,\text{جم}\,\text{ع}_{3}=0$$

....

$$\text{ت}_{\text{ن}+1}\,\text{جب}\,\text{ع}_{\text{ن}+1}-\text{ت}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ع}_{\text{ن}}=\text{و}_{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \text{ت}_{\text{ن}+1}\,\text{جم}\,\text{ع}_{\text{ن}+1}-\text{ت}_{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ع}_{\text{ن}}=0$$

یہ مساواتیں تعداد میں ۲ ن ہوں گی اور یہ سب مساوات (۱) و (۲) کے ساتھ ملکر (ن + ۱) نا معلوم تناؤں اور (ن+۱) نا معلوم میلانوں کے دریافت کرنیکے لئے نظرًا کافی ہیں۔

بائیں جانب کی مساواتوں سے ظاہر ہے۔ کہ

$$\text{ت}_{1}\,\text{جم}\,\text{ع}_{1}=\text{ت}_{2}\,\text{جم}\,\text{ع}_{2}=\text{ت}_{3}\,\text{جم}\,\text{ع}_{3}=\cdots\cdots=\text{ت}_{\text{ن}+1}\,\text{جم}\,\text{ع}_{\text{ن}+1}=\text{ق}\ (\text{فرض کرو})\ \ldots(3)$$

یعنی رسی کے تناؤ کا افقی جزو ہر نقطہ پر ایک مقدار غیر متبدل ق ہے۔

مساوات (۳) سے ت_{1}، ت_{2}، ت_{3}، .... $\text{ت}_{\text{ن}+1}$ کی قیمتیں دائیں جانب کی مساواتوں میں رکھنے سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی۔

$$\text{مس}\,\text{ع}_{2}-\text{مس}\,\text{ع}_{1}=\frac{\text{و}_{1}}{\text{ق}}$$

$$\text{مس}\,\text{ع}_{3}-\text{مس}\,\text{ع}_{2}=\frac{\text{و}_{2}}{\text{ق}}$$

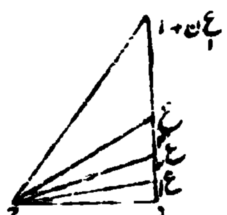
$$\text{مس}\,\text{ع}_{4}-\text{مس}\,\text{ع}_{3}=\frac{\text{و}_{3}}{\text{ق}}$$

....

مس ع$_{ن+۱}$ - مس ع$_{ن}$ = و$_{ن}$ / ق

اگر اوزان سب مساوی ہوں۔ تو اوپر کی مساواتوں کی بائیں جانب ایک ہی ہوگی۔ اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ مس ع$_{۱}$ مس ع$_{۲}$، ...... مس ع$_{ن+۱}$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے پس جب متعدد مساوی اوزان ایک رسی کے مختلف نقاط پر باندھے جائیں جیساکہ اوپر بیان ہوا۔ تو افق کے ساتھ رسی کے مختلف حصوں کے میلانوں کے مماس ایک سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔ جس کا فرق مشترک کسی ایک وزن کو رسیوں کے غیر متبدل افقی تناؤ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

(۲۱۵) **عمل ترسیمی**۔ اگر رسی کے کثیر الاضلاع میں رسی کے مختلف حصوں کے میلان معلوم ہوں۔ تو ہم عمل ہندسی سے بآسانی و$_{۱}$، و$_{۲}$، و$_{۳}$ ..... و$_{ن}$ کی نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ ج ایک نقطہ ہے اور اس نقطہ میں سے ج د ایک افقی خط کھینچا گیا ہے۔

خطوط ج ع$_{۱}$، ج ع$_{۲}$ ... ج ع$_{ن}$ رسیوں ط$_{۱}$، ا$_{۱}$ا$_{۲}$ .... ا$_{ن}$ط کے متوازی کھینچو اس سے نئے زاویے ع$_{۱}$ج د، ع$_{۲}$ج د، ...... بالترتیب عہ$_{۱}$، عہ$_{۲}$ ..... کے برابر ہوں گے۔

اب ایک عمودی خط کھینچو جو ان خطوط سے نقاط د، ع$_{۱}$، ع$_{۲}$ ..... پر

ہے تو بموجب دفعہ سابقہ

$$\frac{و_1}{ق} = مس\, ع_1 - مس\, ع_2 = \frac{د\, ع_1}{ج\, د} - \frac{د\, ع_2}{ج\, د} = \frac{ع_1\, ع_2}{ج\, د}$$

$$\frac{و_2}{ق} = مس\, ع_2 - مس\, ع_3 = \frac{د\, ع_2}{ج\, د} - \frac{د\, ع_3}{ج\, د} = \frac{ع_2\, ع_3}{ج\, د}$$ وقس علیٰ ہذا۔

لہٰذا مقادیر ق، و₁، و₂ ..... وₙ بالترتیب خطوط ج د، ع ع₁، ع₁ ع₂ ..... عₙ₋₁ عₙ کے متناسب ہیں۔ پس ان کی نسبتیں معلوم ہو گئیں۔

یہ نتیجہ اس طرح بھی نکل سکتا ہے۔ کہ ا₁ پر کے وزن کیلئے ج ع ع₁ قوتوں کا مثلث ہے۔ اسی طرح ا₂ پر کے وزن کیلئے ج ع₁ ع₂ قوتوں کا مثلث ہے اور باقی اوزان کے لئے بھی اسی طرح۔

اگر رسی کے کثیر الاضلاع میں ق، و₁ ..... وₙ معلوم ہوں۔ اور رسی کے کوئی سے دو حصوں کی سمتیں بھی معلوم ہوں تو ہم باقی رسیوں کی سمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔ ایک عمودی خط کھینچو اور اس پر فاصلے ع ع₁، ع₁ ع₂، ع₂ ع₃ .... اوزان و₁، و₂ .... کے متناسب قطع کرو۔ اگر رسی کے حصوں و ا₁ اور ا₁ ا₂ کی سمتیں معلوم ہوں تو ع ج اور ع₁ ج ان کے متوازی کھینچو۔ اس طرح سے نقطہ ج معلوم ہو جائیگا۔ اگر ج کو نقاط ع₂، ع₃ ..... سے ملا دیں۔ تو باقی رسیوں کی سمتیں بھی معلوم ہو جائیں گی۔

(۲۱۶) لچکدار رسیوں کے تناؤ۔ اس کتاب میں ہم ...

یہ فرض کیا ہے۔ کہ بیلوں کو خواہ کتنا ہی کھینچیں۔ ان کے طول میں فرق نہیں آتا۔ عملاً کھینچنے سے ہر ایک رسی کے طول میں کچھ نہ کچھ فرق ضرور آتا ہے۔ اگرچہ اکثر صورتوں میں ہو کو کھینچنے سے اس قدر کم فرق پڑتا ہے کہ اسے نظر انداز کرسکتے ہیں۔ لیکن جب رسی کے طول میں اس قدر زیادہ فرق پڑے کہ نظر انداز نہ ہو سکے تو رسی کے تناؤ اور اس کے طول کی زیادتی میں ایک سادہ باہمی تعلق ہے۔ جو تجربہ کرنے سے معلوم ہوا ہے اور وہ صورت ذیل میں بیان ہو سکتا ہے۔

جس طرح ایک لچکدار رسی کے اصلی طول کی زیادتی بدلتی ہے۔ اسی طرح رسی کا تناؤ بدلتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک رسی کا طول ایک فٹ ہے۔ اگر وہ تن کر پہلے ۱۳ انچ ہو جائے۔ پھر اور زیادہ تن کر ۱۵ انچ ہو جائے تو ان دونوں حالتوں میں رسی کے تناؤں کی نسبت

۱۳ - ۱۲ : ۱۵ - ۱۲ یعنی ۱ : ۳ ہو گی۔

اس قانون کی تصدیق بذریعہ تجربہ اس طرح ہو سکتی ہے۔ ایک تار کی کمانی یا ربڑ کا تسمہ لے کر اس کا ایک سرا ایک نقطہ معینہ سے باندھ دو اور دوسرے سرے ب پر مختلف اوزان لٹکا کر دیکھو کہ ہر ایک وزن سے طول میں کس قدر زیادتی ہوتی ہے۔

یہ زیادتیاں ان مختلف اوزان کے متناسب پائی جائیں گی اوزان کی مقدار کمانی یا ربڑ کی مضبوطی پر منحصر ہے۔ بڑے بڑے

وزن اس قدر نہ ہو۔ کہ اس سے کمانی یا ربڑ بالکل ٹوٹ جائے یا ہمیشہ کے لئے اس کی شکل میں تبدیلی یا نقص پیدا ہوجائے

(۲۱۷) طالب علم کو یہ بخوبی یاد رکھنا چاہئے کہ رسی کا تناؤ اس سارے طول کے تناسب نہیں ہے جو کس جانیکے بعد ہوتا ہے۔ بلکہ رسی کے اصلی طول میں جس قدر زیادتی واقع ہوتی ہے۔ تناؤ اس زیادتی کے تناسب ہوتا ہے۔

اس قانون کو ہک (۱۶۳۵ء تا ۱۷۰۳ء) نے دریافت کیا تھا۔ اور ان لفظوں میں بیان کیا تھا۔ "جیسا بڑھاؤ ویسا تناؤ" اس قاعدہ سے ہم بآسانی تناؤ دریافت کرنے کا ضابطہ بنا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ رسی کا اصلی طول بغیر کسنے کے ا ہے۔ اور جب کس کر رسی کا طول لا ہوتا ہے۔ تو فرض کرو۔کہ رسی کا تناؤ ت ہے تو بموجب قانون بالا ت $\propto$ لا - ا

یہ عام طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$ت = ل \times \frac{لا - ا}{ا}$$

جہاں $\frac{ل}{ا}$ تغیر کی مقدار مستقل ہے۔

مقدار ل کا انحصار رسی کی موٹائی اور مضبوطی پر ہے اس کو رسی کی لچک کا مقیاس کہتے ہیں۔

یہ مقیاس فی الحقیقت اس قوت کے برابر ہے۔ جو رسی کو ایک افقی چکنی میز پر کھینچکر طول میں دوگنا کردے۔ کیونکہ اگر لا = ۲ا تو رسی کا تناؤ = ل $\times \frac{۲ا - ا}{ا}$ = ل

لیکن کوئی رسی بیحد نہیں کھچ سکتی۔ جب رسی کھچکر ٹوٹنے کی حد تک پہنچ جائے۔ تو اس وقت کا تناؤ توڑ تناؤ یا توڑنیولا تناؤ کہلاتا ہے۔

ہک کا قانون فولاد یا دیگر اشیاء کے بنے ہوے ڈنڈوں یا سلاخوں کے لئے بھی درست ہے۔ لیکن ان صورتوں میں طول کی زیادتی نہایت ہی کم ہوتی ہے۔ ایک ڈنڈے یا سلاخ کو کھینچکر طول میں دوگنا نہیں کر سکتے۔ لیکن ل کی قیمت اس قوت سے سوگنا ہوگی۔ جو ڈنڈے کو کھینچکر اس کے اصلی طول کو بقدر $\frac{1}{100}$ بڑھا دے کیونکہ اگر لا-ا = $\frac{1}{100}$ تو

$$ت = \frac{ل}{100}$$

ت کی قیمت سلاخ کی موٹائی پر بھی منحصر ہوگی اور عموماً ایسی سلاخ لی جاتی ہے۔ جس کی تراش عمودی ایک مربع انچ ہو۔ اس طرح سے معلوم کیا گیا ہے۔ کہ ایک فولادی سلاخ کی لچک کا مقیاس ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے۔

دفعہ ۱۲۴ کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ ایک لچکدار رسی کو کھینچنے میں جو کام کیا جاتا ہے۔ وہ دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے ایک تو طول کی زیادتی دوسرے اول اور آخر تناؤں کا اوسط۔

مثال۔ اب ج ایک لچکدار رسی ہے۔ جو نقطہ ا سے عموداً لٹک رہی ہے۔ نقاط ب اور ج پر بالترتیب اوزان ۲ و اور و بند ہے ہیں۔ اگر رسی کی لچک کا مقیاس ۳ و ہو

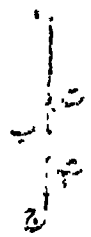
تو رسی کے دونوں تنے ہوئے حصوں کے تنے ہوئے طولوں کی نسبتیں اصلی طولوں سے دریافت کرو۔

فرض کرو۔ کہ د اور د، حصص اب اور ب ج کے اصلی طول ہیں اور تنی ہوئی حالت میں ان کے طول لا اور ما ہیں اور فرض کرو کہ ان کے تناؤ ت اور ت، ہیں۔

$$\text{ت} = \text{ل} \times \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{د}} = \text{۳ و} \, \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{د}}$$

$$\text{اور} \quad \text{ت،} = \text{ل} \times \frac{\text{ما} - \text{د،}}{\text{د،}} = \text{۳ و} \times \frac{\text{ما} - \text{د،}}{\text{د،}}$$

ب اور ج کے توازن سے



$$\text{ت} - \text{ت،} = \text{۲ و} \quad \text{اور} \quad \text{ت،} = \text{و}$$

$$\therefore \text{ت} = \text{۳ و}$$

$$\therefore \text{۳ و} \times \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{د}} = \text{۳ و}$$

$$\text{اور} \quad \text{۳ و} \times \frac{\text{ما} - \text{د،}}{\text{د،}} = \text{و}$$

$$\therefore \text{لا} = \text{۲ د} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}} \text{د،}$$

یعنی تنی ہوئی حالت میں طول پہلے سے بالترتیب دوگنا اور $\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$ گنا ہیں۔

امثلہ نمبری (۳۷)

(۱) اب ج ایک لچکدار رسی نقطہ ا پر بندھی ہے۔ اسکی لچک کا مقیاس ۴ و ہے۔ ب اور ج پر اوزان و، و بندھے ہیں۔ بغیر تنے کے اب اور ب ج کے طول مساوی ہیں اور د کے برابر ہیں تو ثابت کرو کہ جب رسی

اور دونوں وزن سمت عمودی میں توازن اختیار کریں گے تو رسیاں
اب اور ب ج کے طول ۳ د اور ۴ د ہوں گے۔

(۲) ایک لچکدار رسی کے دونوں سرے دو نقاط سے بندھے ہیں۔ جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔ رسی پہلے تنی کسی ہوئی ہے کہ اس کے طول میں زیادتی نہیں ہوتی۔ اب اس کے نقطہ وسط پر وزن و باندھ دیا گیا ہے۔ اگر لچک کا مقیاس $\frac{و}{\sqrt{۲}}$ ہو۔ تو ثابت کرو کہ حالت توازن میں رسی کے دونوں حصوں کا درمیانی زاویہ ۹۰ ہوگا۔

(۳) اوپر کے سوال میں اگر دونوں نقاط کا فاصلہ ۲ ا ہو۔ اور رسی کا اصلی طول ۲ د ہو اور لچک کا مقیاس ل ہو۔ تو ثابت کرو کہ سمت راس سے رسیوں کا میلان طہ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا۔

$$\frac{و}{۲ل} \text{ مس } طہ + \text{ جب } طہ = \frac{ا}{د}$$

(۴) ایک جسم ایک کھردری سطح پر پڑا ہے۔ جس کا میلان افق سے عہ ہے۔ زاویہ رگڑ لہ ہے اور عہ، لہ سے بڑا ہے اور جسم اس طرح ساکن ہے۔ کہ ایک رسی ایک طرف تو جسم سے بندھی ہے اور دوسری طرف سطح کے ایک نقطہ سے بندھی ہے۔ اگر لچک کا مقیاس جسم کے وزن کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ حالت توازن میں رسی کے طول کی نسبت اسکے اصلی طول سے ۱ + جب (عہ - لہ) قط لہ ہوگی۔

(۵) چار مساوی سلاخیں چکنے قبضوں کے ذریعہ جوڑی گئی ہیں

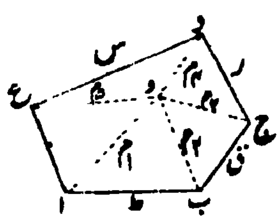
ہر ایک کا طول ا ہے اس ڈھانچہ کو ایک کونے سے لٹکادیا گیا ہے۔ اور اس کونے اور مقابل کے کونے کو ایک لچکدار رسی سے باندھ دیا گیا ہے۔ اگر یہ ڈھانچہ مربع کی شکل میں لٹکے ۔ اور رسی کی لچک کا مقیاس ایک سلاخ کے وزن کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا اصلی طول $\frac{\text{ا} \sqrt{\text{۲}}}{\text{۳}}$ ہے۔

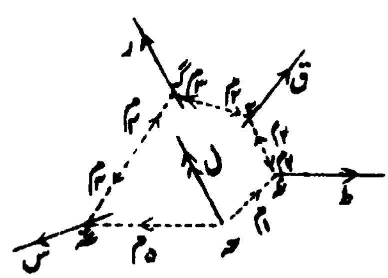
(۶) ایک لچکدار رسی کا اصلی طول ۱۰ انچ ہے۔ ایک پانچ پونڈ وزن کی قوت اس کو کھینچکر ۱۵ انچ کر دیتی ہے۔ تو معلوم کرو کہ ۱۲ انچ سے ۱۵ انچ لمبا کرنے میں کس قدر کام ہوگا؟

(۷) ایک چکردار کمانی کے طول کو ایک انچ بڑھانے کے لئے ایک پونڈ وزن کی قوت درکار ہے۔اس کے طول کو ۳ انچ اور بڑھانے میں کس قدر کام کرنا پڑے گا۔؟

ترسیمی عمل

(۲۱۸) ایک سطح میں قوتوں کی کوئی سی تعداد عمل کرتی ہے ان کا حاصل دریافت کرو۔





فرض کرو کہ قوتیں ط، ق، ر، س ایک سطح میں عمل کرتی ہیں

ے خطوط عمل دائیں ہاتھ کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔
، شکل اب ج د ع ایسی کھینچو جس کے اضلاع
ب، ب ج، ج د، د ع بالترتیب ط، ق، ر، س
، متوازی اور تناسب ہو۔ اع کو ملاؤ۔
ں کے کثیر الاضلاع کے مسئلے کے بموجب اع حاصل مطلوب
مقدار اور سمت میں تعبیر کرے گا۔ اس کا خط عمل دریافت

درکار ہے۔
ئی نقطہ و لو۔ اور و کو ا، ب، ج، د اور ع سے ملاؤ۔
، فرض کروکہ ان خطوط وصل کے طول بالترتیب م$_1$، م$_2$، م$_3$، م$_4$، م$_5$ ہیں
ب قوت ط کے خط عمل پر کوئی سا نقطہ عہ لو۔ اور ب و
ے متوازی خط عہ بہ کھینچو جو ق سے نقطہ بہ پر ملے اسی
رح بہ گہ، ج و کے متوازی کھینچو تاکہ ر سے گہ پر ملے۔
ر گہ تھ، د و کا متوازی کھینچو تاکہ س سے تھ پر ملے۔
ھ میں سے ایک خط ع و کا متوازی کھینچو اور عہ میں سے
یک خط و ا کا متوازی کھینچو۔ فرض کروکہ یہ دونوں خط نقطہ
حہ پر ملتے ہیں۔
حہ میں سے حہ ل، اع کا متوازی اور مساوی کھینچو۔ تو
حہ ل حاصل مطلوب کا خط عمل ہوگا اور اس کی مقدار کو
عبیر کرے گا۔ پیمانہ وہی ہوگا جس کے مطابق اب، ط کو
تعبیر کرتا ہے۔
ثبوت۔ چونکہ اب، ط کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لئے قوت ط

دو ایسی قوتوں کے مساوی ہے۔جو او اور وب سے تعبیر ہوتی ہیں۔ اس لئے قوت ط کی بجائے دو قوتیں م۱ اور م۲ بالترتیب حہ عہ اور بہ عہ کی سمتوں میں لگائی جا سکتی ہیں۔ اسی طرح ق کی بجائے دو قوتیں م۲ اور م۳ بالترتیب عہ بہ اور گہ بہ کی سمتوں میں لگائی جا سکتی ہیں اور ر کی بجائے دو قوتیں م۳ اور م۴ بالترتیب بہ گہ اور تھ گہ کی سمتوں میں اور س کی بجائے دو قوتیں م۴ اور م۵ بالترتیب گہ تھ اور حہ تھ کی سمتوں میں لگائی جا سکتی ہیں۔ ان کو لگا ہوا فرض کرو۔

اس لئے قوتوں ط، ق، ر، س کی بجائے ایسی قوتیں لگائی گئی ہیں جو شکل عہ بہ گہ تھ حہ کے اضلاع کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور جن میں سے قوتیں عہ بہ اور بہ گہ اور گہ تھ متوازن ہیں۔

لہذا اب صرف دو قوتیں باقی رہیں۔ جو نقطہ حہ پر عمل کرتی ہیں اور سمت اور مقدار میں خطوط او اور وع سے تعبیر ہوتی ہیں اور جن کا حاصل اع سے تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ حہ ل، اع کے متوازی اور مساوی ہے۔ اس لئے یہ خط حہ ل حاصل مطلوب کو مقدار میں تعبیر کرتا ہے۔ اور اس کا خط عمل بھی ہے۔

اب ج دع جیسی شکل کو قوائی کثیر الاضلاع کہتے ہیں اور عہ بہ گہ تھ حہ جیسی۔ شکل کو ریسمانی کثیر الاضلاع کہتے ہیں

کیونکہ یہ رسیوں یا کڑیوں کے وصل کئے ہوئے متوازن سلسلے کو تعبیر کرتی ہے۔

(۲۱۵) اگر قوائی کثیر الاضلاع کا نقطہ ع نقطہ ا پر منطبق ہو۔ تو کثیر الاضلاع بند کہلاتا ہے۔ اس صورت میں حاصل قوت صفر ہوتی ہے۔

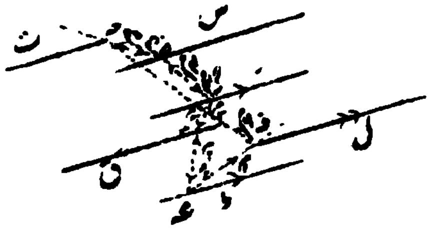
اگر قوائی کثیر الاضلاع بند ہو۔ اور رسیمانی کثیر الاضلاع بند نہ ہو یعنی اگر تھ حہ اور عہ حہ نہ ملیں۔

تو اس صورت میں دو قوتیں باقی رہیں گی۔ جن میں سے ایک نقطہ تھ پر و ع کے متوازی اور دوسری نقطہ عہ پر اؤ کے متوازی عمل کرے گی۔ یعنی دو متساوی متوازی مخالف قوتیں جفت کی صورت میں حاصل ہوں گی۔ اگر رسیمانی کثیر الاضلاع بھی بند ہو جائے۔ تو تھ حہ عہ ایک خط مستقیم ہوگا۔ اور یہ دو متساوی متقابل متوازی قوتیں ایک خط مستقیم میں ہوں گی۔ لہذا متوازن ہوں گی۔

پس اگر قوتیں ط، ق، ر، س متوازن ہوں۔ تو قوائی کثیر الاضلاع اور رسیمانی کثیر الاضلاع دونوں بند ہوں گے۔

(۲۲۰) اگر قوتیں متوازی ہوں۔ تو عمل وہی ہوگا جو پچھلی دفعہ میں ہوا۔ ذیل کی شکل متوازی قوتوں کے واسطے بنائی گئی ہے جن میں سے دو کی ایک ہی سمت ہے اور باقی تین کی سمت ان کے مخالف ہے۔

شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو

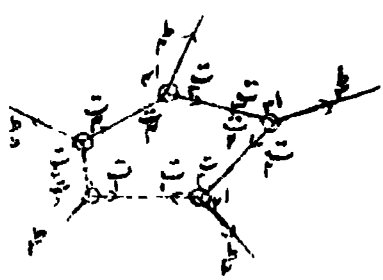


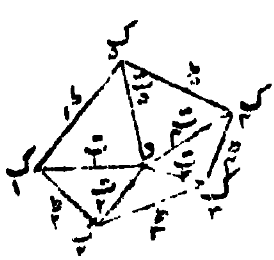


چونکہ ط، ر،اس کی سمت ایک ہے۔ اس لئے اب،ج د، دع ایک سمت میں ہیں۔ اور ق اور ت مخالف سمت میں ہیں۔ لہذا ب ج اور ع ف مخالف سمت میں ہیں۔ ثبوت کا طریقہ وہی ہے جو پچھلی دفعہ میں استعمال ہوا۔

خط فہ ل جو ا ف کے متوازی اور تساوی ہے۔ حاصل مطلوب کو مقدار میں تعبیر کرتا ہے۔ اور اس کا خط عمل بھی یہی ہے متعدد اوزان کا حاصل صریحاً اس طریق بالا سے معلوم ہوسکتا ہے۔

(۲۲۱) چند ہلکی سلاخوں کے سرے کھلتے ہوئے قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر ایک بند کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے۔ اور اس کے کونوں پر متوازن قوتوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے۔ تو سلاخوں میں کے عمل دریافت کرو۔





فرض کرو کہ ا۱ ا۲ ا۳ ا۴ ا۵ ہلکی سلاخوں کا ایک مخمس ہے جس کے کونوں پر کھیلتے ہوئے جوڑ ہیں۔ اور فرض کرو کہ جوڑوں پر بالترتیب قوتیں ط۱، ط۲، ط۳، ط۴، ط۵ عمل کرتی ہیں جیسا کہ شکل میں ہے فرض کرو کہ سلاخوں میں کے عمل ت۱، ت۲، ت۳، ت۴، ت۵ ہیں۔ جیسا کہ شکل میں نشان دیا گیا ہے۔

ک۱ ک۲ ک۳ ک۴ ک۵ ایک مخمس بناؤ جس کے اضلاع قوتوں ط۱، ط۲، ط۳، ط۴، ط۵ کے متوازی اور تناسب ہوں چونکہ قوتیں متوازن ہیں۔ اس لئے یہ شکل بند ہوگی۔ ک۲ میں سے خط ک۱ و، ا۱ا۲ کے متوازی اور ک۵ میں سے ک۵ و، ا۵ا۱ کے متوازی کھینچو۔

اب مثلث ک۵ و ک۱ کے اضلاع، جوڑ ا۱ پر عمل کرنے والی قوتوں ط۱، ت۱، ت۵ کے متوازی ہیں۔ لہذا یہ ان قوتوں کے تناسب بھی ہوں گے۔ پس جس پیمانہ پر ط۱ کو ک۵ ک۱ تعبیر کرتا ہے۔ اسی پیمانہ پر ت۵ اور ت۱ کو و ک۵ اور ک۱ و تعبیر کریں گے۔

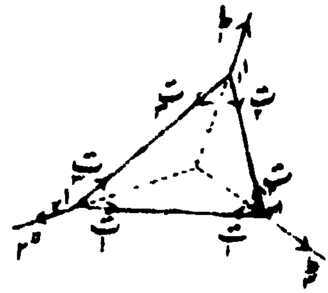
و ک۲، و ک۳، و ک۴ کو ملاؤ۔

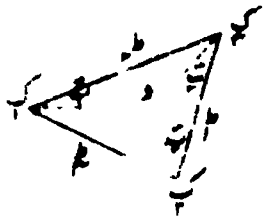
ا۲ پر عمل کرنے والی تین قوتوں میں سے دو یعنی ط۲ اور ت۱ اضلاع ک۱ ک۲ اور و ک۱ سے تعبیر ہوتی ہیں۔ لہذا ک۲ و جو ک۱ و ک۲ کی تکمیل کرتا ہے تیسری قوت ت۲ کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے گا۔

اسی طرح و ک۳ اور و ک۴، ت۳ اور ت۴ کو تعبیر کریں گے۔

اس لئے خطوط وک۱، وک۲، وک۳، وک۴، وک۵ مقدار اور سمت
میں ان قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں جو ڈھانچے کے اضلاع کی سیدھ
میں عمل کرتی ہیں۔
شکل ک۱ ک۲ ک۳ ک۴ ک۵ کو قوائی کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔
ڈھانچے کے خواہ کتنے ہی اضلاع ہوں۔ عمل یہی ہوگا۔
(۲۲۲) یہ ظاہر ہے کہ پچھلی دفعہ کی شکلیں اور عمل فی الحقیقت
وہی ہیں۔ جو دفعہ ۲۱۸ میں ہیں۔
اگر بائیں جانب کی شکل سلاخوں کا ڈھانچہ ہو جس کے کونوں پر
ک۱ و، ک۲ و ...... کی سمتوں میں قوتیں عمل کرتی ہوں۔ تو
دائیں جانب کی شکل ا۱ ا۲ ا۳ ا۴ ا۵ ڈھانچے کا قوائی کثیر الاضلاع ہوگا۔
کیونکہ ا۱ ا۲، ا۲ ا۳ بالترتیب ک۱ و، ک۲ و .... کے متوازی ہیں
پس اگر ان دو شکلوں میں سے کوئی ایک بطور ڈھانچہ یا ریسمانی
کثیر الاضلاع کے مانی جائے۔ تو دوسری شکل قوائی کثیر الاضلاع
ہوگی۔ایسی شکلوں کو متکافی کہتے ہیں۔
ہم ایک اور مثال مثلثی ڈھانچے کی دیتے ہیں۔ جس کے جوڑوں
پر عمل کرنے والی قوتیں ط۱، ط۲، ط۳ متوازن ہیں۔ اور جس کا قوائی
کثیر الاضلاع شکل ک۳ ک۲ ک۱ ہے۔ اور برعکس اس کے اگر
ڈھانچہ ک۱ ک۲ ک۳ ہو جس پر قوتیں ت۱، ت۲، ت۳ عمل کریں
تو قوائی کثیر الاضلاع ا۲ ا۳ ا۱ ہوگا۔

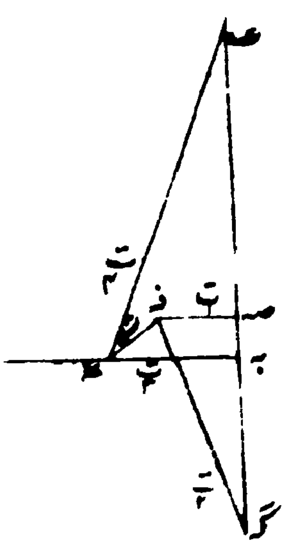
شکل دوسرے صفحہ پر دیکھو

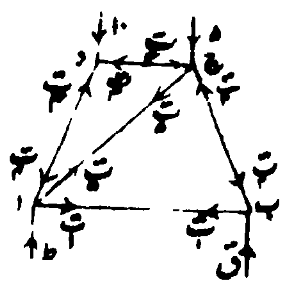




(۲۲۳) مثال-(۱) اب ج د ہلکی سلاخوں کا ایک ڈھانچہ ہے اور ایک پٹی ا ج کے ذریعہ اس کو مستحکم کردیا گیا ہے۔ وہ ڈھانچہ سطح عمودی میں اس طرح ساکن ہے۔ کہ نقاط ا اور ب دو سہاروں پر رکھ دئے گئے ہیں اور اب افقی ہے۔

اور اب، ب ج، ج د، د ا کے طول بالترتیب ۴،۳،۲،۳ فٹ ہیں اور اب اور ج د متوازی ہیں۔ اور ا د اور ب ج، اب کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔ اگر ۵ اور ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کے وزن بالترتیب ج اور د پر رکھدئے جائیں۔ تو ا اور ب پر کے سہاروں کے عمل اور ڈھانچے کے مختلف حصوں کے عمل دریافت کرو۔





فرض کرو کہ ڈھانچے کے مختلف حصوں میں قوتیں اسی طرح عمل کرتی ہیں۔ جس طرح شکل میں نشان دئے گئے۔ اور فرض کرو کہ ا اور ب پر کے عمل ط اور ق ہیں۔

ایک عمودی خط عہ بہ طول میں ۵ انچ کھینچو۔ تاکہ د پر کے وزن ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کو تعبیر کرے۔ اور عہ تھ، اد کے متوازی اور بہ تھ، ج د کے متوازی کھینچو۔ تو جوڑ د کیلئے قوتوں کا مثلث عہ بہ تھ ہے۔ اور د پر قوتین نشاں دادہ سمتوں میں ہوں گی۔

واضح رہے۔ کہ ج پر سلاخ د ج میں کا عمل یا تو د ج کی سمت میں ہوگا یا ج د کی سمت میں۔ اور اسی سلاخ میں کا عمل د پر یا تو ج د کی سمت میں ہوگا یا د ج کی سمت میں

(یہ عام اصول یاد رکھنے کے قابل ہے۔ کہ اگر کسی سلاخ کے طول کی سمت میں زور پڑے۔ تو اس کی دو صورتیں ہوتی ہیں ایک تو یہ کہ سلاخ کے اجزا اندر کی طرف دبتے ہیں۔ اور اس دباؤ کا مقابلہ کرتے ہیں دوسری یہ کہ اجزا باہر کی طرف کھچتے ہیں۔ اور اس کھچاؤ کا مقابلہ کرتے ہیں۔

پہلی صورت میں ہر ایک سرے پر کا عمل سلاخ کے مرکز سے سرے کی طرف ہے اور اڑ کہلاتا ہے اور دوسری صورت میں سروں سے مرکز کی طرف ہے۔ اور بند کہلاتا ہے۔

ہر صورت میں دونوں سروں کے عمل متساوی اور متقابل ہوتے ہیں)

ب گہ عمودی سمت میں اور طول میں ½ ۲ انچ کھینچو۔ تاکہ ج پر کے وزن کو تعبیر کرے۔ اور گہ فہ ، ب ج کے متوازی اور تھ فہ ، ا ج کے متوازی کھینچو۔ تو جوڑ ج کے لئے قوائی کثیر الاضلاع تھ ب گہ فہ تھ ہے اس لئے ج پر کے عمل وہ ہیں جن کے نشان دئے گئے ہیں۔

فہ صہ خط افقی کھینچو تاکہ عہ گہ تے صہ پر ملے تو فہ گہ صہ ، ب کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔ اس لئے عمل ق کو گہ صہ تعبیر کرتا ہے اور ت کو صہ فہ۔ جوڑ ا کا کثیر الاضلاع تھ فہ صہ عہ تھ ہے اس لئے ط کو صہ عہ تعبیر کرتا ہے۔

انچوں میں ناپنے سے۔

فہ صہ = ۱۰۱ء۱ ، گہ فہ = ۳۱ء۳ ، تھ ب = ۷۷ء۱

تھ عہ = ۳۰ء۵ ، تھ فہ = ۹۱ء ، گہ صہ = ۱۲۵ء۳

صہ عہ = ۳۷۵ء۴

چونکہ ایک انچ ۲ ہنڈرڈ ویٹ کو تعبیر کرتا ہے اس لئے مختلف عملوں کی مقداریں ہنڈرڈ ویٹوں میں یہ ہوئیں۔

$ت_۱$ = ۲۰ء۲ ، $ت_۲$ = ۶۲ء۶ ، $ت_۳$ = ۵۴ء۳ ،

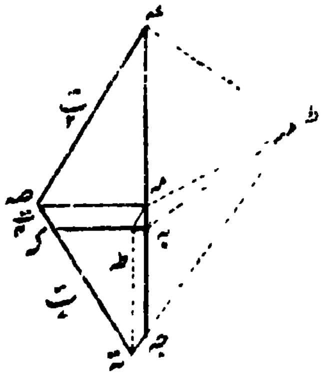
$ت_۴$ = ۰۶ء۱ ، $ت_۵$ = ۸۲ء۱ ، ق = ۲۵ء۶ ،

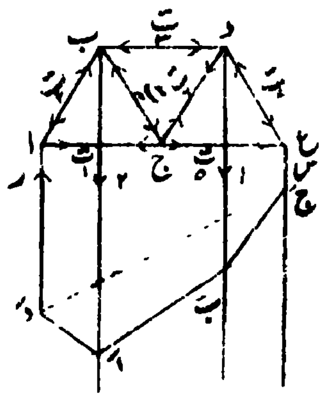
ط = ۷۵ء۸

یہ بھی معلوم ہو گیا ہو گا کہ سلاخیں اب اور اج کچھ رہی زیر یعنی وہ بند ہیں اور باقی سلاخیں دب رہی ہیں یعنی وہ اڑہیر

ط اور ق کی قیمتیں بموجب عمل دفعہ ۲۲۰ بھی معلوم ہو سکتی ہیں جیساکہ آیندہ مثال میں ر اور س کی قیمتیں دریافت کی گئی ہیں۔

مثال (۲) وارن شہتیر کا ایک حصہ تین ہلکے متساوی الاضلاع مثلثوں اب ج، ج ب د، ج د ع سے ملکر بنا ہوا ہے۔ ا اور ع پر دو سہارے ہیں جن پر یہ ٹنگا ہوا ہے اور اج ع متوازی الافق ہے ب اور د پر وزن ۲ اور ایک ٹن لٹکائے گئے ہیں مختلف اجزا میں کے عمل دریافت کرو۔





عمودی خط عہ یہ، بہ جہ بالترتیب ۲ انچ اور ۱ انچ کے برابر کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ۲ ٹن اور ایک ٹن کو تعبیر کرتے ہیں کوئی قطب ط مقرر کرو اور ط عہ، طہ بہ، ط جہ کو ملاؤ۔ ۲ ٹن وزن کے خط عمل پر کوئی نقطہ اَ لو اَ دَ کو عہ طہ کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ عمل رسے دَ پر ملتا ہے اَ بَ کو بہ ط کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ دمیں سے گزرنے والے خط عمودی سے بَ پر ملتا ہے اسی طرح

ب جَ کو جہ ط کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ س کو نقطہ جَ پر قطع کرتا ہے جَ دَ کو ملاؤ تب اَ بَ جَ دَ ایک ریسمانی کثیر الاضلاع ہے جس کا (اگر ہم ط مہ کو جَ دَ کے متوازی کھینچیں) عہ بہ جہ مہ قوائی کثیر الاضلاع ہو گا۔
(جو اس صورت میں خط مستقیم ہے) اس لئے معلوم ہوا کہ مہ عہ سے عمل ر تعبیر ہوتا ہے اور جہ مہ سے س۔
فرض کرو کہ سلاخوں میں کی قوتیں خواہ وہ دافعہ ہوں یا جاذبہ ت، ت ... ہیں جس طرح کہ شکل میں دکھائی گئی ہیں مہ صہ کو متوازی اب کے کھینچو تب عہ صہ مہ جوڑ ا کے لئے قوتوں کا مثلث ہوگا یعنی عہ صہ اور عہ مہ تناؤ ت اور ت کو تعبیر کریں گے۔
صہ کہ اور بہ کہ کو بالترتیب ب ج اور ب د کے متوازی کھینچو تب صہ عہ بہ کہ جوڑ ب کے لئے قوائی کثیر الاضلاع ہوگا یعنی ت اور ت بالترتیب صہ کہ اور کہ بہ سے تعبیر ہوں گے۔
مہ طہ کو د ج کے متوازی کھینچو تب مہ صہ کہ طہ جوڑ ج کے لئے قوائی کثیر الاضلاع ہوگا یعنی کہ طہ اور طہ مہ تناؤ ت اور ت کو تعبیر کریں گے۔ جہ تہ کو د ج کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ صہ کہ ممدودہ سے نقطہ تہ پر ملتا ہے تب کہ بہ جہ تہ جوڑ د کے لئے قوائی کثیر الاضلاع ہے۔
یعنی جہ تہ اور تہ کہ بالترتیب ت اور ت کو تعبیر کرتے ہیں۔

[اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جہ تہ لازماً مہ طہ کے مساوی اور متوازی ہے اور اس لئے ضرور ہے کہ تہ طہ، جہ مہ کے مساوی اور متوازی ہو اور اس لئے س کو تعبیر کرے]

اخیر میں تہ طہ کہ جوڑ ع کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔

اس لئے اگر ہم طول عہ مہ، مہ بہ، صہ نہ، صہ عہ، کہ بہ، صہ کہ، کہ طہ، طہ مہ، تہ کہ کو انچوں میں تعبیر کریں تو ہمیں س، ت، ت، ت، ت، ت، ت، ت کی قیمتیں بالترتیب ٹنوں میں حاصل ہوں گی۔

ٹن وزن ۱۰۴۴ اور ۲۹ء۱، ۲ء۲، ۲۹ء۸۶، ۲۶ء۰۲، ۱۰ء۱۱، ۲۵ء۱۱، ۵ء۷ ہیں اور ۵۹ بالترتیب

شکل سے ظاہر ہے کہ اج، ج ع، اور ج د سب بند ہیں اور باقی سب اڑیں ہیں۔

امثلہ نمبری (۳۸)

امثلہ ذیل کو ترسیمی طریقوں سے حل کرو

(۱) ایک یکساں مثلثی تختی اب ج وزنی ۳۰ پونڈ سطح عمودی میں ایک قبضہ ب کے گرد گھوم سکتی ہے ب ج کے نقطہ وسط پر ایک کھونٹی ہے جس کے ذریعہ تختی کو اس طرح سہارا گیا ہے کہ حالت سکون میں اب متوازی الافق ہے اگر اضلاع اب، ب ج، ج ا کے طول بالترتیب ۶، ۵، ۴ فٹ ہوں تو کھونٹی پر کا دباؤ اور قبضہ پر کا عمل دریافت کرو۔

(۲) ایک ۳۰ فٹ لمبی یکساں سیڑھی کا ایک سرا ایک چکنی

دیوار کے ساتھ اور دوسرا کھردری زمین پر ٹکا ہوا ہے دیوار سے سیڑہی کے نچلے سرے کا فاصلہ ۱۰ فٹ ہے اگر سیڑہی کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہو تو اس کے نچلے سرے پر زمین کی حاصل قوت دریافت کرو (۱) جبکہ سیڑہی پر کوئی اور بوجھ نہ عمل کرے (۲) جبکہ ایک ہنڈرڈ ویٹ وزن سیڑہی کے ایک ایسے نقطہ پر عمل کرتا ہے جس کا فاصلہ سیڑہی کے نچلے سرے سے کل طول کا $\frac{3}{4}$ ہے۔

(۳) ایک سطح مائل کا زاویہ میلان ۴۵° ہے اور تجربہ سے یہ دیکھا گیا ہے کہ سطح کے متوازی عمل کرنے والی ایک ۱۰ پونڈ وزنی قوت ایک ۱۰ پونڈ وزن کو اوپر کے طرف حرکت دینے کے لئے عین کافی ہے وزن اور سطح کی باہمی قدر فرکـ دریافت کرو۔

(۴) ایک گول چپٹی تختی ایک چکنی میز پر پڑی ہے تین قوتیں بالترتیب ۵۰۵، ۴۲۴۴، ۳۸۵ پونڈ وزنی تختی کے تین نقاط پر عمل کرتی ہیں عمل ہندسی کے ذریعہ قوتوں کو تختی پر اس طرح لگاؤ کہ تختی متوازن رہے اور قوتوں کے درمیانی زاویوں کی مقداریں درجوں میں دریافت کرو۔

(۵) ایک یکساں مستطیلی کندہ کے مرکز ثقل میں سے گزرنیوالی متشاکل تراش اب ج د ہے اور کندہ ایک کھردری سطح افقی پر جس کی قدر فرک $\frac{1}{2}$ ہے اس طرح ساکن ہے کہ تراش کا ضلع ج د زمین پر ٹکا ہوا ہے کندہ کا وزن ۴۰ پونڈ ہے

اور ایک ۱۰ پونڈ وزنی قوت نقطہ د پر سمت ج د میں عمل کرتی ہے اگر ب ج اور ج د کے طول بالترتیب ۳ اور ۵ فٹ ہوں تو ایک چھوٹی سی چھوٹی قوت دریافت کرو جس کو اگر ج ب کے نقطہ وسط پر قطر د ب کے متوازی لگایا جائے تو کندہ ... ہلنے کو ہو۔

(۶) ایک ۱۰۰ پونڈ وزنی جسم ایک کھردری سطح مائل پر ساکن ہے سطح کا میلان ۳ میں ۱ ہے اور اس کی قدر فرک ½ ہے اگر وزن پر ایک ایسی قوت لگائی جائے جو سطح سے ۴۰° کا زاویہ بنائے اور جسم کو اوپر کے طرف حرکت دینے کے لئے عین کافی ہو تو اس کی مقدار دریافت کرو۔ نیز ایک ایسی قوت دریافت کرو جو سطح سے ۴۰° کا زاویہ بنائے اور جسم کو حرکت دینے کے لئے عین کافی ہو۔

(۷) ایک مثلث اب ج کے اضلاع اب، ب ج، ج د بالترتیب ۱۳، ۱۴ ، ۱۰ اور ۱۵ انچ ہیں اور نقطہ ب سے ج ا پر عمود ب د ہے ذیل کی قوتوں کے حاصل کی مقدار اور خط عمل قوائی اور بیانی کثیر الاضلاع کے ذریعے دریافت کرو۔

قوت ۱۸ ا سے ج کی سیدھ میں اور ۸، ج سے ب کی سیدھ میں اور ۳، ب سے ا کی سیدھ میں اور ۲، ب سے د کی سیدھ میں۔

(۸) اب ایک خط مستقیم ۳ فٹ لمبا ہے ا اور ب پر بالترتیب متوازی قوتیں ، اور ۵ ہنڈرڈ ویٹ عمل کرتی ہیں۔

اگر یہ قوتیں (۱) موافق ہوں (۲) مخالف ہوں۔ تو ہر ایک صورتیں نقطہ د کا مقام دریافت کرو جہاں قوتوں کا حاصل خط اب کو قطع کرتا ہے نیز نقطہ د اور ا کے درمیانی فاصلے کو ناپو۔

(۹) ایک ۱۰ فٹ لمبے شہتیر پر ایک سرے سے ۱فٹ، ۴فٹ، ۶فٹ کے فاصلوں پر ۲، ۴، ۳ ہنڈرڈ ویٹ بوجھ رکھے گئے ہیں عمل ترسیمی سے حاصل کا خط عمل دریافت کرو۔

(۱۰) ایک افقی شہتیر کا طول ۲۰ فٹ ہے اور اس کے سروں پر دو سہارے ہیں اگر اس کے ایک سرے سے ۳، ۷، ۱۲، ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب اوزان ۳، ۲، ۵، ۴ ہنڈرڈ ویٹ لٹکائیں جائیں تو رسیمانی کثیر الاضلاع کے سروں پر کے دباؤ دریافت کرو۔

(۱۱) سلاخوں کا ایک مثلثی ڈھانچہ اب ج سطح عمودی میں ا کے گرد گھوم سکتا ہے زاویہ ا قائمہ ہے اب متوازی الافق ہے اور کونہ ج ایک چکنے عمودی سہارے پر جو ا کے عین نیچے ہے ٹکا ہوا ہے اگر اب = ۳ فٹ، اج = ۱ فٹ اور اگر ب سے ۵۰ پونڈ کا وزن لٹکایا جائے تو مختلف سلاخوں کے اندر جو قوتیں عمل کرتی ہیں ان کو دریافت کرو۔

(۱۲) ایک مربع کے اضلاع اب، ب ج، ج د، د ا کی سمتوں میں بالترتیب قوتیں ۱، ۲، ۴، ۴ پونڈ عمل کرتی ہیں ثابت کرو کہ ان کا حاصل ۳.۶ پونڈ وزنی ایسی سمت میں عمل کرتا ہے جو ج ب سے زاویہ مس‌تا $\frac{۱}{۲}$ بناتی ہے اور ب ج ممدودہ کو م پر قطع کرتی ہے جہاں ج م = $\frac{۵}{۴}$ ب ج۔

(۱۳) اج اور ب ج دو مساوی شہتیر ہیں ان کا درمیانی زاویہ ۴۰° ہے اور ان کے سرے ا اور ب زمین پر ٹکے ہوئے ہیں جو اتنی کھردری ہے کہ ان کو پھسلنے سے روک سکتی ہے نیز سطح اج ب زمین سے ۷۰° کا زاویہ بناتی ہے نقطہ ج پر ایک وزن ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ ہے اور نظام ایک رسی کے ذریعہ جو ایک طرف تو ج سے اور دوسری طرف زمین پر ایک نقطہ سے بندھی ہے اور زمین سے ۵۰° کا زاویہ بناتی ہے سہارا گیا ہے اگر رسی نقطہ ج اور اب کے نقطہ وسط میں سے گزرنے والی سطح عمودی میں واقع ہو تو اس کا تناؤ اور شہتیروں کی سمت میں جو عمل ہیں ان کو دریافت کرو۔

(۱۴) ایک شہتیر اب کا وزن ۱۴۰ پونڈ ہے اور اس کا ایک سرا ا ایک افقی کھردری سطح پر دھرا ہوا ہے نقطہ ج پر ایک چکنی چرخی ہے جس پر سے ایک رسی گزر کر شہتیر کے دوسرے سرے ب کو سہارتی ہے نقطہ ا سے ج کے افقی اور عمودی فاصلے بالترتیب ۱۵ اور ۲۰ فٹ ہیں اور شہتیر کا طول ۱۵ فٹ ہے اگر شہتیر اس وقت عین پھسلنے کو ہو جب اسکے سرے ب کا عمودی فاصلہ سطح افق سے ۹ فٹ ہو تو فرک کی قدر رسی کا تناؤ اور ا پر کا حاصل عمل دریافت کرو۔

(۱۵) تین سلاخوں کا ایک مثلثی ڈھانچہ اب ج تین قوتوں ف، ق، ر کے زیر عمل متوازن ہے قوتیں ڈھانچہ کے نقاط الزوایا پر باہر کی طرف کو عمل کرتی ہیں اور ہر ایک قوت کا

خط عمل اس خط پر منطبق ہوتا ہے جو اس قوت کے نقطہ عمل کو مقابل کی سلاخ کے نقطہ وسط سے ملاتا ہے اگر اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے طول بالترتیب ۹ فٹ، ۸ فٹ، ۱ فٹ ہوں اور اگر قوت ف ۵۰ پونڈ وزن کے برابر ہو تو ق اور ر کی قیمتیں دریافت کرو اور جو قوتیں سلاخوں کے اندر ان کی سمت میں عمل کرتی ہیں ان کو بھی دریافت کرو۔

(۱۶) دو ثابت کھونٹیاں ا اور ب ہیں ب، ا سے اونچی ہے ایک وزنی سلاخ ب کے اوپر سے اور ا کے نیچے سے گزرتی ہے اگر سلاخ اور کھونٹیوں کے زوایا ے فرک برابر ہوں تو ثابت کرو کہ سلاخ ہر ایک ایسی حالت میں ساکن رہ سکتی ہے جبکہ اس کا مرکز ثقل کھونٹی ب سے اوپر واقع ہو بشرطیکہ ا ب کا میلان افق سے زاویہ فرک سے کم ہو اگر یہ میلان زاویہ فرک سے بڑا ہو تو بذریعہ عمل ترسیمی کھونٹی ب سے اوپر مرکز ثقل کا انتہائی فاصلہ توازن قائم رہنے کی صورتیں دریافت کرو۔

(۱۷) ایک ۱۰۰ پونڈ وزنی یکساں سلاخ ا ب دو رسیوں ا ج اور ب د کے ذریعہ سہاری گئی ہے رسی ب د عمودی ہے اور زوایا ج ا ب اور ا ب د میں سے ہر ایک ۱۰۵° کے برابر ہے ایک افقی قوت ط سلاخ کے سرے ب پر عمل کرتی ہے اور سلاخ کو اس حالت میں متوازن رکھتی ہے ثابت کرو کہ ط تقریباً ۲۵ پونڈ وزن کے برابر ہے۔

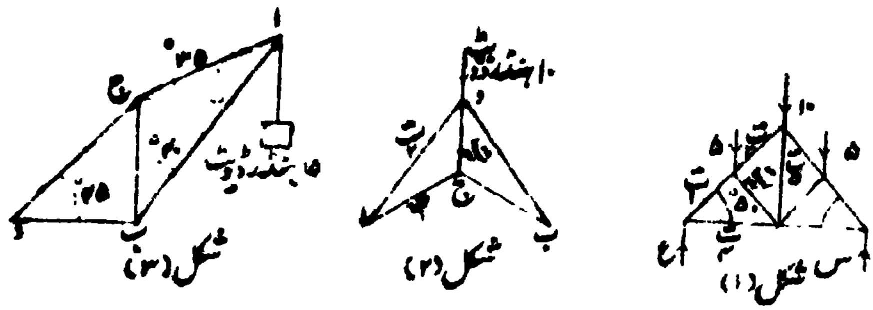
(۱۸) دو مساوی اور بلا وزن سلاخین اب اور اج نقطہ ا پر ایک چکنے قبضہ کے ذریعہ وصل کردی گئی ہیں سلاخوں کے سرے ب اور ج ایک چکنی سطح افقی ب ج پر ٹکے ہوئے ہیں اور یہ سب نظام سطح عمودی میں ہے سلاخ اب میں ایک نقطہ د ایسا ہے کہ اد = $\frac{1}{4}$ اب اور ع اور ف سلاخ اج کے نقاط تثلیث ہیں ع نقطہ ا سے زیادہ قریب ہے ایک باریک رسی د اور ف کو ملاتی ہے اور اس کا طول اتنا ہے کہ زاویہ ا = ۶۰° اگر ایک وزن و نقطہ ع سے لٹکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ $\frac{و}{۲}$ ہے۔

(۱۹) اب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے ثابت کرو کہ جو قوتیں سموت اج، اف اور دع میں عمل کریں اور سمت ع ج میں عمل کرنے والی ۴۰ پونڈ قوت کے ساتھ توازن پیدا کریں ان کی مقداریں بالترتیب ۱۰، ۳۲، ۱۷، ۴۴، ۴۳ پونڈ وزن ہیں

(۲۰) شکل (۱) میں بلاوزن سلاخون کا ایک متشاکل نظام ہے اس کے سروں پر دو عمودی سہارے ہیں ۱۰ اور ۵ ہنڈرڈ ویٹ کے عمودی بوجھ شکل میں نظام کے تین نقاط پر عمل کرتے ہیں اگر اطراف کے سلاخون کے زوایائے میلان ۵۰° ہوں تو سلاخوں کے تناؤ یا دباؤ دریافت کرو۔

(۲۱) شکل (۲) ہلکی سلاخوں کا متشاکل نظام دو عمودی سہاروں ا اور ب پر ٹنکا ہوا ہے اگر ایک ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ وزن د پر رکھدیا جائے تو سلاخون کے تناؤ یا دباؤ دریافت کرو۔معلوم ہیں

زاویہ داب = ۵۵° اور زاویہ ج اب = ۳۵°



(۲۲) شکل (۳) میں ایک حمالہ ہے اس کے نقطہ ا سے ایک ۱۵ ہنڈرڈ ویٹ وزنی جسم لٹکتا ہے جو قوتیں اج اور اب کی سمت میں عمل کرتی ہیں ان کو دریافت کرو۔ اگر لاٹھ ب ج بلا تکلف حرکت کر سکے اور ب د کو ایک ایسے استوار جوڑ سے جڑ دیا جائے کہ وہ ہل نہ سکے تو بند ج د کا تناؤ دریافت کرو۔

(۲۳) وارن شہتیر کا کچھ حصہ تین متساوی الاضلاع مثلثوں اب ج ، ادج ، ب ج ع سے مل کر بنا ہوا ہے خطوط اب ، د ج ع متوازی الافق ہیں خط د ج ع خط اب کے اوپر ہے شہتیر دو سہاروں ا اور ب پر ٹکا ہوا ہے اور اس کے نقطہ د پر ۵ ٹن وزن اور ع پر ۴ ٹن وزن رکھا گیا ہے سہاروں پر کے عمل اور مائل اجزا کے عمل دریافت کرو۔

(۲۴) چار ہلکی سلاخوں کا ایک ذوار بعۃ الاضلاع اب ج د ہے اس کے کھیلتے ہوے جوڑ ہیں اور اس کو ایک سلاخ ب د

کے ذریعہ کھڑا کردیا گیا ہے اور ج پر دو چالیس چالیس پونڈ کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔

معلوم ہے اب = ۲ فٹ، ب ج = ۳ فٹ، ج د = ۴ فٹ، دا = ۴½ فٹ اور د ب = ۵ فٹ۔ سلاخوں کے تناو یا دباؤ دریافت کرو۔

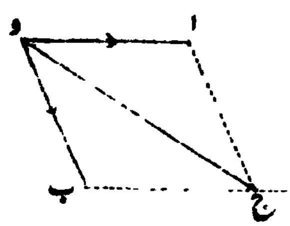
باب شانزدہم

چند زائد مسائل

(۲۲۴) **قوتوں کے متوازی الاضلاع کا برہانی ثبوت۔**
ثبوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (۱) بلحاظ حاصل کی سمت کے (۲) بلحاظ اس کی مقدار کے

(۱) سمت

(۱) مساوی قوتیں



فرض کرو کہ قوتیں مساوی ہیں اور و ا اور و ب سے تعبیر ہوتی ہیں۔
متوازی الاضلاع و ا ج کی تکمیل کرو اور و ج کو ملاؤ۔ ظاہر ہے کہ و ج زاویہ ا و ب کی تنصیف کرتا ہے چونکہ قوتیں مساوی ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ حاصل ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے کیونکہ کوئی وجہ نہیں کہ حاصل و ج کے ایک طرف واقع ہو اور دوسری طرف نہو۔ پس حاصل کی سمت کے لئے قوتوں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ

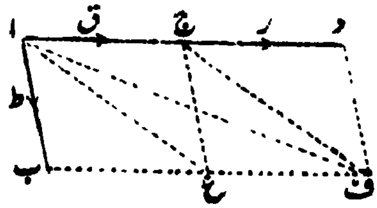
مساوی قوتوں کی صورت میں صحیح ثابت ہوا۔

(۲) متوافق قوتیں ۔

ابتدائی مسئلہ ۔ اگر قوتوں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ بلحاظ سمت کے دو قوتوں ط اور ق نیز اور دو قوتوں ط اور ر کی صورت میں صحیح ہو جبکہ پہلی دو قوتوں اور دوسری دو قوتوں کے درمیانی زاوئے بالترتیب برابر ہوں تو مسئلہ مذکورہ قوتوں ط اور (ق + ر) کے لئے بھی صحیح ہوگا۔

فرض کرو کہ قوتیں ایک جسم استوار کے نقطہ ا پر عمل کرتی ہیں اب قوت ط کی سمت ہے اور اج د قوت ق اور ر کی۔ فرض کرو کہ قوتیں ط اور ق بلحاظ مقدار کے اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں ۔

اب اصول انتقال قوت کے موافق ہم قوت ر کو اس کے خط عمل کے کسی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کر سکتے ہیں اس لئے فرض کرو کہ یہ قوت نقطہ ج پر عمل کرتی ہے اور ج د سے تعبیر ہوتی ہے۔



متوازی الاضلاع اب ع ج اور اب ف د کی تکمیل کرو۔ جیسا ہم نے ابتدا میں فرض کیا ط اور ق کا حاصل ایک قوت ت ہے جو سمت اع میں عمل کرتی ہے پس ان قوتوں کی بجائے ان کے حاصل کو لو اور اس کے نقطہ عمل کو منتقل کرکے ع پر لیجاؤ۔

اب یہ قوت ت جو نقطہ ع پر عمل کرتی ہے دو ایسی قوتوں ط اور ق میں تحلیل ہو سکتی ہے جن کی سمتیں بالترتیب ج ع اور ع ف ہیں فرض کرو کہ ان قوتوں کے نقاط عمل منتقل ہو کر ج اور ف پر چلے جاتے ہیں۔
نیز بموجب مفروض اگر قوتیں ط اور ر ایک نقطہ ج پر عمل کریں تو ان کا حاصل ایک ایسی قوت کے مساوی ہوتا ہے جو سمت ج ف میں عمل کرتی ہے فرض کرو کہ ان قوتوں کی بجائے ان کا حاصل عمل کرتا ہے اور اس کا نقطہ عمل منتقل ہو کر ف پر آگیا ہے۔
اب تمام قوتیں نقطہ ف پر عمل کرتی ہیں اور یہاں آنے میں ان کے مجموعی اثر میں فرق نہیں آتا۔ پس معلوم ہوا کہ ف ان کے حاصل کے خط عمل پر ایک نقطہ ہے اس لئے اف حاصل مطلوب کی سمت ہے۔ پس ابتدائی مسئلہ ثابت ہوا

مسئلہ کا استعمال

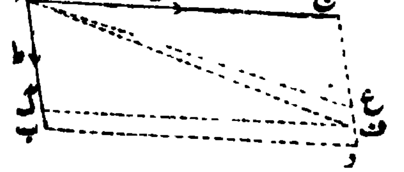
(۱) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر قوتیں مساوی ہوں اور ان میں سے ہر ایک س کے برابر ہو تو مسئلہ صحیح ہوتا ہے۔ اس لئے اگر ط، ق، ر میں سے ہر ایک س کے برابر ہو تو بذریعہ مسئلہ ابتدائی مسئلہ مذکورہ قوتوں س اور ۲س کے لئے صحیح ہوگا۔ نیز چونکہ مسئلہ قوتوں (س، س) اور (س، ۲س) کے لئے صحیح ہے اس لئے بموجب مسئلہ ابتدائی قوتوں (س، ۳س)

کے لئے بھی صحیح ہوگا اسی طرح سے قوتوں (س، ۲س) کے لئے اور علیٰ ہذاالقیاس

اگر اسی قسم کے عمل کو جاری رکھا جائے تو معلوم ہوگا کہ مسئلہ قوتوں س اور م س کے لئے صحیح ہے۔ جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ نیز اگر ط کو م س کے مساوی فرض کیا جائے اور ق اور ر میں سے ہر ایک کو س کے برابر تو مسئلہ ابتدائی کے بموجب مسئلہ قوتوں م اور ۲س کے لئے صحیح ہوگا۔

پھر اگر ط، م س کے برابر ہو ق، ۲س کے اور ر، س کے تو مسئلہ قوتوں م س اور ۳ س کے لئے صحیح ہوگا۔ اسی طرح عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسئلہ قوتوں م س اور ن س کے لئے صحیح ہے جہاں م اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

نیز ہم جانتے ہیں کہ کوئی دو متوافق قوتیں م س اور ن س سے تعبیر ہو سکتی ہیں۔ پس متوافق قوتوں کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔

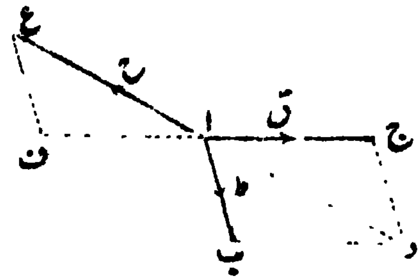


(۳) متبائن قوتیں۔

فرض کرو کہ دو متبائن قوتیں ط اور ق خطوط اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں۔

متوازی الاضلاع اب د ج کی تکمیل کرو۔

اگر ط اور ق کے حاصل کا خط عمل ا د نہ ہو تو فرض کرو کہ
اس کا خط عمل ا ع ہے جو ج د سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔
اج کو مساوی حصوں کی کسی تعداد میں تقسیم کرو جن میں
سے ہر ایک حصہ لا کے برابر ہو جہاں لا، ع د سے کم ہے
اب ج د سے یکے بعد دیگرے برابر حصے کاٹتے جاؤ
جن میں سے ہر ایک لا کے برابر ہو تو چونکہ لا، ع د
سے کم ہے اس لئے آخری نقطہ تقسیم ف لازماً ع اور د
کے درمیان واقع ہوگا۔
ف گ کو ج ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ
اب سے گ پر ملتا ہے اف کو ملاؤ۔
خطوط اج اور اگ متوافق قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اسلئے
ان کے حاصل کی سمت بموجب (۲) اف ہے۔
اب چونکہ قوت اب مقدار میں اگ سے بڑی ہے اس لئے
اج اور اب کے حاصل کی سمت زاویہ ب اف کے اندر
واقع ہونی چاہئے۔ لیکن یہ حاصل سمت اع میں عمل کرتا
ہے جو زاویہ ب اف کے باہر ہے۔ اور یہ ناممکن ہے
اس لئے حاصل کی سمت اع نہیں ہو سکتی۔
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اد کے سوائے حاصل
کی اور کوئی سمت نہیں ہو سکتی۔
پس حاصل کی سمت اد ہے۔
دوم۔ مقدار



موافق بالا اب اور اج قوتوں ط اور ق کو تعبیر کرتے ہیں۔

متوازی الاضلاع اب د ج کی تکمیل کرو۔

فرض کرو کہ ایک قوت ح جو مقدار اور سمت میں اع سے تعبیر ہوتی ہے قوتوں ط اور ق کے حاصل کے ساتھ متوازن ہے۔ تب اس مسئلہ کے ثبوت کے حصہ اول کے موافق اع اور اد ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں ہمیں ثابت کرنا ہے کہ اع اور اد برابر ہوں گے۔

متوازی الاضلاع اع ف ب کی تکمیل کرو۔ چونکہ تین قوتیں ط، ق، ح باہم متوازن ہیں اس لئے ان میں سے ہر ایک باقی دو کے حاصل کے متساوی اور متقابل ہے۔

اب ط اور ح کے حاصل کی سمت اف ہے اس لئے ق کا خط عمل اج اور اف دونو ایک ہی خط مستقیم میں ہیں پس ادب ف متوازی الاضلاع ہے اس لئے دا = ب ف لیکن چونکہ اع ف ب ایک متوازی الاضلاع ہے اسلئے

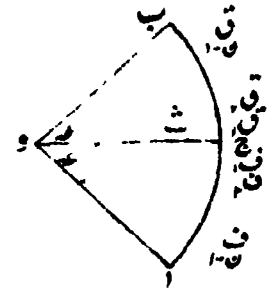
ب ف = اع

اس لئے اد اور اع باہم مساوی ہوئے پس ثابت ہوا کہ قوتوں ط اور ق کا حاصل مقدار اور سمت میں اد ہے۔

مندرجہ بالا ثبوت کو دوشیلہ کا ثبوت کہتے ہیں۔

(۲۲۵) ایک یکساں گول قوس کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ اب قوس ہے اور اس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے نیز فرض کرو کہ و ج زاویہ او ب کی تنصیف کرتا ہے فرض کرو کہ اب کو



۲ ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ج سے شروع ہوکر ا کی جانب نقاط تقسیم ف۱، ف۲، ..... ف ن-۱ ہیں اور ب کی جانب ق۱، ق۲، ق۳، ..... ق ن-۱ ہیں۔
فرض کرو کہ ہر ایک نقطہ تقسیم پر اور نقاط ا، ب اور ج پر برابر برابر ذرے رکھے گئے ہیں اور ان میں سے ہر ایک ذرہ کی مقدار مادہ م ہے فرض کرو کہ دو متصل ذروں کو ملانے والی قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ بہ بنتا ہے یعنی ۲ ن بہ = ۲ عہ اور فرض کرو کہ نصف قطر ر ہے۔
چونکہ ذروں کا نظام بلحاظ خط و ج کے متشاکل ہے اس لئے اس کا مرکز ثقل ش لازماً خط و ج پر واقع ہونا چاہئے فرض کرو کہ فاصلہ و ش = لا̄ بموجب دفعہ ۱۱۱

لا̄ = (م ر + ۲ م × ر جم بہ + ۲ م ر جم ۲ بہ + ... + ۲ م ر جم ن بہ) / (م + ۲ م + ۲ م + ... + ۲ م)

= ر/(۲ ن + ۱) [۱ + ۲ جم بہ + ۲ جم ۲ بہ + ... + ۲ جم ن بہ]

= ر/(۲ ن + ۱) [۱ + ۲ (جم (ن + ۱)/۲ بہ جب ن بہ/۲) / (جب بہ/۲)] سلسلہ کو جمع کرنے سے

$$= \frac{\text{ر}}{\text{۲ن}+\text{۱}}\left[\text{۱}+\frac{\text{جب}\,(\text{ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\,\text{ب}-\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}\right]$$

$$= \text{ر}\,\frac{\text{جب}\,(\text{ن}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\,\text{ب}}{(\text{۲ن}+\text{۱})\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}} = \text{ر}\,\frac{\text{جب}\,(\text{عہ}+\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}})}{(\text{۲ن}+\text{۱})\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}}} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

اب فرض کرو کہ ذروں کی تعداد لا انتہا بڑھائی جاتی ہے اس سے زاویہ ب لا انتہا گھٹتا ہے اور عہ مستقل رہتا ہے اسطرح سے ہمیں قریب قریب ایک یکساں گول قوس کی صورت حاصل ہوگی۔

اب $(\text{۲ن}+\text{۱})\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}} = \frac{\text{۲ن}+\text{۱}}{\text{۲ن}}\times\text{عہ}\times\frac{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}}} = (\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{۲ن}})\times\text{عہ}\times\frac{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{۲ن}}}$

= عہ اگر ن کو غیر متناہی فرض کیا جائے۔ اس لئے یکساں گول قوس کی صورت میں مساوات (۱) یہ ہوگی۔

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ر جب عہ}}{\text{عہ}}$$

نتیجہ صریح ۔ نصف دائرہ قوس کی صورت میں $\text{عہ} = \frac{\pi}{\text{۲}}$ اس لئے مرکز سے مرکز ثقل کا فاصلہ $= \text{ر}\,\frac{\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{۲}}}{\frac{\pi}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ر}}{\pi}$ +

جو طالب علم علم احصا سے واقف ہے وہ اس نتیجہ پر بآسانی پہنچ سکتا ہے۔

فرض کرو کہ قوس پر ق ایک ایسا نقطہ ہے کہ زاویہ ق و ج = ط اور اس کے نزدیک قَ ایک اور ایسا نقطہ ہے کہ زاویہ قَ و ق = د ط اگر تمام قوس کی مقدار مادہ م ہو تو جز ق قَ کی مقدار مادہ $\frac{\text{د ط}}{\text{۲ عہ}}\times\text{م}$ ہوگی اور نقطہ ق کا فصلہ ر جم ط ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۱۱۱

$$\text{لاَ} = \frac{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \frac{\text{دطہ}}{\text{۲عہ}}\,\text{م} \times \text{ر جم طہ}}{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \frac{\text{دطہ}}{\text{۲عہ}}\,\text{م}}$$

$$= \text{ر} \frac{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \text{جم طہ دطہ}}{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \text{دطہ}} = \text{ر} \frac{\left[\text{جب طہ}\right]_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}}}{\left[\text{طہ}\right]_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}}}$$

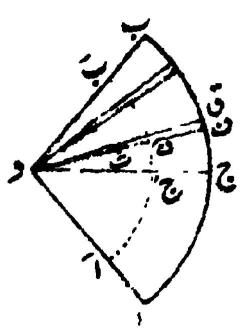
$$= \text{ر} \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$$

نیز قوس کے تشاکل ہونے کی وجہ سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل و ج پر واقع ہے۔

(۲۲۶) قطاع دائرہ کا مرکز ثقل

دفعہ گذشتہ کے طریق کتابت کے موافق فرض کرو کہ قطاع دائرہ کے قوسی محیط پر دو متصل نقاط ف اور ق ہیں اور ف ق قریباً ایک خط مستقیم ہے۔ تب و ف ق ایک ایسا مثلث ہے جس کا زاویہ راس نقطہ و پر ہے اور اس کی مقدار نہایت ہی قلیل ہے۔

و ف پر ایک نقطہ فَ ایسا لو کہ وفَ = ۲/۳ وف جب طول ف ق نہایت ہی چھوٹا ہو تو مثلث و ف ق کا مرکز ثقل فَ ہوگا۔ اگر قوس اب کو بیشمار حصوں میں تقسیم کیا جائے اور پھر نقطہ و کو متصل نقاط تقسیم کے ساتھ



ملایا جائے تو قطاع دائرہ ایسے بیشمار مثلثوں میں تقسیم ہوسکے گا جن میں سے ہرایک مثلث کا مرکز ثقل نقطہ دار قوس پر واقع ہوگا اور اس قوس کا نصف قطر $\frac{2}{3}$ ر ہوگا۔

پس معلوم ہوا کہ قطاع کا مرکز ثقل وہی ہے جو گول قوس اَجَبَ کا ہے یعنی بموجب دفعہ گزشتہ

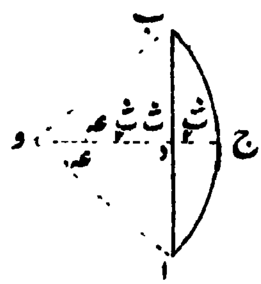
$$\text{وثَ} = \text{وجَ} \times \frac{\text{جیب عہ}}{\text{عہ}} = \frac{2}{3}\,\text{ر}\,\frac{\text{جیب عہ}}{\text{عہ}}$$

نتیجہ صریح۔ اگر قطاع نصف دائرہ ہو تو $\text{عہ} = \frac{\pi}{2}$ اور طول $\text{وث} = \frac{4\text{ر}}{3\pi}$

(۲۲۷) قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل

قطعہ دائرہ اجب قطاع دائرہ واجب اور مثلث واب کے فرق کے برابر ہے۔

گذشتہ دو دفعات کا طریق کتابت استعمال کرو اور فرض کرو کہ مثلث اوب اور قطعہ اجب کے مرکز ثقل بالترتیب ث_1 اور ث_2 ہیں نیز فرض کرو کہ قطاع کا مرکز ثقل ث ہے اور اب خط وج سے د پر ملتا ہے



بذریعہ دفعہ ۱۰۹

$$\text{وث} = \frac{\triangle\text{اوب} \times \text{وث}_1 + \text{قطعہ اجب} \times \text{وث}_2}{\triangle\text{اوب} + \text{قطعہ اجب}} \quad \ldots\ldots (1)$$

لیکن $\text{وث}_1 = \frac{2}{3}\,\text{ود} = \frac{2}{3}\,\text{ر جم عہ}$

اور $\text{وث} = \frac{2}{3}\,\text{ر}\,\frac{\text{جیب عہ}}{\text{عہ}}$

نیز △ او ب = ½ ر² جب ۲ عہ

اور قطعہ اب ج = قطاع او ب − △ او ب = ½ ر² × ۲ عہ − ½ ر² جب ۲ عہ

پس مساوات (۱) کی صورت یہ ہوگی۔

⅔ ر (جب³ عہ / عہ) = (⅔ ر جم عہ × ½ ر² جب ۲ عہ + ½ ر² (۲ عہ − جب ۲ عہ) × و ث₂) / (½ ر² × ۲ عہ)

= (⅔ ر جم عہ جب ۲ عہ + و ث₂ (۲ عہ − جب ۲ عہ)) / ۲ عہ

∴ ۴/۳ ر جب³ عہ − ⅔ ر جم عہ جب ۲ عہ = و ث₂ (۲ عہ − جب ۲ عہ)

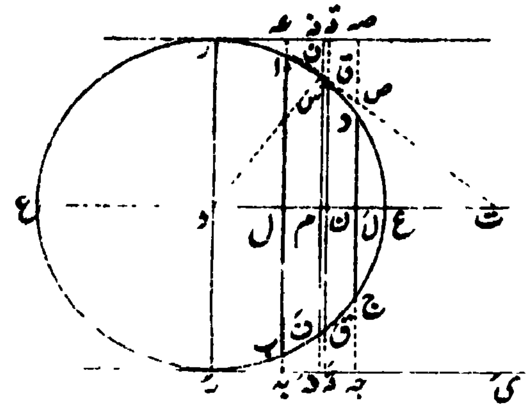
∴ و ث₂ = ۴/۳ ر (جب عہ − جم² عہ جب عہ) / (۲ عہ − جب ۲ عہ) = ۴/۳ ر (جب³ عہ) / (۲ عہ − جب ۲ عہ)

(۲۲۸) **کرہ کے منطقہ کا مرکز ثقل** - ثابت کرو کہ کرہ کے منطقہ کی سطح کا مرکز ثقل اس کے مستوی سروں کے عین وسط میں ہوتا ہے (منطقہ کرہ کا وہ حصہ ہے جو دو متوازی مستوی سطحوں کے درمیان گھرا ہوا ہو)

فرض کرو کہ منطقہ کو ایک ایسی سطح مستوی سے تراشا گیا ہے جو کرہ کے مرکز میں سے گذرتی ہے اور مستوی سروں پر عمود ہے فرض کرو کہ یہ تراش اب ج ص ہے۔ فرض کرو کہ کاغذ کی سطح میں مستوی سروں کے متوازی کرہ کا قطر ر و رَ ہے اس کے سروں پر مماس ر ی اور رَ یَ کھینچو اور فرض کرو کہ اب اور ج ص ان سے نقاط عہ، بہ، جہ، صہ پر ملتے ہیں۔

اگر اس شکل کو ع و عَ کے گرد گھمایا جائے تو دیکھو کہ کیا شکل پیدا ہوتی ہے۔ قوس اص کے گھومنے سے منطقہ مرتسم ہوگا۔ اور عہ صہ کے گھومنے سے کرے کے

بیرونی اسطوانے کا ایک حصہ مرتسم ہوگا۔



اب ہم ثابت کریں گے کہ مستوی سطحوں عہ بہ اور جہ صہ کے درمیان منطقہ اور اسطوانہ کے جو حصے گھرے ہوئے ہیں ان کے رقبے برابر ہیں۔

قوس پر ا اور ص کے درمیان کوئی نقطہ ف لو اور ف کے بیحد قریب ایک اور نقطہ ق لو خطوط فہ ف م فَ فہَ اور قہ ق ن قَ قہَ خط و عَ پر عمود کھینچو ملاحظہ ہو شکل۔

فرض کرو کہ ف ق خط ع عَ سے ت پر ملتا ہے ع م پر عمود ق س کھینچو۔

چونکہ قوس پر ف کا عین متصل نقطہ ق ہے اس لئے مماس کی تعریف کے بموجب خط ف ق نقطہ ف پر مماس ہے اور اس لئے و ف ت زاویہ قائمہ ہے۔ نیز آخر الامر جب ف اور ق ایک دوسرے کے لاانتہا قریب ہوتے ہیں تو ف ق کا رقبہ مرتسمہ جو فی الحقیقت ۲ π × م ف × ف ق اور ۲ π × ن ق × ف ق

کے درمیان واقع ہے ان جملوں میں سے کسی ایک کے برابر ہوتا ہے ۔ پس

$$\frac{\text{منطقہ کا جز}}{\text{اسطوانہ کا جز}} = \frac{\text{رقبہ جو ف ق نے مرتسم کیا}}{\text{رقبہ جو فہ قہ نے مرتسم کیا}}$$

$$= \frac{\text{۲ آآ × م ف × ف ق}}{\text{۲ آآ × م فہ × فہ قہ}} = \frac{\text{م ف}}{\text{م فہ}} \times \frac{\text{ف ق}}{\text{س ق}}$$

$$= \frac{\text{م ف}}{\text{م فہ}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جم س ق ف}} = \frac{\text{م ف}}{\text{م فہ}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جم و ت ف}}$$

$$= \frac{\text{م ف}}{\text{م فہ}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جب م و ف}} = \frac{\text{م ف}}{\text{م فہ}} \times \frac{\text{و ف}}{\text{م ف}}$$

$$= \frac{\text{و ف}}{\text{م فہ}} = \text{۱}$$

پس معلوم ہوا کہ اگر منطقہ اور اسطوانہ کو دو مستوی سطحوں سے کاٹا جائے جو ایک دوسرے کے لا انتہا قریب ہوں تو ان کے حصے جو ان سطحوں کے درمیان گھرے ہوئے ہوں برابر ہوتے ہیں اور اس لئے ان کے مرکز ثقل ایک ہی مقام پر ہوتے ہیں اگر اب سے شروع ہوکر ج د تک منطقہ اور اسطوانہ کی بیشمار پتلی تراشیں لیجائیں تو متقابل تراشوں کی مقدار مادہ اور مرکز ثقل ایک ہی ہوں گے اس لئے منطقہ اور اسطوانہ کے مرکز ثقل ایک ہی ہیں اور آخرالذکر کا مرکز ثقل صریحاً ل لَ کا نقطہ وسط ہے۔

اس لئے ثابت ہوا کہ کرہ کے کسی منطقہ کا مرکز ثقل اس کے مستوی سروں کے عین وسط میں ہوتا ہے۔

بذریعہ علم احصا۔

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع = عہ، زاویہ ص و ع = بہ اور زاویہ ف و ع = طہ

ف پر کے رقبے کا جزء = اَ د طہ × ۲ π اَ جیب طہ اور ف کا فصلہ اَ جم طہ ہے۔ اس لئے بموجب دفعہ ۱۱۱

$$لاَ = \frac{\int_{بہ}^{عہ} ۲\pi \, اَ^۲ \, جیب \, طہ \, د \, طہ \times اَ \, جم \, طہ}{\int_{بہ}^{عہ} ۲\pi \, اَ^۲ \, جیب \, طہ \, د \, طہ}$$

$$= اَ \frac{\int_{بہ}^{عہ} جیب \, طہ \, جم \, طہ \, د طہ}{\int_{بہ}^{عہ} جیب \, طہ \, د \, طہ} = اَ \frac{\left[\frac{۱}{۲} جیب^۲ طہ \right]_{بہ}^{عہ}}{\left[- جم \, طہ \right]_{بہ}^{عہ}}$$

$$= \frac{اَ}{۲} \cdot \frac{جیب^۲ عہ - جیب^۲ بہ}{جم \, بہ - جم \, عہ} = \frac{اَ}{۲} \left(جم \, بہ + جم \, عہ \right)$$

$$= \frac{۱}{۲} \left[و ل + و لَ \right]$$

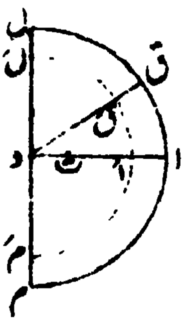
(۲۲۹) مجوف نصف کرہ کا مرکز ثقل

فرض کرو کہ ا ب کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس لئے ر رَ پر منطبق ہوتا ہے نیز فرض کرو کہ ص اور ج حرکت کرکے دونوں ع پر آجاتے ہیں یعنی سطح حائط ص ج گھٹتے گھٹتے ع پر فقط ایک نقطہ کے برابر رہ جاتی ہے

منطقہ اس صورت میں نصف کرہ ۔ ص ع ج ز بن جاتا ہے
اور اس لئے اس کا مرکز ثقل و ع کے نقطہ وسط پر ہوتا ہے
پس معلوم ہوا کہ کھوکھلے نصف کرے کا مرکز ثقل کرے کے
اس نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے جو نصف کرے کے مستوی
قاعدے پر عمود ہو۔

(۲۳۰) ایک ٹھوس نصف کرہ کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

اگر نصف کرہ کو سطح کاغذ سے تراشا جائے تو فرض کرو کہ تراش
ل ا م ہوتی ہے نیز فرض کرو کہ نصف کرہ کا نصف قطر
و ا کرہ کے مستوی قاعدہ پر عمود ہے۔



فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر کوئی
نقطہ ق ہے اس کے گرد سطح
کا ایک چھوٹا سا جزء لو اور ایک
نہایت ہی چھوٹا مینار فرض کرو
جس کا قاعدہ یہ سطح کا جزء ہے اور جس کا راس و ہے۔
اس مینار کا مرکز ثقل خط و ق پر ایک ایسا نقطہ قَ ہے
کہ و قَ = $\frac{3}{4}$ و ق (دفعہ ۱۰۷)
اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ اس پتلے مینار کا وزن مجموعی
طور پر نقطہ قَ پر عمل کرتا ہے
فرض کرو کہ نصف کرہ کی کل بیرونی سطح ان چھوٹے چھوٹے
اجزاء میں تقسیم کی گئی ہے اور ان کے متعلقہ مینار بنائے
گئے ہیں۔

ان سب کے مرکز ثقل ایک ایسے نصف کرہ لَ قَ اَمَ پر
واقع ہوں گے جس کا مرکز و ہے اور جس کا نصف قطر و اَ ($=\frac{۳}{۴}$ و ا)
اس لئے ٹھوس کرہ کا مرکز ثقل وہی ہے جو خول لَ قَ اَمَ
کا ہے پس مرکز ثقل مطلوب ش ہے جہاں و ش $=\frac{۱}{۲}$ و اَ $=\frac{۳}{۸}$ و ا
بذریعہ علم احصا۔ فرض کرو کہ قوس ال پر کوئی نقطہ ق
ہے و ا پر عمود ق ن کھینچو اور فرض کرو کہ
و ن = لا ، ن ق = ما ، تب صریحاً $\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}=\text{ر}^{۲}$
جہاں ر نصف کرہ کا نصف قطر ہے۔
فرض کرو کہ ق ن کے متوازی ایک اور سطح فاصلہ لا + د لا
پر کھینچی گئی ہے اب ق ن اور اس نئی سطح کے درمیان
جو حجم کا جزء گھرا ہوا ہے اس کی مقدار $\pi\,\text{ما}^{۲}\,\text{د لا}$ ہے نیز ق
کا فصلہ لا ہے اس لئے بموجب دفعہ ۱۱۱

$$\bar{\text{لا}}=\frac{\int_{۰}^{\text{ر}}\pi\,\text{ما}^{۲}\,\text{د لا}\times\text{لا}}{\int_{۰}^{\text{ر}}\pi\,\text{ما}^{۲}\,\text{د لا}}=\frac{\int_{۰}^{\text{ر}}\text{لا}\,(\text{ر}^{۲}-\text{لا}^{۲})\,\text{د لا}}{\int_{۰}^{\text{ر}}(\text{ر}^{۲}-\text{لا}^{۲})\,\text{د لا}}$$

$$=\frac{\left[\frac{\text{ر}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲}-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{\text{ر}}}{\left[\text{ر}^{۲}\,\text{لا}-\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{\text{ر}}}=\frac{\frac{\text{ر}^{۴}}{۲}-\frac{\text{ر}^{۴}}{۴}}{\text{ر}^{۳}-\frac{\text{ر}^{۳}}{۳}}=\frac{۳}{۸}\,\text{ر}$$

(۲۳۱) اگر قطاع دائرہ کو اس کے منصف نصف قطر کے گرد
گھمایا جائے تو جو شکل پیدا ہو اس کو کروی قطاع کہتے ہیں۔

دیکھو شکل و ا ع ب و دفعہ ۲۲۸ جو و ع کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ بموجب دفعہ ۲۳۰ ہم اس کروی قطاع کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کر سکتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ و سے مرکز ثقل کا فاصلہ = ۳/۸ (و ل + و ع)

(۲۳۲) کئی ایک وجوہ سے دفعات بالا کے ثبوت تسلی بخش نہیں ہیں ان کا اثبات صحیح طور پر صرف علم احصا سے ہو سکتا ہے۔

(۲۳۳) موہوم کام

جب ایک جسم قوتوں کے ایک نظام کے زیر عمل ساکن ہو اور ہم فرض کریں کہ وہ اپنی جگہ سے ذرا سا سرک جائے لیکن اس طرح کہ نظام کے ان شرائط ہندسیہ میں فرق نہ آئے جو اس کے قیام کے لئے ضروری ہیں اور اگر جسم کا ایک نقطہ ق اس خیالی حرکت کے باعث سرک کر قَ پر چلا جائے تو ق قَ کو اس نقطہ کی موہوم رفتار یا نقل کہتے ہیں۔ اس جگہ لفظ موہوم کا یہ مطلب ہے کہ نقل مکان محض خیالی ہے اور حقیقی نہیں۔

(۲۳۴) اگر ایک قوت ح جسم کے نقطہ ق پر عمل کرے اور ق کی موہوم نقل ق قَ ہو اور اگر قَ سے ح کی سمت پر عمود قَ ن نکالا جائے تو حاصل ضرب ح × ق ن کو ح کا موہوم کام یا موہوم معیار کہتے ہیں۔

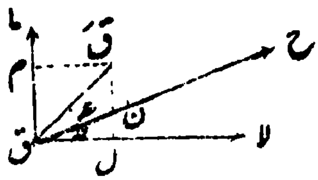
جیسا دفعہ ۱۲۷ میں ہم نے دیکھا یہ کام مثبت ہوگا اگر ق ن کی وہی سمت ہو جو ح کی ہے اور منفی ہوگا اگر ق ن اور

ح کی سمتیں متقابل ہوں۔

(۲۳۵) ایک قوت کا موہوم کام اس کے اجزا کے موہوم کاموں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قوت ح کے اجزاء تحلیلی دو عمودی سمتوں میں لا اور ما ہیں اور قوت ح، لا کی سمت سے زاویہ فہ بناتی ہے تب

لا = ح جم فہ اور ما = ح جب فہ



فرض کرو کہ ح کا نقطہ عمل ق موہوم نقل سے قَ پر چلا جاتا ہے ح پر عمود ق ن کھینچو اور فرض کرو کہ

زاویہ ن ق قَ = عہ

تو لا اور ما کے موہوم کاموں کا مجموعہ

= لا × ق ل + ما × ق م

= ح جم فہ × ق قَ جم (فہ+عہ) + ح جب فہ × ق قَ جب (فہ+عہ)

= ح × ق قَ [جم فہ جم (فہ+عہ) + جب فہ جب (فہ + عہ)]

= ح × ق قَ جم عہ

= ح × ق ن

= ح کا موہوم کام

(۲۳۶) قیاسی کام کا اصول یہ ہے۔ کہ اگر ایک جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں متوازن ہوں اور جسم اپنی جگہ سے ذرا سا سرک جائے اور اس سرکنے سے نظام کی شرائط ہندسیہ میں فرق نہ آئے تو قوتوں کے موہوم کاموں کا مجموعہ جبریہ صفر ہوگا اور برعکس

اس کے اگر یہ مجموعہ جبریہ صفر ہو تو قوتیں متوازن ہوں گی۔ دوسرے الفاظ میں اگر کسی ایک قوت ح کی موہوم نقل حا ہو تو ∑ (ح × حا) = صفر۔ جہاں ∑ (ح × حا) ان تمام رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے جن کا نمونہ ح × حا ہے نیز برعکس اس کے اگر ∑ (ح × حا) صفر ہو تو قوتیں متوازن ہوں گی۔

اگلی دفعہ میں ہم اس مسئلہ کا ثبوت ایک سطح میں عمل کرنیوالی قوتوں کی صورت میں دیں گے۔

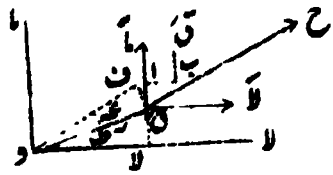
(۲۲۷) ایک سطح میں عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کے لئے موہوم کام کے اصول کا ثبوت۔

جس سطح میں قوتیں عمل کرتی ہیں اس میں دو خط مستقیم متقاطع علی القوائم لو اور فرض کرو کہ جسم اپنی جگہ سے ذرا سا سرک جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی سہل ترکیب یہ ہے کہ جسم کو نقطہ و کے گرد ایک چھوٹے سے موزوں زاوئے میں گھماؤ جس کی مقدار عہ نیم قطری ہو اور پھر اس کو محاور کے متوازی بقدر فاصلوں ا اور ب کے سرکاؤ۔

[توضیحاً اس کی مثال یہ ہو سکتی ہے:۔ میز پر ایک کتاب پڑی ہے اس کو میز کے ایک مقام سے دوسرے مقام تک لیجاؤ اور اثنائے حرکت میں کتاب ہمیشہ میز سے مس کرتی رہے]

فرض کرو کہ کسی ایک قوت ح کا نقطہ عمل ق ہے جس کے محدد بلحاظ مبدأ و، لا اور ما ہیں اور جس کے قطبی محدد

ر اور طہ ہیں
پس لا = رجم طہ اور ما = رجب طہ جہاں وق = ر اور لا و ق = طہ



جب جسم ذرا سا سرک جائے تو اس وقت ق کے نئے مقام قَ کے محدد یہ ہوں گے۔

ر جم (طہ + عہ) + ا اور ر جب (طہ + عہ) + ب

یعنی رجم طہ جم عہ - رجب طہ جب عہ + ا اور رجب طہ جم عہ + رجم طہ جب عہ + ب

یعنی رجم طہ - عہ × رجب طہ + ا اور رجب طہ + عہ × رجم طہ + ب

چونکہ عہ نہایت چھوٹا ہے۔

اس لئے ق کے نئے اور پرانے محددوں کے تفاوت یہ ہیں:

ا - عہ × رجب طہ اور ب + عہ + ر جم طہ

یعنی ا - عہ ما اور ب + عہ لا

فرض کرو کہ ح کے اجزاء تحلیلی لاَ اور ماَ ہیں اب چونکہ ح کا موہوم کام لاَ اور ماَ کے موہوم کاموں کے مجموعہ کے برابر ہے اس لئے ح کا موہوم کام۔

= لاَ (ا - عہ ما) + ماَ (ب + عہ لا)

= ا لاَ + ب ماَ + عہ (ماَ لا - لاَ ما)

اسی طرح سے نظام کی کسی اور قوت کے موہوم کام کا حساب لگ سکتا ہے ہر ایک صورت میں ا، ب، عہ وہی رہیں گے اس لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوگا اگر اجِ (لاَ) + ب جِ (ماَ) + عہ جِ (ماَ لا - لاَ ما) = صفر، اس میں جِ(لاَ) اور جِ(ماَ) محاور و لا اور و ما کے متوازی قوتوں کے اجزاء ترکیبی کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں اس لئے اگر قوتیں باہم متوازن ہوں تو بموجب دفعہ ۸۳، جِ (لاَ) اور جِ (ماَ) جداگانہ صفر ہوں گے۔

نیز ماَ لا - لاَ ما = مبدأ و کے گرد لاَ اور ماَ کے معیاروں کا مجموعہ = ر کا معیار و کے گرد۔

اس لئے جِ(ماَ لا - لاَ ما) = و کے گرد تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ جو صفر کے برابر ہے بموجب دفعہ ۸۳۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ اگر قوتیں متوازن ہوں تو ان کے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

(۲۳۸) برعکس اس کے اگر کسی نقل مکان کے لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں متوازن ہوں گی۔

دفعہ گذشتہ کے طریق کتابت کے مطابق

قوتوں کا موہوم کام = ا جِ (لاَ) + ب جِ (ماَ) + عہ جِ (ماَ لا - لاَ ما) ... (۱)

اور یہ ہر ایک نقل مکان کے لئے صفر ہے۔ فرض کرو کہ جسم کو اس طرح سرکایا جاتا ہے کہ وہ محور لا کے متوازی فاصلہ ا طے کرتا ہے۔

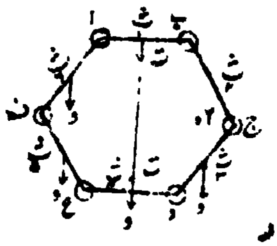
اس نقل مکان کے لئے ب اور عہ دونوں صفر ہیں اور (۱) سے
یہ حاصل ہوگا کہ۔

ا ∑ (لاَ) = ۰

پس ∑ (لاَ) = ۰ یعنی و لا کے متوازی اجزاء ترکیبی کا مجموعہ صفر ہے
اسی طرح صرف محور ما کی سمت میں جسم کو سرکانے سے
و ما کے متوازی تمام قوتوں کے اجزاء ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوگا۔
آخیر میں فرض کروکہ جسم کو مبداء و کے گرد محض گھمایا جاتا ہے
اس نقل کی صورت میں ا اور ب دونوں صفر ہیں اور (۱)
سے حاصل ہوتا ہے ∑ (ماَ لا ۔ لاَ ما) = ۰
یعنی و کے گرد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے۔
پس دفعہ ۸۳ کی تینوں شرائط توازن اس صورت میں موجود ہیں
اس لئے قوتوں کا نظام متوازن ہے۔

(۲۳۹) موہوم کام کے اصول کی توضیح کے لئے ہم ذیل کی مثال
کو حل کریں گے۔

مثال۔ چھ مساوی سلاخوں اب، ب ج، ج د، د ع، ع ف، ف ا کے
سروں کو باہم جوڑنے سے ایک مسدس شکل بنائی گئی ہے۔ سلاخ
اب کو افقی حالت میں ثابت کردیا گیا ہے اور اب اور دع
کے وسطی نقاط کو ایک رسی کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
رسی کا تناؤ ۳ و ہے جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔
فرض کرو کہ سلاخوں کے وسطی نقاط ش۱، ش۲، ش۳، ش۴،
ش۵، ش۶ ہیں۔ چونکہ ب ج اور ج د از روے تشاکل



سمت راس سے متساوی زاوئے بناتے ہیں
اس لئے خط اب سے نقاط ج ا ث
اور د کی گہرائیاں نقطہ ث کی گہرائی
کی نسبت بالترتیب ۲، ۳، ۴ گنی ہیں۔
فرض کرو کہ سطح عمودی میں نظام اسطرح سرک جاتا ہے کہ د اور
ع ہمیشہ ب اور ا میں سے گزرنے والے عمودی خطوط میں واقع
ہوتے ہیں اور د ع ہمیشہ افقی حالت میں رہتا ہے۔
اگر ث بقدر فاصلہ لا عموداً نیچے اترے تو ث فاصلہ ۳ لا
نیچے اترے گا اور ث فاصلہ ۴لا نیچے اتریگا اور ث اور ث
بالترتیب ۳ لا اور لا نیچے اتریں گے۔
اس لئے

اوزان کے موہوم کاموں کا مجموعہ

= و × لا + و × ۳ لا + و × ۴ لا + و × ۳ لا + و × لا

= ۱۲ و لا

اگر رسی کا تناؤ ت ہو تو اس کا کام = ت × (-۴ لا) ت کی
منفی علامت لینے کی وجہ یہ ہے کہ جس سمت میں نقطہ ث حرکت
کرتا ہے ت اس کی متقابل سمت میں عمل کرتی ہے۔

موہوم کام کے اصول سے

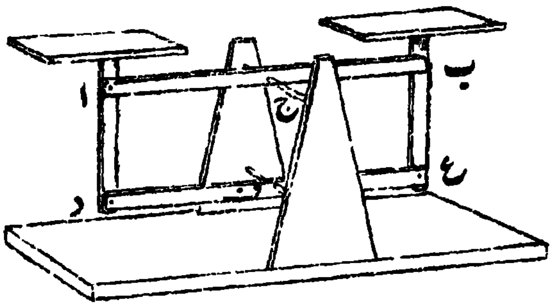
۱۲ و لا + ت (-۴ لا) = ۰ یعنی ت = ۳ و

(۲۴۰) روبرول کی ترازو

یہ ترازو عموماً خطوط تولنے کے کام آتی ہے اس میں چار سلاخوں

اب، ب ع، ع د، د ا کے سروں ا، ب، ج، د کو اس طرح کھیلتے ہوئے جوڑوں کے ذریعہ ملا دیا جاتا ہے کہ ان کے ملنے سے ایک متوازی الاضلاع پیدا ہو۔ نیز ا ب اور ع د کے وسطی نقاط ج اور ف کو اس طرح ثابت کردیا جاتا ہے کہ وہ ہمیشہ ایک عمودی خط مستقیم میں رہیں۔ یاد رہے کہ سلاخیں اب اور دع بلا تکلف ج اور ف کے گرد حرکت کرسکتی ہیں۔

ا د اور ب ع کے اوپر کے سروں پر پلڑے لگا دئے جاتے ہیں ایک پلڑے میں اشیاء رکھ دی جاتی ہیں جن کا تولنا مطلوب ہے اور دوسرے میں انکا متوازن باٹ ط۔ ہم اس بات کو موہوم کام کے اصول کے ذریعہ ثابت کریں گے کہ خواہ پلڑوں کے کسی مقام پر اشیاء رکھ دی جائیں ان کے وزن میں فرق نہیں آئے گا



چونکہ ج ب ع ف اور ج ا د ف اشکال متوازی الاضلاع ہیں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ترازو کو خواہ کسی زاوئے میں گھما دیا جائے سلاخیں ب ع اور ا د ہمیشہ ج ف کے متوازی رہیں گی اور اس لئے ہمیشہ عمودی ہوں گی۔

اگر سلاخ اب کو ایک چھوٹے سے زاویہ میں گھمایا جائے تو نقطہ ب اتنا اوپر اٹھیگا جتنا کہ نقطہ ا نیچے گرے گا۔ اس لئے

سلاخ ب ع اتنا اوپر اٹھیگی جتنا کہ سلاخ ا د نیچے گرے گی اور دائیں طرف کا پلڑا اتنا اوپر اٹھیگا جتنا کہ بائیں طرف کا پلڑا نیچے گریگا ایسی حرکت کے لئے سلاخ ب ع اور اس کے پلڑے کے اوزان کا موہوم کام ا د اور اس کے پلڑے کے اوزان کے موہوم کام کے متساوی اور متقابل ہوگا۔ پس موہوم کام کی مساوات میں یہ کام ایک دوسرے کو نابود کردیں گے۔

نیز اگر دائیں طرف کے پلڑے کا تحرک ر اوپر کی طرف ہو تو بائیں طرف کے پلڑے کا تحرک ر نیچے کی طرف ہوگا۔

اس لئے موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوگا۔

$$ط \times ر + و (-ر) = ۰$$

یعنی $ط = و$

پس معلوم ہوا کہ اگر مشین کسی حالت میں متوازن ہو تو اوزان و اور ط مساوی ہوتے ہیں اور اس شرط کا انحصار اس بات پر نہیں ہے کہ اوزان پلڑوں کے کسی خاص مقام پر رکھے جائیں۔ اس سے یہ بھی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر پلڑوں کے اوزان مساوی ہوں تو یہ ضروری نہیں کہ پلڑوں کی ایک ہی شکل ہو اور وہ ایک ہی طرح سے مشین کو لگائے جائیں۔

مثلاً شکل بالا میں اگر کسی پلڑے کا رخ ج ف سے ہٹا ہوا ہونےکی بجائے اس کی طرف مڑا ہوا ہو تو دوسرے پلڑے کے مقام کو تبدیل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی ۔

امثلہ نمبری (۳۹)

(۱) چار وزنی یکساں سلاخیں طول میں مساوی ہیں ان کے سروں کو کھیلتے ہوے جوڑوں کے ذریعہ ملانے سے ایک شکل معین بنائی گئی ہے جو اپنے ایک راس زاویہ سے آزادانہ لٹکتی ہے۔ اوپر کی سلاخوں کے درمیانی نقاط کو ایک ہلکی سلاخ کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے۔ جس کا اثر یہ ہے کہ شکل بھیچ نہیں سکتی۔ ثابت کرو کہ اس ہلکی سلاخ کا تناؤ ۴ و مس عہ ہے جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے اور ۲عہ معین کے نقطہ تعلیق پر کے زاویہ کو تعبیر کرتا ہے۔

(۲) چار یکساں سلاخوں کو قبضوں کے ذریعہ جوڑنے سے ایک معین کی شکل بنائی گئی ہے اس کی ہر ایک سلاخ کا طول ب ہے اور وزن و ۔ جن دو کونوں کو ملانے سے معین کا چھوٹا قطر پیدا ہوتا ہے ان کو ایک رسی کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے اگر ایک سلاخ کو افقی حالت میں سہارا جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ $\frac{۲ و (۲ ب^۲ - ا^۲)}{ب \sqrt{۴ ب^۲ - ا^۲}}$ ہے۔ جہاں ا رسی کا طول ہے۔

(۳) چھ مساوی سلاخوں کو کھیلتے ہوے جوڑوں کے ذریعہ ملانے سے ایک منتظم مسدس اب ج د ع ف بنایا گیا ہے ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے مسدس ایک عمودی سطح میں ساکن ہے اور اس کا ضلع اب ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے اگر ج اور ف کو ایک ہلکی رسی کے ذریعہ ملایا جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ

و $\sqrt{3}$ ہے۔

(۴) ایک تپائی کے تین مساوی یکساں پائے ہیں ہر ایک کا طول ا اور وزن و ہے ایک طرف ان کے سروں کو اکٹھا جوڑ دیا گیا ہے اور ان کے درمیانی نقاط کو رسیوں کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے ہر ایک رسی کا طول ب ہے۔ تپائی کے نچلے سرے ایک چکنی افقی سطح پر رکھے گئے ہیں اور مشترک جوڑ پر ایک وزن وَ لٹکا دیا گیا ہے ثابت کروکہ ہر ایک رسی کا تناؤ

$$\frac{۲}{۳}\left(۲وَ + ۳و\right)\frac{ب}{\sqrt{۹ا^{۲} - ۱۲ب^{۲}}} \text{ ہے۔}$$

(۵) چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع ڈھانچہ طیار کیا گیا ہے ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے اور ڈھانچہ ایک کونے سے لٹکتا ہے اگر مربع کے تین نچلے کونوں میں سے ہر ایک پر وزن و لٹکا دیا جائے اور افقی قطر کی بجائے ایک ہلکی سلاخ لگا دی جائے تاکہ مربع کی شکل میں فرق نہ آئے تو ثابت کروکہ اس سلاخ کا تناؤ ۴ و ہے۔

(۶) چار مساوی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین م ب ج د بنایا گیا ہے اور اس کے زاویوں ب اور د کو ایک رسی کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے جس کا طول ل ہے اگر نظام کو سطح عمودی میں اس طرح سہارا جائے کہ م ایک سطح افقی پر ٹکا ہوا ہو اور م ج عمود وار ہو تو ثابت کروکہ رسی کا تناؤ $۲و\,\frac{ل}{\sqrt{۴ا^{۲} - ل^{۲}}}$ ہے۔

اس میں و ہر ایک سلاخ کا وزن اور ا طول ہے۔

(۷) ایک وزنی لچکدار رسی کا اصلی طول ۲ π ا ہے اس کو ایک

چکنے مخروط کے گرد رکھا گیا ہے جس کا محور عمود وار ہے اور جس کا نصف زاویہ راس عہ ہے اگر رسی کا وزن و اور اس کی لچک کا مقیاس لہ ہو تو ثابت کرو کہ رسی اس حالت میں متوازن ہوگی جبکہ یہ ایک ایسے دائرہ کی شکل میں ہو جس کا نصف قطر

$$ا \left(۱ + \frac{و}{۲ط لہ} \text{ مم عہ}\right) \text{ ہے۔}$$

(۸) دو یکساں مساوی سلاخوں اب اور اج کو نقطہ ا پر کھیلتے ہوے جوڑوں سے جوڑ دیا گیا ہے اور وہ ایک چکنے عمودی دائرہ پر ساکن ہیں۔ دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور ہر ایک سلاخ کا طول ۲ ب ہے۔ اگر سلاخوں کا درمیانی زاویہ ۲ طہ ہو تو موہوم کام کے اصول کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$\text{ب جب}^۳ \text{ طہ} = \text{ا جم طہ}$$

(۹) مثال ۱۳ نمبری ۳۶ کو موہوم کام کے اصول کی مدد سے حل کرو۔

آسان متفرق مثالیں

(۱) دو قوتیں بالترتیب ۱۳ اور ۱۴ پونڈ وزن کے مساوی ہیں اور ان کے درمیان ایسا زاویہ منفرجہ ہے جس کی جیب $\frac{۱۲}{۱۳}$ ہے تو ان کا حاصل دریافت کرو۔

(۱) ایک ۱۰۰ پونڈ وزن کی قوت کو دو مساوی قوتوں میں تحلیل کرو

جن کا درمیانی زاویہ ۶۰° کا ہو۔

(۳) اب ج د ایک مربع ہے۔ اب، اج، اد کی سمتوں میں بالترتیب ۱، ۶، ۹ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ تو ان کے حاصل کی مقدار دو درجہ اعشاریہ تک صحیح دریافت کرو۔

(۴) دو قوتوں کے درمیان زاویہ ۱۲۰° کا ہے اور ان کا حاصل چھوٹی قوت پر عمود ہے۔ بڑی قوت ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔ تو دوسری قوت اور حاصل دریافت کرو۔

(۵) ایک ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د کے قطروں اج اور ب د کے نقاط تنصیف بالترتیب ع اور ف ہیں۔ اور ع ف کا نقطہ تنصیف ک ہے۔ تو ثابت کرو کہ جو قوتیں مقدار اور سمت میں اک، ب ک، ج ک اور د ک سے تعبیر ہوں وہ متوازن ہوں گی۔

(۶) ایک ۱۲ فٹ لمبی متوازی الافق سخت سلاخ ایک عمودی دیوار میں گڑی ہوئی ہے اگر ۲۸ پونڈ وزن اس کے سرے پر لٹکایا جائے تو یہ ٹوٹ جائے گی۔ دریافت کرو کہ ۸ سٹون وزن کا ایک لڑکا اس سلاخ پر کتنی دور تک بلا خطر جا سکتا ہے؟

(۷) ایک ڈنڈا وزن میں چار اونس اور طول میں ایک گز ہے۔ اس کو ایک میز پر اس طرح رکھدیا گیا ہے کہ اس کی ایک تہائی میز کے کنارے سے باہر نکلی ہوئی ہے تو دریافت کرو کہ زیادہ سے زیادہ کتنا وزن رسی کے ذریعہ ڈنڈے کے سرے پر لٹکایا جا سکتا ہے کہ ڈنڈا نہ گرے؟

(۸) ایک ۲۰ پونڈ وزنی یکساں شہتیر اس طرح ساکن ہے۔ کہ اسکا نچلا سرا زمین پر ہے۔ اور اوپر کے سرے سے ایک رسی بندھی ہے۔ رسی کے دوسرے سرے سے ایک وزن باندھ کر رسی کو افقی حالت میں ایک چرخی پر سے گزار دیا گیا ہے اگر شہتیر کا میلان سمت راس سے ۶۰° ہو۔ تو ثابت کرو کہ نچلے سرے پر دباؤ قریباً ۴۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔ اور یہ کہ رسی کے ساتھ قریباً ۲۶ پونڈ وزن بندھا ہے۔

(۹) چھ متوازی قوتیں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ پونڈ وزن کے مساوی ہیں۔ اور ان کے نقاط عمل ایک خط اب کے نقطہ ا سے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ انچ کے فاصلوں پر ہیں تو ان متوازی قوتوں کا مرکز دریافت کرو۔

(۱۰) ایک مثلث اب ج کا زاویہ ب قائمہ ہے۔ اور اب = ۱۸ انچ اور ب ج = ۱۱ انچ۔ نقاط ا، ب، ج پر بالترتیب تین ذرات وزنی ۴، ۵، ۶ پونڈ رکھ دئے گئے ہیں۔ تو ان کے مرکز ثقل کا فاصلہ ا سے معلوم کرو۔

(۱۱) ایک مثلث مساوی الاضلاع اب ج کے ضلع اب پر ج سے دوسری طرف ایک شکل مستطیل بنائی گئی ہے۔ جس کا ارتفاع اب سے نصف ہے تو ثابت کرو کہ کل شکل کا مرکز ثقل اب کا نقطہ وسط ہوگا۔

(۱۲) ایک مسدس منتظم میں سے ایک ایسا مثلث مساوی الاضلاع کاٹ دیا گیا ہے جس کا قاعدہ مسدس کا ایک ضلع ہے اور راس

مسدس کے مرکز پر ہے۔ تو باقیماندہ شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۱۳) چھ پیسے ایک افقی میز پر ایک دوسرے کے اوپر چن دیئے گئے ہیں۔ تو معلوم کرو۔ کہ سب سے نچلے اور سب سے اوپر والے پیسوں کے مرکزوں کا افقی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کتنا ہو سکتا ہے؟

(۱۴) اگر ایک ۱۲ انچ لمبے بیرم کے سروں پر دو وزن لٹکا نے سے توازن کی حالت میں نصاب پر ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی دباؤ پڑے اور سروں سے نصاب کے فاصلوں کی نسبت ۳ : ۲ ہو۔ تو دونوں وزن دریافت کرو۔

(۱۵) ایک سیدھے بیرم کا طول ۵ فٹ اور وزن ۱۰ پونڈ ہے اور اسکا نصاب اس ایک سرے پر ہے۔ اور نصاب سے ایک اور تین فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب ۳ اور چھ پونڈ وزن باندھے گئے ہیں۔ بیرم کے دوسرے سرے پر ایک قوت لگا کر رسی کو افقی حالت میں رکھا گیا ہے۔ نصاب پر کا دباؤ دریافت کرو۔

(۱۶) پانچ متحرک چرخیوں کا ایک نظام ایسا ہے کہ اس میں ہر ایک چرخی ایک علحدہ رسی کے ذریعہ لٹکتی ہے۔ تو زور ز اور بوجھ ب کا تعلق دریافت کرو۔ جب کہ ہر ایک چرخی کا وزن بھی ز ہے۔

(۱۷) پانچ بے وزن چرخیوں کا ایک نظام ایسا ہے کہ اس میں ہر ایک رسی ایک بے وزن تختی سے بندھی ہے اور اس تختی سے بوجھ لٹکتا ہے۔ اگر دو متصل رسیوں کا فاصلہ ایک انچ ہو تو معلوم کرو کہ بوجھ تختی کے کس مقام پر لٹکایا جاے کہ تختی افقی رہے۔؟

(۱۸) ایک جسم وزنی ۵ پونڈ ایک چکنی سطح پر پڑا ہے جس کا میلان افق سے ۳۰° ہے اس جسم پر ایک دو پونڈ وزن کی قوت سطح کے متوازی اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ط سطح سے زاویہ ۳۰° کا بناتی ہوئی عمل کرتی ہے۔ اگر جسم توازن میں ہو تو ط کی قیمت معلوم کرو۔

(۱۹) اگر ایک صحیح ترازو کا ایک پلڑا اتار دیا جائے اور دوسرے پلڑے میں کوئی وزن نہ رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ڈنڈی کا میلان افق سے $\frac{پ ا}{ڈ ق + پ ح}$ ستا ہوگا۔ جہاں ۲ ا ڈنڈی کا طول ہے اور ح ڈنڈی سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ ہے اور ق ترازو کے مرکز ثقل کا فاصلہ نقطہ تعلیق سے ہے اور پ پلڑے کا وزن ہے اور ڈ باقی ترازو کا وزن ہے۔

(۲۰) اگر ایک تک کی ڈنڈی کے مرکز ثقل کا فاصلہ نصاب سے ۲ انچ ہو اور حرکت پذیر وزن ۴ اونس ہو۔ اور ڈنڈی کا وزن دو پونڈ ہو تو مرکز ثقل سے صفر درجہ کا فاصلہ دریافت کرو۔ اور اگر پلڑے کے نقطہ تعلیق سے نصاب کا فاصلہ ۴ انچ ہو۔ تو متصل درجوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

(۲۱) اگر ایک پیچ کا محیط ۲۰ انچ ہو اور متصل چوڑیوں کا فاصلہ ۰.۵ انچ ہو تو اس کا مشینی مفاد دریافت کرو۔

(۲۲) ایک کھردری سطح کے ارتفاع اور قاعدہ کی نسبت ۳ : ۴ ہے اور جب اس سطح پر ایک جسم رکھا جاتا ہے تو ایک افقی قوت جو مقدار میں جسم کے وزن سے نصف ہے اس کو ٹھیک سہار سکتی ہے

ہم اور سطح کے درمیان قدر فرک معلوم کرو۔

۲) ایک تین فٹ لمبے زینے کا ایک سرا ایک چکنی عمودی دیوار پر
۔ قدر فرک ½ ہے اور زینہ کا پایہ دیوار سے ۶ فٹ پر ہے۔ دریافت
کہ ایک آدمی جس کا وزن زینے کے وزن سے ۴ گنا ہے زینے
کتنی دور تک زینہ کے پھسلے بغیر چڑھ سکتا ہے؟

۳) ایک اسطوانی شکل کے مینار کو ۱۰۰ فیدم (۶۰۰ گز) کھریا مٹی میں
رنا مقصود ہے۔ کھریا کی کثافت پانی سے ۲،۳ گنا ہے مینار کا
۱۰ فٹ ہے۔ تو اس انجن کی ایسی طاقت معلوم کرو جو مٹی کی
مطلوبہ مقدار کو ۱۲ روز میں ۸ گھنٹہ روزانہ کام کرکے نکالدے۔

مشکل متفرق مثالیں

۱) اگر مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز و ہو اور
ا، و ب، و ج کی سمتوں میں بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب کے
مناسب قوتیں عمل کریں تو ثابت کرو کہ ان کا حاصل مثلث کے
اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزریگا۔

۲) تین قوتیں ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی سمتوں میں
ایک ہی رخ عمل کرتی ہیں اور ان کا حاصل مثلث کے مرکز ثقل اور
مرکز عمودی میں سے گزرتا ہے۔ تو ثابت کرو کہ قوتوں کی نسبتیں یہ ہیں
جب ۲ا جب (ب - ج) : جب ۲ب جب (ج - ا) : جب ۲ج جب (ا - ب)
نیز یہ بھی ثابت کرو کہ قوتوں کا حاصل اندرونی اور بیرونی دائروں کے
مرکزوں میں سے گزریگا۔ اگر قوتوں کی نسبتیں یہ ہوں۔

جم ب ـ جم ج ؛ جم ج ـ جم ا ؛ جم ا ـ جم ب

(۳) تین قوتوں ط ا ، ط ب ، ط ج کا رخ ط سے باہر کی طرف ہے اور تین اور قوتوں اق ، ب ق ، ج ق کا رخ ق کی طرف ہے تو ثابت کرو کہ ان چھ قوتوں کا حاصل مقدار اور سمت میں ۳ط ق سے تعبیر ہوگا۔ اور مثلث ا ب ج کے مرکز ثقل میں سے گزریگا۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کے تین عمودوں کا نقطہ تقاطع م ہے اور بیرونی دائرہ کا مرکز ک ہے۔ تو ثابت کرو کہ تین قوتوں ا م ، ب م ، ج م کا حاصل ۲ ک م سے تعبیر ہوگا۔

(۵) ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں پر تین ذرات رکھے گئے ہیں۔ جن کے وزن دائروں کے نصف قطروں کی عکسی نسبت میں ہیں۔ تینوں ذرات کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

(۶) ا ب ج د ایک مستطیل ہے۔ ا د میں ایک نقطہ ط ایسا دریافت کرو کہ جب مثلث ط د ج مستطیل میں سے کاٹ دیا جائے۔ اور باقی شکل کو نقطہ ط سے لٹکائیں۔ تو ا ط اور ب ج متوازی الافق رہیں۔

(۷) ایک مثلثی پترا ا ب ج جس کا زاویہ ج منفرجہ ہے۔ اپنے ضلع ا ب ج کے بل ایک میز پر کھڑا ہے۔ تو ثابت کرو کہ وزن اقل جس کو ب سے لٹکانے سے مثلث الٹ جائے $\frac{1}{۲}$ و $\frac{ا^۲ + ۳ ب^۲ - ج^۲}{ج^۲ - ا^۲ - ب^۲}$ ہوگا۔ جہاں ا ، ب ، ج مثلث کے اضلاع ہیں اور و اس کا وزن ہے۔ اگر ج^۲ > ا^۲ + ۳ ب^۲ تو نتیجہ کا کیا مطلب ہوگا؟

وہ تاش کے تپے ایک میز پہ اس طرح ایک دوسرے کے اوپر رکھے گئے ہیں کہ ہر ایک پتہ اپنے نچلے پتے سے طول کے رخ باہر کو نکلا ہوا ہے۔ اگر ہر ایک پتہ اتنا نکلا ہوا ہو جتنا کہ ممکن ہے۔ تو ثابت کرو کہ متصل پتوں کے سروں کے درمیانی فاصلے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

(۹) اگر اَ ا، بَ ب، جَ ج ...... ن قوتوں کو تعبیر کریں جن کے نقاط عمل اَ، بَ، جَ ..... ہوں اور جن کے حصے ا، ب، ج ..... ہوں تو ثابت کرو کہ ان کا حاصل مقدار اور سمت میں ن × کَ ک سے تعبیر ہو گا۔ جہاں ک کان مساوی ذرات اَ، بَ، جَ ..... کا مرکز جمود اور ک، ن مساوی ذرات ا، ب، ج ..... کا مرکز جمود ہے۔

اگر کَ اور ک ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو کیا نتیجہ ہوگا؟

(۱۰) ایک جسم وزنی و کا ایک حصہ وزنی وَ کا ٹکڑا لا فاصلہ تک حرکت دیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ دونوں حالتوں میں تمام جسم کے مرکز ثقلوں کا خط وصل کٹے ہوئے حصہ کے مرکز ثقلوں کے خط وصل کے متوازی ہو گا۔

(۱۱) دو یکساں سلائیں اب اور اج ایک ہی چیز کی بنی ہوئی ہیں۔ اور بذریعہ استوار جوڑ کے ا پر جوڑ دی گئی ہیں۔

اب کا طول اج سے دو چند ہے اور زاویہ ب ا ج ۶۰° کا ہے۔ اگر سلاخوں کا مرکز جمود ک ہو۔ تو ثابت کرو کہ

ب ک = اج $\sqrt{\frac{19}{12}}$ ۔ اور اگر اس نظام کو نقطہ ب سے

بے تکلف لٹکا دیا جائے۔ تو ثابت کرو کہ ا پر کا عمل دو حصوں پر مشتمل ہے۔ ایک عمودی قوت ½ و کے مساوی اور دوسرا ایک جفت جس کا معیار ½ و $\frac{اج}{۱۹}$ ہے۔ جہاں و اس نظام کا وزن ہے
(۱۲) اگر ایک پھاٹک کے قبضوں کا درمیانی فاصلہ ۴ فٹ ہو اور پھاٹک کا عرض ۱۰ فٹ ہو اور وزن ۵۰۰ پونڈ ہو۔ تو یہ فرض کرکے کہ نچلا قبضہ تمام وزن کو سہارتا ہے ثابت کرو کہ اوپر والے قبضہ پر ۶۲۵ پونڈ وزن کے برابر دباؤ پڑے گا۔
(۱۳) ایک زینہ مثلث متساوی الساقین کی شکل کا ہے اور وہ ایک افقی فرش پر اس طرح رکھدیا گیا ہے کہ ہر ایک ساق سمت راس سے زاویہ عہ بناتی ہے۔ اور ایک رسی کے ذریعہ جو اس کی ساقوں کے نقاط تنصیف سے بندھی ہے۔ اس کی شکل قائم رکھی جاتی ہے اگر ایک وزن و زینے کے ایک ڈنڈے پر رکھا جائے۔ جس کی بلندی فرش سے زینہ کی بلندی کا $\frac{۱}{ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ رسی کے تناو کا اضافہ $\frac{۱}{ن}$ و مس عہ ہوگا۔ یہ مان لیا جائے کہ رگڑ کہیں نہیں ہے۔
(۱۴) ایک اسطوانے کو جس کا نصف قطر ر ہے ایک عمودی دیوار کے ساتھ ملاکر اس کا محور افق کے متوازی ثابت کردیا گیا ہے ایک یکذات چپٹا شہتیر جس کا طول ۲ ل اور وزن و ہے اس طرح رکھ دیا گیا ہے کہ اس کا ایک سرا دیوار کے ساتھ ہے اور دوسرا اسطوانے پر ہے۔ تو ثابت کرو کہ رگڑ نہ ہونے کی صورت میں $\frac{ل}{ر}$ = $\frac{۵\sqrt{۵}-۱}{۱۰\sqrt{۲}}$ اور دیوار پر کا دباؤ = ½ و اور اسطوانہ

کا عمل = ½ ‾ھ۲‾ و ۔

(۱۵) ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲۵ لؔ ہے ایک چکنے اسطوانی پیالے میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا کچھ حصہ اندر اور کچھ باہر ہے۔ پیالے کا نصف قطر ل ہے۔ ثابت کروکہ حالت توازن میں سلاخ افق سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اور یہ بھی ثابت کروکہ اگر پیالے کا وزن سلاخ سے کم از کم ۶ گنا نہ ہو تو پیالہ الٹ جائے گا۔

(۱۶) ایک الٹنے والے برتن کی اندرونی سطح کروی ہے اور وہ ایک محور کے گرد بلاتکلف گھوم سکتا ہے۔ محور کرے کے مرکز سے بقدر فاصلہ ج نیچے ہے۔ اور برتن کے مرکز ثقل سے بقدر فاصلہ ا اوپر ہے۔ اور ایک وزنی گولہ برتن کی تہ پر رکھا گیا ہے۔ تو ثابت کروکہ اگر گولے کا وزن برتن کے وزن کے ا/ج سے زیادہ ہو۔ تو برتن الٹ جائے گا۔

(۱۷) ایک نصف کروی خول کو پانی سے بھرکر ایک چپٹے ڈھکنے سے بالکل بند کردیا گیا ہے۔ اور کنارے کے ایک نقطہ سے لٹکا دیا گیا ہے اس حالت میں چپٹے پہلو کا میلان سمت راس سے عہ ہے ثابت کروکہ پانی کے وزن کی نسبت خول کے وزن سے یہ ہے مس عہ − ½ : ⅜ − مس عہ ۔

(۱۸) دھات کی پتلی چادر کا بنا ہوا ایک مجوف اسطوانہ دونوں طرف پر کھلا ہوا ہے۔ اس کا نصف قطر ا ہے اسطوانے کو ایک چکنی افقی سطح پر رکھکر اس کے اندر دو چکنے کرہ ایک دوسرے کے

اوپر رکھدئے گئے ہیں - ہر ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ اور ۲ ر > ۱ اور < ۲ ا - اگر اسطوانے کا وزن و ہو اور ہر ایک کرہ کا وزن وَ ہو - تو ثابت کرو کہ اسطوانہ کھڑا رہیگا - لیکن عین گرنے کو ہوگا اگر و × ا = ۲ وَ (ا - ر)۔

(۱۹) ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے - اس کو دو چکنی کھونٹیوں کے درمیان اس طرح رکھدیا گیا ہے کہ مثلث کی سطح عمودی ہے اور راس نیچے کو ہے - اگر کھونٹیاں ایک ہی خط افقی میں واقع ہوں اور مثلث کا قاعدہ کھونٹیوں کے فاصلے سے تین گنا ہو اور زاویہ راس ۲ عہ ہو اور مثلث کا قاعدہ سمت راس سے زاویہ جب ا (جم عہ) بنائے تو ثابت کرو کہ تختی متوازن ہوگی -

(۲۰) ایک منشور کی تراش عمودی ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے اور وہ دو مائل سطحوں پر اس طرح پڑا ہے - کہ اس کے دو کنارے افقی ہیں - سطحوں کے میلان افق سے عہ اور بہ ہیں اگر افقی کناروں میں سے گزرنے والی سطح کا میلان سمت راس سے طہ ہو تو ثابت کرو - کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{۲}\sqrt{\text{۳}}\ \text{جب عہ جب بہ} + \text{جب (عہ + بہ)}}{\sqrt{\text{۳}}\ \text{جب (عہ - بہ)}}$$

(۲۱) ایک پتلی تختی وزنی ایک پونڈ شکل میں مثلث مساوی الاضلاع ہے - اسکو ایک میز کے کنارے پر اس طرح کھڑا کردیا گیا ہے - کہ اس کے قاعدہ کی ایک چوتھائی میز پر ہے - تختی کو ایک

ڈورے کے ذریعہ گرنے سے روکا گیا ہے۔ ڈورے کا ایک سرا تختی کے راس سے بندھا ہے۔ اور دوسرا سرا میز کے ایک نقطہ سے بندھا ہے۔ اگر ڈورا اس سطح عمودی میں ہو جس میں کہ مثلث واقع ہے۔ اور ڈورے کی لمبائی مثلث کے راس کی بلندی سے دو چند ہو۔ تو ڈورے کا تناؤ دریافت کرو۔

(۲۲) ایک ٹھوس مخروط کی بلندی ل ہے اور نصف زاویہ راس عہ ہے۔ مخروط کا قاعدہ ایک عمودی دیوار کے ساتھ لگاکر اور اس کے راس سے رسی باندھکر اسے سہارا جاتا ہے۔ رسی دوسرے طرف دیوار کے ایک نقطہ سے باندھ دی جاتی تو ثابت کرو کہ رسی کا طول زیادہ سے زیادہ ل $\sqrt{1+\frac{1}{4}\text{مس}^2\text{عہ}}$ ہوگا۔

(۲۳) ایک مخروط کی بلندی ل ہے اور قاعدہ کا نصف قطر ر ہے۔ ایک رسی ایک طرف تو اس کے راس سے باندھ دی جاتی ہے اور دوسرے طرف اس کے گول قاعدہ کے محیط پر ایک نقطہ سے باندھ کر ایک چکنی کھونٹی پر لٹکا دیجاتی ہے۔ اگر اس حالت میں مخروط کا محور افقی ہو۔ تو ثابت کرو کہ رسی کا طول $\sqrt{\text{ل}^2+4\,\text{ر}^2}$ ہے۔

(۲۴) تین مساوی چکنے کرے ایک چکنی افقی سطح پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہوئے پڑے ہیں۔ اور ایک رسی کا حلقہ انکے مرکزوں کی سطح میں ان کے گرد گزرتا ہے۔ اور ان پر بالکل ٹھیک آتا ہے اگر ایک چوتھا کرہ ان کے اوپر رکھا جائے تو

ثابت کرو کہ رسی کے تناؤ کو کسی ایک کرہ کے وزن سے نسبت
۱ : ۳ : ۲√۶ ہے۔

(۲۵) ایک چکنی سلاخ کا طول ۲ ل ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنی سطح مائل پر ہے۔ جس کا میلان افق سے عہ ہے۔ سطح مائل سے فاصلہ ف پر ایک ریل ہے جس پر سلاخ ٹکی ہوئی ہے۔ اگر سلاخ کا میلان سطح مائل سے طہ ہو تو ثابت کرو کہ

ف جب عہ = ل جب² طہ جم (طہ - عہ)

(۲۶) ایک مربع تختی کے دو کونوں سے رسی باندھ کر ایک دیوار کے ساتھ اس کو ایک چکنی کھونٹی پر لٹکا دیا گیا ہے اگر رسی کا طول تختی کے طول سے کم ہو۔ تو ثابت کرو کہ توازن کی تین صورتیں ہوں گی۔

(۲۷) ایک نصف کروی پیالہ جس کا نصف قطر ر ہے ایک چکنی افقی میز پر پڑا ہے اور ایک سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے اور وزن پیالے کے وزن کے برابر ہے۔ کچھ پیالے کے اندر اور کچھ باہر ہے تو ثابت کرو کہ محل توازن ذیل کی مساوات سے حاصل ہو گا۔

ل جب (عہ + بہ) = ر جب عہ = -۲ ر جم (عہ + ۲ بہ) جہاں عہ نصف کرہ کے قاعدہ کا میلان افق سے ہے اور سلاخ کے اندرونی حصہ کے محاذی مرکز پر زاویہ ۲ بہ بنتا ہے۔

(۲۸) ایک یکساں سلاخ وزنی و کے دونوں سروں سے عمودی رسیاں باندھ کر ایک دیوار کے ساتھ دو کیلوں سے

اس کو افقی حالت میں لٹکایا گیا ہے۔ ایک چکنا بے وزن فانہ دیوار اور سلاخ کے درمیان ایک قوت $\frac{ق}{۲}$ سے نیچے کو دبایا جاتا ہے۔ فانہ رسیوں سے مس نہیں کرتا اور اس کا نچلا کنارہ افقی رہتا ہے اور اس کا ایک پہلو دیوار کے ساتھ مس کرتا ہے اگر ہر ایک رسی کا طول ل ہو تو دریافت کرو کہ سلاخ دیوار سے کس قدر ہٹ جائے گی؟

(۲۹) ایک چکنی سطح مائل اب کا میلان افق سے عہ ہے ایک یکساں وزنی چکنا تختہ اج سطح مائل کے نچلے سرے ا پر ایک چکنے قبضہ کے ذریعہ لگا دیا گیا ہے۔ تختہ کا طول ۲ ل ہے۔ سطح مائل اور تختہ کے درمیان ایک چکنا اسطوانہ ہے جس کا نصف قطر ر ہے۔ تختہ کا دباؤ اسطوانے کو نیچے پھسلنے سے روکتا ہے۔ اگر تختہ کا وزن و اور اسطوانہ کا وزن ن ہو اور تختے اور سطح مائل کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ن\,ر}{و\,ل} = جم\,(عہ + طہ)\,\frac{۱ - جم\,طہ}{جب\,عہ}$$

(۳۰) دو مساوی گول تختیاں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ر ہے اور کنارے چکنے ہیں۔ دو عمودی سطحوں کے درمیان کونے میں اپنے چپٹے پہلوؤں کے بل رکھ دیگئی ہیں سطحوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہے۔ دونوں تختیاں زاوئے کے خط منصف کو مس کرتی ہیں۔ تو ثابت کرو کہ چھوٹی سی چھوٹی گول تختی جو ان دونوں تختیوں کے درمیان ان کو جدا کئے بغیر

رکھی جاسکتی ہے۔ اس کا نصف قطر ر (قط عہ-۱) ہے۔

(۳۱) چار بے وزن سلاخوں کو کھیلتے ہوے جوڑوں کے ذریعہ جوڑ کر ایک مستطیلی ڈہانچہ اب ج د تیار کیا گیا ہے۔ اور اد کو عمودی حالت میں مستحکم کردیا گیا ہے۔ اوپر والی افقی سلاخ اب کے مقام پر وزن ط رکھدیا گیا ہے اور ایک رسی اج کے ذریعہ ڈہانچہ کی مستطیلی شکل قائم رکھی گئی ہے۔ تو رسی کا تناو دریافت کرو۔ اور ثابت کروکہ اگر وزن کو نچلی سلاخ ج د پر پہلے مقام کے عین نیچے رکھا جائے۔ تو رسی کے تناؤ میں فرق نہیں آئے گا۔

(۳۲) ایک یکساں سلاخ م ن کے سرے دو ثابت کھردری مستقیم جھریوں و ا اور و ب پر ٹکے ہوے ہیں۔ جھریاں ایک ہی عمودی سطح میں افق سے زاویہ عہ اور بہ بناتی ہیں ثابت کروکہ جب سرا م سمت ا و میں پھسلنے کو ہو۔ تو افق سے م ن کے زاویہ میلان کا مماس $\frac{\text{جب (عہ - بہ - ۲ لہ)}}{\text{۲ جب (بہ + لہ) جب (عہ - لہ)}}$ ہوگا جہاں لہ زاویہ فرک ہے۔

(۳۳) ایک سلاخ کا ایک سرا ایک کھردری سطح مائل کے کسی مقام پر جوڑ دیا گیا ہے اور سلاخ اس سرے کے گرد سطح مائل پر بلا تکلف گھوم سکتی ہے سطح کا میلان افق سے عہ ہے اور زاویہ عہ زاویہ فرک سے بڑا ہے۔ ثابت کروکہ بڑے سے بڑا زاویہ جو سلاخ توازن کی حالت میں خط میلان اعظم سے بنا سکتی ہے جب$^{-1}$ (مس لہ مم عہ) ہے۔

(۳۴) دو مساوی یکساں سلاخوں کے سرے ایک قبضہ کے ذریعہ جوڑ دیئے گئے ہیں اور یہ نظام ایک کھردرے ثابت کرہ پر متشاکلاً پڑا ہے اگر ہر ایک سلاخ کا طول ۲ ا ہو اور کرہ کا نصف قطر ج ہو تو توازن کا انتہائی مقام دریافت کرو۔ اور اگر قدر فرک ج ÷ ا ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ کا انتہائی میلان خط راس سے مس‌ا (ج ر / ا) ہے۔

(۳۵) ایک یکساں سیدھی سلاخ کو ایک کھوکھلے اور کھردرے کرہ کے اندر افقی حالت میں اتنا اونچا رکھا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے اگر سلاخ کا طول ۲ ج ہو اور کرہ کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کے نقطہ وسط اور کرہ کے مرکز کا خط وصل سمت راس سے زاویہ مس‌ا $\frac{ر ا}{\sqrt{ا^۲ - ج^۲}}$ بناتا ہے۔ جہاں ر قدر فرک ہے

(۳۶) ایک کھردری سلاخ کو افقی حالت میں ثابت کر دیا گیا ہے اور ایک اور سلاخ جس کا ایک سرا ایک کھسکتے ہوئے جوڑ کے ذریعہ ایک معین نقطہ پر جوڑ دیا گیا ہے ثابت سلاخ پر ساکن ہے اگر معین نقطہ سے ثابت سلاخ پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ب اور اس کا میلان افق سے عہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ ثابت سلاخ کے اس حصہ کا طول جس پر متحرک سلاخ ساکن رہ سکتی ہے $\frac{۲ ر ب جم عہ}{جب^۲ عہ - ر^۲ جم^۲ عہ}$ ہے۔ جہاں ر قدر فرک ہے۔

(۳۷) ایک شیشے کی سلاخ ایک اسطوانہ کی شکل کے گلاس میں اس طرح متوازن ہے کہ اس کا نچلا سرا گلاس کی عمودی سطح کے

کسی مقام پر ٹکا ہوا ہے اور سلاخ کچھ اندر اور کچھ باہر ہے اگر بڑے سے بڑا زاویہ اور چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو سلاخ خط راس سے بنا سکتی ہے بالترتیب عہ اور بہ ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ فرک یہ ہے۔

$$\frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{جب}^{۲}\,\text{عہ} - \text{جب}^{۲}\,\text{بہ}}{\text{جب عہ جم عہ} + \text{جب بہ جم بہ}}$$

(۳۸) ایک سلاخ ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح صندوق کے کچھ اندر اور کچھ باہر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا نچلا سرا صندوق کے ایک عمودی پہلو پر جاکر لگتا ہے اور سلاخ کا ایک اور مقام مقابل کے چکنے کنارہ پر دھرا ہے۔ اگر صندوق کا وزن سلاخ کے وزن کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ اگر سلاخ عین پھسلنے کو ہو اور صندوق اسی وقت عین گر پڑنے کو ہو تو اسوقت سلاخ جو زاویہ سمت راس سے بنائیگی وہ $\frac{۱}{۲}$ لہ + $\frac{۱}{۲}$ جم$^{-۱}$ ($\frac{۱}{۳}$ جم لہ) ہوگا۔ اس میں لہ زاویہ فرک ہے۔

(۳۹) ایک یکساں وزنی سلاخ ایک کھردری افقی میز پر پڑی ہے اس کے کسی نقطہ پر رسی باندھ کر اسے اس کی عمودی سمت میں کھینچا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ کس نقطہ کے گرد سلاخ گھومنا شروع کرے گی۔

اگر ایک قوت سلاخ کے مرکز پر اس کی عمودی سمت میں عمل کرنے سے اس کو عین ہلانے کے قابل ہو اور ایک اور قوت سلاخ کے ایک کنارہ پر اسی سمت میں عمل کرنے سے سلاخ کو عین ہلا سکے تو ثابت کروکہ ان قوتوں کی باہمی

نسبت $\sqrt{3}$ + ۱ : ۱ ہوگی ۔

(۴۰) ایک ہلکی سلاخ کے نقطہ وسط کے دونوں طرف دو ایسے نقاط پر جن میں سے ہرایک کا فاصلہ وسط سے ج ہے دو مساوی وزنی ذرے لگا دیئے گئے ہیں اور دو ایسے نقاط پر جن میں سے ہرایک کا فاصلہ وسط سے ا ہے دو رسیاں باندھ دی گئی ہیں اور سلاخ کو ایک کھردری افقی میز پر رکھدیا گیا ہے ۔ اب اگر رسیوں کو سلاخ کی عمودی سمت میں اس طرح کھینچا جائے کہ رسیاں سلاخ کے دونوں طرف سمت راس سے زاویہ طہ بنائیں تو رسیوں کا کم سے کم تناؤ دریافت کرو جس سے سلاخ گھومنے لگے اور ثابت کرو کہ اگر قدر فرک $\frac{ا}{ج}$ ہو تو تناؤ کم سے کم اُس وقت ہوگا جب طہ = ۴۵° ۔

(۴۱) دو مساوی متشابہ اجسام ا اور ب کو ایک رسی سے باندھ کر ایک کھردری افقی سطح پر رکھدیا گیا ہے ۔ ہرایک جسم کا وزن و ہے اور قدر فرک ر ہے ۔ ایک قوت ط جو ۲ر و سے کم ہے پہلے سمت ب ا میں لگائی جاتی ہے اور پھر اس کو سطح افقی میں بتدریج زاویہ طہ میں گھمایا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ط > $\sqrt{2}$ ر و تو دونوں وزن عین پھسلنے کو ہوں گے جس وقت جم طہ = $\frac{ط}{۲ر و}$ لیکن اگر ط < $\sqrt{2}$ ر و اور > ر و تو صرف ا پھسلیگا جس وقت جب طہ = $\frac{ر و}{ط}$ ۔

(۴۲) ایک یکساں کھردرا شہتیر ا ب دو اور شہتیروں کے نقاط ا اور ج پر افقی حالت میں ساکن ہے۔ثابت کرو کہ چھوٹی سے چھوٹی افقی قوت جو نقطہ ب پہ ب اکی عمودی سمت میں عمل کرنے سے شہتیر کو عین ہلا سکتی ہے وہ دو قوتوں $\frac{۱}{۲}$ ر و اور ر و $\frac{بَ - اَ}{۲ اَ - بَ}$ میں سے چھوٹی قوت کے برابر ہے اس میں ا ب = ۲ اَ ، ا ج = بَ اور شہتیر کا وزن و ہے اور قدر فرک ر ہے۔

(۴۳) ایک یکساں کھردرا شہتیر ا ب دو مساوی اور یکساں طور پر کھردرے کروں پر دھرا ہے اور ان کو نقاط ج اور د پر مس کرتا ہے شہتیر کا طول ۲ اَ ہے اور کروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ بَ ہے۔ اگر بَ ، $\frac{۳ اَ}{۴}$ سے بڑا نہ ہو تو ثابت کرو کہ شہتیر کے لئے ایک ایسا محل توازن دریافت کرنا ممکن ہے جہاں ایک قوت ط شہتیر کے عمود وار ب پر عمل کرنے سے شہتیر کو نقاط ج اور د پہ ایک ساتھ ہلا دینے کے قابل ہو۔

(۴۴) ایک یکساں وزنی شہتیر دو کھردری ثابت سطحوں کے درمیان ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہے جو ثابت سطحوں سے زاوئے قائمے بناتی ہے دونوں سطحیں یکساں طور پر کھردری نہیں ہیں لیکن ان کے زوایاے میلان افق سے معلوم ہیں۔ اگر حالت سکون میں شہتیر متوازی الافق ہو تو اس کی شرط توازن دریافت کرو۔

(۴۵) ایک یکساں سلاخ کا ایک سرا ایک کھردری افقی سطح پر
ٹکا ہوا ہے اور دوسرا ایک اتنی ہی کھردری سطح مائل پر
ساکن ہے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اس حالت
میں سلاخ انتہائی توازن میں ہے۔ اگر سلاخ سطح عمودی میں
واقع ہو اور زاویہ فرک لہ ہو تو ثابت کروکہ افق سے سلاخ
کا زاویہ میلان طہ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا۔

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{جب (عہ} - \text{۲ لہ)}}{\text{۲ جب لہ جب (عہ} - \text{لہ)}}$$

سطحوں کے عمودی تعامل بھی دریافت کرو۔

(۴۶) ایک پرکار کی دونوں ساقین ایک چکنے افقی اسطوانہ
پر ساکن ہیں ثابت کروکہ جوڑ پہ فرکی جفت جو سلاخوں کو
پھسلنے سے روکتا ہے۔ و (ج مم عہ قم عہ - اجب عہ)
ہے اس میں و ہر ایک ساق کا وزن ۲ عہ ساقوں کا درمیانی
زاویہ ہے اور ا ہر ایک ساق کے مرکز ثقل کا فاصلہ قبضہ
سے ہے

(۴۷) ایک دراز کے دستے اطراف سے برابر برابر فاصلوں پر
ہیں اور ان کا فاصلہ ایک دوسرے سے ج ہے ثابت کروکہ
دراز کو صرف ایک دستے سے پکڑ کر باہر کھینچنا ناممکن ہوگا۔
اگر پشت سے سامنے تک کا فاصلہ ر ج سے کم ہو جہاں
ر قدر فرک ہے۔

(۴۸) ایک کھڑکی کے چوکھٹ میں ایک قالب اوپر نیچے
پھسل سکتا ہے اس کو دو عمودی رسیاں جن کے سروں سے

مساوی اوزان بندھے ہیں سہارے ہوئے ہیں اگر ایک رسی ٹوٹ جائے تو کھڑکی کے چوکھٹ اور قالب کے درمیان جو قدر فرک ہے اس کی کم سے کم قیمت دریافت کرو کہ دوسرا وزن ایک رسی ٹوٹنے کے بعد بھی قالب کو سہار سکے۔

(۴۹) ایک مدور حلقہ ایک افقی شہتیر سے لٹکتا ہے اور ایک آدمی ایک ہاتھ سے اس حلقہ سے لٹکتا ہے۔ اگر حلقہ کا نصف قطر ایک فٹ ہو اور حلقہ اور شہتیر کے درمیان قدر فرک $1 \div \sqrt{3}$ ہو تو آدمی کے ہاتھ اور حلقہ کے درمیان جو کم سے کم فاصلہ ہو سکتا ہے اسے دریافت کرو۔ اس سوال میں حلقے کے وزن کو نظر انداز کرو۔

(۵۰) ایک مربع کو دو چکنی کھونٹیوں کے درمیان اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح عمود وار ہے کھونٹیاں خط افقی میں ایک دوسرے سے فاصلہ ج پر واقع ہیں اور مربع کا ضلع ۱۲ ہے ثابت کرو کہ مربع اس وقت متوازن ہوگا جب اس کے ایک کنارے کا میلان افق سے 45° یا $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\frac{ا^2 - ج^2}{ج^2}$ ہو۔

(۵۱) تین مساوی گول تختیاں ا، ب، ج ایک چکنی افقی سطح پر ایک دوسرے کو چھوتی ہوئی رکھی گئی ہیں۔ علاوہ اس کے ب اور ج ایک کھردری عمودی دیوار کو بھی مس کرتی ہیں۔ اگر تختیوں کی باہمی قدر فرک تختیوں اور دیوار کی قدر فرک کے مساوی ہو اور $2 - \sqrt{3}$ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ اگر ا کو عموداً دیوار کی طرف کسی قوت ط سے دھکیلا جائے۔ تو کسی قسم کی

حرکت پیدا نہ ہوگی۔

(۵۲) اگر ایک چرخ و محور کے مرکز ثقل کا فاصلہ ان کے عین وسط میں سے گزرنے والے مرکزی خط سے ا ہو تو ثابت کرو کہ چرخ ایسی حالت میں متوازن ہو سکتا ہے جب کہ مرکزی خط اور مرکز ثقل میں سے گزرنے والی سطح کا میلان سمت راس سے طہ سے کم ہو۔ جہاں جب طہ = ب/ا جب فہ اس میں ب محور کا نصف قطر اور فہ زاویہ فرک ہے۔

(۵۳) ایک کھردری سطح مائل کا قاعدہ ایک کھردری میز پر رکھا ہوا ہے اور سطح مائل پر ایک ذرہ و دھرا ہے۔ سطح کا وزن وَ ہے اور فرک کی قدریں برابر ہیں۔ اگر ایک بتدریج بڑھنے والی قوت ذرہ و پر سطح کے متوازی عمل کرے تو معلوم کرو کہ آیا ذرہ اوپر کی طرف پہلے حرکت کریگا یا سطح میز پر پہلے پھسلنے لگیگی۔ سطح کا میلان افق سے عہ ہے۔

(۵۴) ایک سطح مائل پر ایک اسطوانہ ہے جس کا محور افق کے متوازی ہے ایک شخص وزنی و اسطوانہ پر سیدھا کھڑا ہوکر اس کو سطح پر ساکن رکھتا ہے اسطوانہ کا وزن وَ ہے اور سطح کا میلان افق سے عہ ہے۔ اگر یہ فرض کیا جائے کہ اس شخص کے پاؤں ا پر ہیں اور اسطوانہ کی ایک عمودی تراش لیجائے جو ا میں سے گزرے اور سطح کو نقطہ ب پر مس کرے تو ثابت کرو کہ اب کے محاذی اس تراش کے مرکز پر جو زاویہ طہ بنتا ہے وہ مساوات ذیل سے

حاصل ہوتا ہے۔

و جب (ط + عہ) = (و + وَ) جب عہ

اس سوال میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ رگڑ اجسام کو پھسلنے سے روکنے کے لئے کافی ہے۔

(۵۵) دو کھردرے یکساں کرے جن کے نصف قطر مساوی ہیں لیکن جن کے اوزان و۱ اور و۲ ہیں ایک کروی پیالہ میں اس طرح ساکن ہیں کہ ان کے مرکزوں کو ملانے والا خط افق کے متوازی ہے اور پیالہ کے مرکز پر زاویہ ۲عہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ کروں کے درمیان فرک کی قدر (و۱ − و۲)/(و۱ + و۲) مس(۴۵ − عہ/۲) سے کم نہیں ہو سکتی۔

(۵۶) دو استوار بلا وزن سلاخوں کے سروں کو مضبوطی سے جوڑ دیا گیا ہے اور وہ ایک دوسری سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں۔ مشترک جوڑ پر ایک وزن نصب کرکے اس نظام کو دو کھردری کھونٹیوں پر رکھدیا گیا ہے۔ کھونٹیاں ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں اور ان کی رگڑوں کی قدریں ر اور رَ ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخیں اپنے تشاکل مقام سے دونو طرف بغیر پھسلنے کے زاویہ ½ مس⁻¹ (ر + رَ)/۲ میں گھمائی جا سکتی ہیں۔

(۵۷) ایک کرہ کا وزن و ہے اس کو ایک کھردری سطح مائل پر رکھدیا گیا ہے سطح کا میلان افق سے عہ ہے اور عہ زاویہ فرک سے کم ہے۔ اگر ایک وزن و جب عہ/(جم عہ − جب عہ) کرہ کے اس قطر کے اونچے سرے پر جو سطح کے متوازی ہے باندھ دیا جائے

توثابت کرو کہ یہ کرہ کو سطح کے نیچے کی طرف لڑھکنے سے روکنے کے لئے عین کافی ہو گا۔
اگر اس وزن کو ذرا سا بڑھا دیا جائے یا گھٹا دیا جائے تو بتاؤ اس کا کیا اثر ہو گا۔

(۵۸) دو مساوی یکساں سلاخوں کے سروں کو استوار جوڑ کے ذریعہ بشکل مثلث متساوی الساقین ملا کر ان کو ایک عمودی دائرہ پر رکھدیا گیا ہے دائرہ کا نصف قطر ایسا ہے کہ سلاخوں کا مرکز ثقل دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے۔ثابت کرو کہ اگر سلاخیں اس وقت عین حرکت کرنے کو ہوں جب کہ جوڑ اور دائرہ کے مرکز کو ملانے والا خط افق کے متوازی ہو تو جب ی = جب ۲عہ۔ اس میں ۲عہ سلاخوں کا درمیانی زاویہ ہے اور ی زاویہ فرک ہے۔ اگر سلاخوں کو استوار جوڑ کی بجائے ایک قبضہ سے وصل کیا جائے اور باقی دونو سروں کو رسی سے ملا دیا جائے تو ثابت کرو کہ رسی دائرہ سے نہیں ملیگی اگر عبب عہ > $\frac{1}{2}$ اور اگر یہ شرط پوری ہو اور سلاخیں عین اس وقت پھسلنے کو ہوں جب کہ راس اور مرکز دائرہ کا خط وصل متوازی الافق ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ اس وقت $\frac{و}{۲}$ $\sqrt{۱ + قم عہ}$ ہو گا۔ اس میں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

(۵۹) ایک مستطیل شکل کے عمودی شہتیر کا نچلا سرا ایک چکنے فرش پر دھرا ہے اور وہ عمودی سمت میں ہی حرکت کرسکتا ہے۔ اگر شہتیر کا وزن و ہو اور اگر ایک چکنی سطح مائل کو جبکا

میلان معلوم ہے پیچھے سے ایک افقی قوت کے ذریعہ دھکیل کر شہتیر کے نیچے کردیا جائے تو اس قوت کو دریافت کرو۔ اگر رگڑ صرف فرش اور سطح مائل کے درمیان ہو اور اگر سطح مائل کو شہتیر کے نیچے ایک مقام پر چھوڑ دیا جائے تو قدر فرک کی اقل قیمت دریافت کرو کہ شہتیر کے دباؤ سے سطح باہر نہ نکل آئے۔

(۶۰) ایک گول تختی تین مساوی اور عمودی رسیوں کے ذریعہ جو تختی کے محیط پر برابر برابر فاصلوں پر بندھی ہیں افقی حالت میں لٹکتی ہے۔ تختی کا وزن و اور نصف قطر ا ہے اور ہر ایک رسی کا طول ب ہے۔ ثابت کرو کہ ایک افقی جفت کی مقدار جو تختی کو بقدر زاویہ ط گھماکر اس کو اس حالت میں تھامے رہے $\text{و}\,\text{ا}^{2}\frac{\text{جب ط}}{\sqrt{\text{ب}^{2}-\text{۴}\,\text{ا}^{2}\,\text{جب}^{2}\frac{\text{ط}}{2}}}$ ہے۔

(۶۱) ایک عمودی سطح میں دو سلاخیں ہیں ان میں سے ہر ایک سمت راس سے زاویہ عہ بناتی ہے اور ان میں سے ہر ایک پر ایک چھوٹا چھلا وزنی و چڑھا ہوا ہے۔ چھلوں کو ایک باریک لچکدار رسی سے ملا دیا گیا ہے۔ رسی کا اصلی طول ۲ا ہے اور اس کی لچک کا مقیاس لہ ہے۔ نیز ہر ایک سلاخ اور چھلہ کے درمیان قدر فرک مس بہ ہے۔ اگر رسی متوازی للافق ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک چھلا سلاخ کے ایک خاص حصے کے کسی نقطہ پر ساکن رہ سکیگا جس کا طول

$\text{و لہ}^{-1}\,\text{ا قم عہ}\left\{\text{مم}(\text{عہ}-\text{بہ})-\text{مم}(\text{عہ}+\text{بہ})\right\}$ ہے۔

(۶۲) ایک فانہ کا زاویہ ۹۰° ہے اور وہ ایک چکنی میز پر پڑا ہے اس کے مائل رخ پر ایک ۲۰ پونڈ وزن ہے جس کو ایک رسی سہارے ہوئے ہے جو ایک طرف تو وزن سے بندھی ہے اور دوسری طرف فانے کی چوٹی پر ایک چکنے چھلے میں سے گزر کر ایک وزن و کو شاقولی سمت میں سہارتی ہے و کی مقدار دریافت کرو۔

نیز ذیل کی ہر ایک صورت میں اس افقی قوت کو دریافت کرو جو فانے کو ساکن رکھنے کے لئے ضروری ہے۔

(۱) جب چھلہ فانے کے ساتھ نہ لگا ہوا ہو۔

(۲) جب چھلہ فانے کے ساتھ لگا ہوا ہو۔

اس سوال کو مفروضات ذیل کی بناپر بھی حل کرو

فانے کا مائل رخ کھردرا ہے رگڑ کی قدر $\frac{۱}{۳}$ ہے اور وزن ۲۰ پونڈ عین نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہے۔

(۶۳) ایک اسطوانہ کا نصف قطر ر ہے اور وزن و ہے اس کو ایک چکنی سطح مائل پر جس کا زاویہ ع ہے ایک ایسے بیرم کے ذریعہ اٹھانا منظور ہے جس کا طول ل ہے اور جس کا میلان افق سے ب ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ایسا کر سکتی ہے اس کی مقدار

$$\frac{\text{و ر}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{جب ع}}{\text{۱ + جم (ع + ب)}}$$ ہے۔

(۶۴) ایک یکساں تختی شکل میں مثلث قایم الزاویہ متساوی الساقین ا ب ج ہے اور اس کا وزن ۳ اونس ہے اس کو بطور

خط تولنے کی ترازو کے استعمال کیا گیا ہے۔ تختی کا نقطہ ج جو قائمہ ہے ایک نقطہ معینہ سے لٹکتا ہے۔ اسی نقطہ پر ایک شاقولی رسی بندھی ہے۔ خطوط کو زاویہ ا سے لٹکاتے ہیں۔ اور جہاں شاقولی رسی ایک پیمانہ اب کو جس پر درجہ ۱ اونس ۲ اونس، ۳ اونس وغیرہ کھدے ہیں قطع کرتی ہے وہاں درجوں کو پڑھنے سے خطوط کے اوزان معلوم ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ پیمانے کے درجوں کے فاصلے نقطہ ا سے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۶۵) ایک یکساں زینہ کا طول ل فٹ اور وزن و پونڈ ہے دو آدمی ا اور ب زینہ کو افقی حالت سے عمودی حالت میں لاتے ہیں۔ ا ایک سرے پر کھڑا ہوتا ہے اور ب دوسرے سرے سے زینہ کے نیچے ہوکر اس کے متصل ڈنڈوں کو زمین سے د فٹ کی اونچائی پر تھامتا ہوا ا کی طرف جاتا ہے۔ ایسا کرنے میں وہ قوت ہمیشہ عمودی سمت میں لگاتا ہے۔ جب ب اس ڈنڈے کو تھامے ہوے ہو جو ا سے ن فٹ کے فاصلہ پر ہے تو اس وقت اس کی قوت کی مقدار دریافت کرو۔ نیز ثابت کرو کہ ن ویں فٹ سے (ن - ۱) ویں فٹ تک جانے میں اس کے کام کی مقدار $\frac{\text{و ل د}}{\text{۲ن (ن-۱)}}$ ہوتی ہے۔

معلوم کرو کہ ا کو اپنی طرف کے سرے کو کس وقت اپنے
دن سے نیچے دبانا چاہئے۔

(۶۶) اگر ایک معمولی دراز کے صرف ایک دستے کو دبایا جائے
تو ثابت کرو کہ وہ اندر کی طرف نہیں جائے گا جب تک
کہ کسی اور طرح سے قوت لگا کر اس کو بقدر فاصلہ ا ر
اندر کی طرف پہلے داخل نہ کردیا جائے۔ اس میں ا
دستوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور ر قدر فرک ہے۔

(۶۷) تین یکساں وزنی سلاخوں کے سروں کو اکٹھا جوڑنے
سے ایک مثلث متساوی الاضلاع بنایا گیا ہے ہر ایک سلاخ
ایک چکنے عمودی مخروط پر لگی ہوئی ہے جس کے راس کا
نصف زاویہ عہ ہے اس طرح سے مثلث افقی حالت
میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک قبضہ پر کا عمل ~~ہے~~

(۶۸) ایک ریل کے درمیانی حصہ کا نصف قطر ج ہے
اور اس کے گول سروں کے نصف قطر ا ، ا ہیں۔ ریل
کے گرد ڈورا لپیٹ کر اس کو ایک سطح مائل پر رکھدیا
گیا ہے اور جیسے ریل سطح پر سے نیچے لڑھکتی ہے
ڈورا اس پر سے اترتا آتا ہے۔ اگر سطح کا میلان افق
سے عہ ہو اور قدر فرک ر ہو تو ثابت کرو کہ ریل
ڈورے کے ذریعہ اوپر کے طرف کو کھینچی جا سکتی ہے۔
بشرطیکہ ر ، ج جب عہ / (ا ج جم عہ) سے کم نہ ہو۔

(۶۹) ثابت کرو کہ ایک مستوی ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کا

مرکز ثقل ذیل کے عمل ہندسی سے دریافت ہو سکتا ہے
مثلثوں اب د، ج ب د کے مرکز ثقل لا اور ما دریافت
کرو، فرض کرو کہ لا ما، ب د سے ی پر ملتا ہے تب
مرکز ثقل مطلوب ث ایک ایسا نقطہ لا ما پر ہے کہ
ما ث = لا ی ۔

(۷۰) ایک دروازے کے نچلے سرے اور فرش میں کچھ
فاصلہ رہتا ہے۔ اس میں ایک بلا وزن فانہ ٹھوک دیا گیا ہے
فانہ اور فرش کے درمیان جو قدر فرک ہے وہ معلوم ہے
اگر فانہ کا زاویہ ایک خاص مقدار سے کم ہو تو ثابت کرو کہ
کوئی قوت دروازہ کو نہیں کھول سکتی۔ اس سوال میں
فانہ کی ترچھی یا مائل سطح کو چکنا فرض کرو۔

(۷۱) ایک ثابت کھردرے اسطوانے کا نصف قطر ر
ہے اس کی چوٹی پر ایک یکساں کھردرا تختہ رکھا ہوا ہے۔
ایک آدمی تختے کے عین نقطہ تماس کے اوپر کھڑا ہوتا ہے
اگر تختہ کا وزن آدمی کے وزن کا ن گنا ہو اور تختے اور اسطوانے
کے درمیان زاویہ فرک لہ ہو تو ثابت کرو کہ آدمی تختہ پر
فاصلہ (ن + ۱) ر لہ بغیر تختے کے اسطوانہ پر سے پھسلنے
کے چل سکتا ہے۔

(۷۲) ایک کھردری سطح مائل پر ایک چکر عمودی سطح میں
ساکن ہے اور چکر میں سے گزرنے والی سطح، سطح مائل کو
خط میلان اعظم میں قطع کرتی ہے۔ چکر کے گرد ایک رسی

لپٹی ہوئی ہے اور اس کا ایک سرا محیط کے ایک نقطہ پر بندھا ہے اور دوسرا سرا چکر کے اوپر کی طرف ایک کھونٹی سے بندھا ہے جو سطح مائل پر چکر سے گزرنے والی عمودی سطح میں واقع ہے۔ اگر فرک کا زاویہ لہ ہو، سطح مائل کا میلان عہ اور کھونٹی پر چکر کے مقابل زاویہ طہ بنے تو ثابت کرو کہ انتہائی توازن اُس وقت ہوگا جس وقت طہ = عہ + جم$^{-1}$ [جب(عہ-لہ) / جب لہ]۔ اگر طہ اس سے بڑا ہو تو کیا ہوگا؟

(۷۳) ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ایک بھاری یکساں کرہ کی سطح پر لگائی جائے اور اس کو ایک کھردری عمودی دیوار کے ساتھ توازن میں رکھ سکے

و جم لہ یا و مس لہ [مس لہ - ۲مس$^{-1}$ (لہ-۱)] ہوگی اگر بالترتیب لہ (<یا>) جم$^{-1}$ ۲/۳۔

جہاں و وزن ہے اور لہ زاویہ فرک ہے۔

(۷۴) ایک یکساں سلاخ کا وزن و ہے اس کے ایک سرے پر قبضہ لگا ہے اور وہ بلا تکلف اس سرے کے گرد حرکت کرسکتی ہے، سلاخ کا دوسرا سرا ایک کھردری عمودی دیوار پر ٹکا ہوا ہے اور دیوار سے زاویہ عہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ سرا ایک دائرہ کی ایسی قوس کے کسی مقام پر ساکن رہ سکتا ہے جس (قوس) کا زاویہ ۲مس$^{-1}$ (ر مس عہ) ہو۔ نیز ثابت کرو کہ کسی ایک انتہائی مقام پر دیوار پر کا دباؤ ½ و [مم^{2} عہ + ر^{2}]$^{1/2}$ ہوگا جہاں ر قدر فرک ہے۔

(۷۵) اگر ایک یکساں ٹھوس نصف کرہ سے بڑے سے بڑا

کعب کاٹ کر نکالدیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے باقی حصہ کی کروی سطح ایک پوری کھردری سطح مائل پر اس طرح ساکن رہ سکتی ہے کہ اس کا قاعدہ افق سے زاویہ

$$جب^{-1}\left[\frac{۸(۳\pi - ۶۲)}{۹\pi - ۸}\ جب\ عہ\right]$$

بناتے۔ جہاں عہ سطح مائل کا میلان ہے۔

(۷۶) ایک اسطوانی کاک کا طول ل اور نصف قطر ا ہے اس کو ایک بوتل سے آہستہ سے نکالا گیا ہے اگر کسی خاص وقت کاک اور بوتل کے مشترک رقبہ تماس کی ایک اکائی پر عمودی دباؤ یکساں ہو اور ط کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ کاک نکالنے میں جو کام ہوگا اس کی مقدار π ر ل^{۲} ط ہے جہاں ر قدر فرک ہے۔

جوابات

نمبری (۱)

(۱) (۱) ۲۵ (۲) ۳√۳ (۳) ۱۳ (۴) ۲√۶۱ (۵) ۶۰° (۶) ۱۵ یا √۵۰۵ (۷) ۳ (۲) ۲۰ پونڈ وزن ، ۴ پونڈ وزن (۳) سمت جنوب مغرب میں ۲√۲ پونڈ وزن (۴) ۲۰۵ پونڈ وزن (۵) ط پونڈ وزن پہلے جزو کی سمت پر عمود (۶) ۲ پونڈ وزن (۷) ۲۰ پونڈ وزن (۸) ۱۷ پونڈ وزن (۹) ۶۰° (۱۰) ۳ پونڈ وزن ، ۱ پونڈ وزن (۱۱) (۱) ۱۲۰° (۲) جستم ا (− ۴/۵) یعنی ۱۵۱° ۳′ (۱۲) جتم ا (− ۱/۲ × (ا^۲ + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲)) (۱۳) دونو دی ہوئی قوتوں کے حاصل کی سمت میں (۱۴) (۱) ۸ و ۲۳ (۲) ۶۴ ، ۲۱ (۳) ۶۸° ۱۲′ (۴) ۵۶ و ۲

نمبری (۲)

(۱) ۵ √۳ اور ۵ پونڈ وزن (۲) (۱) ط/۲ ط√۲ (۲) ۱۱/۱۴ ط (۳) ۵۰ پونڈ وزن (۴) ہر ایک ۱/۴ × ۱۰۰ √۳ یعنی ۳۵، ۷۱، ۵ پونڈ وزن ہے (۵) ۶۰۳ و ۳۶ اور ۸۳ و ۴۴ پونڈ وزن قریباً (۶) ط (√۳ − ۱) اور ط/۲ (√۶ − √۲) یعنی ط × ۳۲ ، ۷ و اور ط × ۵۱۷۶ و (۸) ط √۲ اور ۲ ط (۹) ط √۲ دوسرے جزو سے ۱۳۵° کا زاویہ بناتا ہوا (۱۰) ۱۰ √۵ سمت راس کے ساتھ زاویہ مس ا ۱/۲

بناتی ہوئی یعنی ۳۶،۲۲ سمت راس کے ساتھ زاویہ ۲۶° ۳۴′
بناتی ہوئی (۱۱) ۳۳،۶۲ پونڈ وزن اور ۸،۵۱ پونڈ وزن

نمبری (۳)

(۱) ۱:۱:√۳ (۲) √۳:۱:۲ (۳) ۱۲۰° (۴) ۹۰°، ۱۱۲°، ۳۷′
(۱۸۰° - جتم⁻¹ ۵/۱۳)، اور ۱۵۷° ۲۳′ (۹) ح۱ = ۳۴ پونڈ وزن، ع۱ = ۱۸° اور
ح۲ = ۶،۵ پونڈ وزن، ع۲ = ۶۹° (۱۰) ½ ۱۰۱°، ۷۵° (۱۱) ۵۲، ۹۵°
(۱۲) ۶۲،۷۶، ۱۰۱ (۱۳) ۴۶، ۱۳۸° (۱۴) ۶،۲۹، ۱۴° (۱۵) ۶۶،۲
ہنڈرڈ ویٹ

نمبری (۴)

(۱) ۴۰ (۲) جتم⁻¹ (- ¼) یعنی ۱۰۴° ۲۹′ (۳) ۲√۳ اور √۳
پونڈ وزن (۴) ۱۵√۳ اور ۱۵ پونڈ وزن (۵) ۵ : ۴
(۶) ۵ اور ۱۳ (۹) ۱۲ پونڈ وزن (۱۶) وہ خط مستقیم جو ج اور
اب کے نقطہ وسط میں سے گزرتا ہے (۱۹) نقطہ مطلوبہ
قطروں کے نقاط وسط کو ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔
(۲۰) ب میں سے ب ل، اج کا متوازی کھینچو تاکہ ج د
کو ل پر ملے نقطہ لا پر د ل کی تنصیف کرو۔ تو حاصل
ایک ایسی قوت ہوگی جو لا میں سے گزرے گی۔ اور اد
کے متوازی ہوگی اور اد سے دو چند ہوگی۔

نمبری (۵)

(۱) ۴ پونڈ وزن اق کی سمت میں (۲) √(۵۰ + ۳۲√۳)
پہلی قوت کے ساتھ زاویہ مس⁻¹ (۴√۳ + ۷)/۱۷ بناتی ہوئی یعنی

٧٦، ٩ پونڈ وزن پہلی قوت سے ٣٦° ٥٢′ کا زاویہ بناتی ہوئی۔
(٣) ٢ ط درمیانی قوت کی سمت میں (٤)، ط تیسری قوت
سے زاویہ جم$^{-1}$ ١/٢√٣ یعنی ٣٨° ١٣′ بناتی ہوئی (٥) ٣√ ط
تیسری قوت سے زاویہ ٣٠° کا بناتی ہوئی۔ (٦) ١٣١، ١٢
اب کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ ٥ یعنی ٧٨° ١١′ بناتی ہوئی
(٧) ٢٤، ١٤ پونڈ وزن (٨) ٥ پونڈ وزن دوسری قوت
کے متقابل (٩) ١/٢ ط (٥√ + ١)، √(١٠ + ٢√٥) ق اور ر کا درمیانی
زاویہ تنصیف کرتی ہوئی (١٠) ١٠ پونڈ وزن متقابل کے راس
زاویہ کی سیدھ میں (١١) √(١٢٥ + ٩٨√٣) پونڈ وزن پہلی قوت
کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ (٢٤ + ١٩√٣)/٢٣ بناتی ہوئی۔ یعنی ١٥،٥٨
پونڈ وزن پہلی قوت کے ساتھ زاویہ ٧٦° ٣٩′ بناتی ہوئی۔
(١٣) ط × ٢٧٠، ٥ مثمن کے متقابل کے راس زاویہ کی
سیدھ میں۔ (١٤) ٧٩، ١٧ پونڈ وزن خط معین سے زاویہ
٦٦° ٢٩′ بناتی ہوئی (١٥) ٤٠، ٩ پونڈ وزن خط معین سے
زاویہ ٣٥° ٥٤′ بناتی ہوئی (١٦) ٥٠، ٣٩ پونڈ وزن خط معین سے
زاویہ ١١١° ٢٤′ بناتی ہوئی۔ (١٧) ٥، ٢٤ کیلو گرام وزن ١٩
سے زاویہ ٣٠° کا بناتی ہوئی۔

نمبری (٦)

(١) و/٢ (٦√ − ٢√) اور و (٣√ − ١) (٢) ٢/٣ ٢ اور ١/٣ ٣
پونڈ وزن (٣) ١٢٦ اور ٣٢ پونڈ وزن (٤) ٥٦ اور ٤٢
پونڈ وزن (٥) ٤٨ اور ٣٦ پونڈ وزن (٦) ٤،٨ اور ١٢

پونڈ وزن (۷) و (۸) ۱۲۰ پونڈ وزن (۹) رسی کے حصوں کا میلان سمت راس سے ۶۰° ہے۔ اور دباؤ و$\sqrt{۳}$ ہے (۱۰) ۲۳ء۰ پونڈ وزن (۱۱) وزن برابر ہیں (۱۲) ۱۳۴ء۱ انچ (۱۳) $\frac{۴}{۵}$۲ اور $\frac{۳}{۵}$۹ پونڈ وزن (۱۴) ۱۴ پونڈ وزن (۱۵) ۶ فٹ ۵ انچ اور ۲ فٹ ۴ انچ (۱۶) ہر ایک جسم کے وزن کے مساوی ہے۔ (۱۸) ۲ ط جم $\frac{ع}{۲}$ جہاں ع وہ زاویہ ہے جو دہانہ پر باگ کے دونوں حصوں کے درمیان بنتا ہے (۲۰) $\frac{و}{۲}$ قط $\frac{ع}{۲}$ (۲۲) و اور و$\sqrt{۲}$

نمبری (۷)

(۱) ۹ء۲۴ پونڈ وزن اور ۹۱ء۱۹ پونڈ وزن (۲) $۱\frac{۱}{۴}$ اور $۱\frac{۳}{۴}$ ٹن وزن (۳) ۸ء۳۷ اور ۸۰ء۱۵ پونڈ وزن (۴) ۲ء۱۵ پونڈ (۵) ۴ء۳، ۶ء۶۱، ۳ء۴۶، ۵ء۵۵، ۷ء۱ اور ۵ ہنڈرڈ ویٹ بالترتیب (۶) ۱۶۰ پونڈ اور ۱۲۰ پونڈ، ۱۲۸ اور ۶۲ پونڈ وزن (۷) ۲۰ اور ۶ ہنڈرڈ ویٹ (۸) ۸۴ء۲۴۴ اور ۳۴ء۵۶۱ پونڈ وزن (۹) ۲ء۶۳ اور ۳ء۹۲ ٹن وزن (۱۰) (۱) ۳، $۱\frac{۱}{۴}$ اور ۱ ٹن وزن (۲) ۲، $\frac{۱}{۲}$ اور ۱ ٹن وزن (۱۱) اج میں ۱ء۰۵ ٹن وزن کی دھکیل اور ج د میں ۹ء۱۱ ٹن وزن کا تناؤ۔

نمبری (۸)

(۱) (۱) ح = ۱۱، اج = ۷ انچ (۲) ح = ۳۰، اج = ۱ فٹ ۷ انچ (۳) ح = ۱۰، اج = ۱ فٹ ۶ انچ (۲) (۱) ح = [illegible]

اج = ۲۵ انچ (۲) ح = ۸۰، اَج = - ۵۰ انچ (۳) ح = ۱۰۶،
اج = - ۱۹ $\frac{۱}{۱۲}$ انچ (۳) (۱) ق = ۹۰، اب = ۸ $\frac{۱}{۲}$ انچ
(۲) ط = ۲ $\frac{۵}{۷}$، ح = ۱۳ $\frac{۳}{۴}$ (۳) ق = ۶ $\frac{۵}{۷}$، ح = ۱۲ $\frac{۳}{۱۴}$
(۴) (۱) ق = ۲۵، اب = ۳ $\frac{۳}{۵}$ انچ (۲) ط = ۲۴ $\frac{۶}{۷}$،
ح = ۱۳ $\frac{۳}{۴}$ (۳) ق = ۲ $\frac{۶}{۷}$، ح = ۳ $\frac{۳}{۴}$ (۵) ۱۵ اور ۵ پونڈ
وزن (۶) ۴۳ $\frac{۱}{۳}$ اور ۱۳ $\frac{۱}{۳}$ پونڈ وزن (۸) ۹۸ اور ۷۰ پونڈ
وزن (۹) پتھر زیادہ مضبوط آدمی سے ۲ فٹ ہونا چاہئے۔
(۱۰) ۴ فٹ ۳ انچ (۱۱) ۱ پونڈ وزن (۱۲) ۱ فٹ
(۱۳) ۲۰ پونڈ، ۴ انچ، ۸ انچ (۱۴) $\frac{۳}{۷}$ ۱۴ انچ، $\frac{۵}{۷}$ ۱۰ انچ
(۱۶) ۴۰ اور ۳۵ پونڈ وزن (۱۷) $\frac{۱}{۲}$ ۹ (۱۸) قوت اس طرح
بدلتی ہے جس طرح کہ اس کے ہاتھ اور کندھے کے درمیانی
فاصلہ کا عکس (۱۹) (۱) ۱۰۰ اور ۱۵۰ پونڈ وزن (۲) ۵۰ اور ۱۰۰ پونڈ
وزن (۳) ۲۵ اور ۷۵ پونڈ وزن (۲۰) ۱ پونڈ وزن پہلی قوت سے
۵ فٹ کے فاصلہ پر (۲۱) ۵۵، ۷۷ اور ۴۵، ۳۴ پونڈ وزن
قریباً۔

نمبری (۹)

(۱) ۱۰۱ (۲) ۵ $\sqrt{۳}$ (۳) ۷۵، $\sqrt{۳}$ فٹ پونڈ = ۹۰، ۱۲۹
پونڈ وزن (۴) ۲ پونڈ وزن سے ۳ فٹ ۸ انچ (۵) ۲۰ پونڈ
سے ۶، ۶ فٹ کے فاصلہ پر (۶) سرے سے $\frac{۱}{۲}$ ۲ فٹ
(۷) $\frac{۳}{۴}$ ۲ پونڈ (۸) $\frac{۱}{۳}$ ۲ پونڈ (۹) (۱) ہر ایک ۴ ٹن فی
(۲) $\frac{۱}{۴}$ ۴ ٹن وزن / $\frac{۳}{۴}$ ۳ ٹن وزن (۱۰) ب کھونٹی سے

۲ انچ ہے (۱۱) ۱/۲ ہنڈرڈ ویٹ (۱۲) شہتیر کے طول کی چو تھائی (۱۳) ۵۵ پونڈ وزن (۱۴) وزن ۱/۲ ۳ پونڈ ہے۔ اور ۵ پونڈ وزن سے ۵/۲ انچ کے فاصلہ پر عمل کرتا ہے۔

(۱۵) ۳ اونس (۱۶) ۱/۲ ۸۵، ۱/۲ ۸۵ اور ۲۹ پونڈ وزن

(۱۷) ۹۶، ۹۶ اور ۴۶ پونڈ وزن (۱۸) دھری سے ۱۵/۲۸ ۱ انچ

(۱۹) ۲ √۳ پونڈ وزن ج ا کے متوازی اور ا د کو نقطہ ط پر قطع کرتا ہوا جہاں ا ط = ۹/۴ ا د (۲۰) ۲ ط، د ج کی سمت میں (۲۱) حاصل، اج کے متوازی ہے اور ا د کو ط پر قطع کرتا ہے جہاں ا ط = ۷/۵ فٹ

(۲۲) ۲۰ √۵ پونڈ وزن، ا ب اور ا د کو ۲ نقاط پر قطع کرتا ہوا جو ا سے بالترتیب ۸ فٹ اور ۱۶ فٹ ہیں

(۲۳) ط √۳، ب ج پر عمود اور ا سے ایک نقطہ ق پر قطع کرتا ہوا جہاں ب ق = ۳/۴ ب ج

(۲۹) ۱/۲ ل √۳ کی بلندی پر جہاں ل رسی کا طول ہے

(۳۱) ایک خط مستقیم جو قوتوں کے زوایہ خارجہ کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم کرتا ہے۔ جن کی جیبوں کی عکسی نسبت قوتوں کی نسبت کے مساوی ہے۔ (۳۳) ۲۲۵ پونڈ وزن

نمبری (۱۰)

(۲) ۹ فٹ پونڈ (۳) ۶ (۴) ایک قوت جو ج پر کی قوت کے مساوی متوازی اور مخالف ہے اور اج کے ایک نقطہ ک پر عمل کرتی ہے جہاں ج ک = ۷/۵ ا ب

نمبری (۱۱)

(۲) ۵۰° (۳) ۱۰ $\sqrt{۲}$ اور ۱۰ پونڈ وزن (۴) رسی کا طول اج ہے۔ (۵) $\frac{۲}{۳}$ و $\sqrt{۳}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\sqrt{۳}$ (۸) $\frac{۱}{ل}$، ایک سے کم اور $\frac{۱}{۲}$ سے زیادہ ہونا چاہئے (۱۲) $\frac{۳}{۵}$ $\sqrt{۵}$ اور $\frac{۳}{۵}$ ۲۰ پونڈ وزن (۱۴) و قم عہ اور و مم عہ (۱۵) $\frac{و}{۲}$ و $\sqrt{۳}$ (۱۶) ۳۰°، $\frac{۲}{۳}$ و $\sqrt{۳}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\sqrt{۳}$ (۱۰) $\sqrt{۷}$: ۲ $\sqrt{۳}$

(۱۸) $\frac{و}{۳}$ $\sqrt{۳}$ پونڈ وزن (۱۹) $\frac{و}{۳}$ ۶ پونڈ وزن

(۲۱) $\frac{ح\sqrt{ح^{۲}+۱^{۲}جب^{۲}عہ}}{ح+۱جم عہ}$ جہاں ۱ تصویر کی بلندی ہے۔

(۲۲) $\frac{ب}{۱+ب}$ × $\frac{ر}{\sqrt{ر^{۲}-۱ب}}$ × و اور $\frac{۱}{۱+ب}$ × $\frac{ر}{\sqrt{ر^{۲}-۱ب}}$ × و

(۲۵) ۱۶٫۳ فٹ، ۱۳۳ اور ۱۱۸٫۰ پونڈ وزن

(۲۶) ۱۵٫۵ پونڈ وزن (۲۷) ۶٫۷۵ اور ۱۶٫۶ پونڈ وزن

(۲۸) ۲٫۸۳ اور ۳٫۱۶ ہنڈرڈ ویٹ (۲۹) ۲۶٫۸ اور ۱۰٫۴۲ پونڈ وزن

نمبری (۱۲)

(۱) $\frac{و}{۳}$ و $\sqrt{۳}$ (۲) $\frac{و}{۲}$ و $\sqrt{۳}$ (۴) $\frac{و}{۲}$ و مم عہ، $\frac{و}{۲}$ و مم عہ

(۶) $\frac{و جب بہ}{جب(عہ+بہ)}$، $\frac{و جب عہ}{جب(عہ+بہ)}$، مس$^{-۱}$ $\left(\frac{مم بہ - مم عہ}{۲}\right)$

(۸) $\frac{۳و}{۵}$ پونڈ وزن (۱۱) اج = اَ، تناؤ = ۲ و $\sqrt{۳}$

(۱۴) کنارے اور قاعدے کے تعامل قریباً ۲۴٫۳ اور ۸٫۴ اونس وزن ہیں (۱۵) $\frac{د}{۲}\sqrt{ن^{۲}-ر^{۲}}$

(۱۸) و × $\frac{ن}{ب}$ (۲۳) $\frac{۱}{۸}$ $\sqrt{۶}$ (۲۴) $\frac{۱}{۳}$۱۳۳ اور $\frac{۲}{۳}$۱۶۶

پونڈ وزن (۲۶) $\frac{۱۱}{۳۴}$ ۱۷ اور $\frac{۲۵}{۳۴}$ پونڈ وزن (۲۷) ۲۰ پونڈ وزن

نمبری (۱۳)

(۱) حاصل قوت ۴ $\sqrt{۲}$ پونڈ وزن تیسری قوت سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے اور حاصل جفت کا معیار ۱۰ ل ہے۔ جہاں ل مربع کا ضلع ہے (۲) حاصل قوت ۵ ط $\sqrt{۲}$، د ب کے متوازی ہے۔ اور جفت کا معیار ۳ ط ل ہے جہاں ل مربع کا ضلع ہے (۳) قوت ۶ پونڈ وزن، ج ب کے متوازی ہے اور جفت کا معیار $\frac{۲۱\sqrt{۳}\,ل}{۲}$ ہے جہاں ل مربع کا ضلع ہے

نمبری (۱۴)

(۱) ضلع افق سے زاویہ $مس^{-۱}\,۲$ بناتا ہے (۲) ۱۵ ا (۳) (ن + ۲) $\sqrt{ب^۲ + ج^۲}$ (۴) ایک وزن جو میز کے وزن کے مساوی ہو (۶) ۱۰ پونڈ (۷) اس خط پر جو ٹوٹے ہوئے پائے کے متقابل کے پائے کو مرکز سے ملاتا ہے۔ اور مرکز سے مربع کے ثلث قطر کے برابر (۸) ۱۲۰ پونڈ (۹) $جب^{-۱}\frac{ط}{د + و}$
(۱۱) ا پر کا دباؤ و $\frac{جم\,ا}{۲\,جب\,ب\,جب\,ج}$ ہے

نمبری (۱۵)

(۱) $\frac{۱}{۴}$، ۱ $\frac{۵۳}{۵۶}$، ۱ $\frac{۵}{۸}$ فٹ (۲) ۲، ۲ $\frac{۱}{۳}$، ۱ $\frac{۳۳}{۵}$ فٹ
(۳) ۲ $\sqrt{۵}$، ۳، ۳ انچ (۶) $\frac{و}{۲}$ + $\frac{ن\,ع}{ج\,جب\,۲}$ جہاں ع،

وزن و کا ضلع ب ج سے عمودی فاصلہ ہے (۱۱) ۶۰°
(۱۲) جم $\frac{۱}{۲۵}$ یعنی ۴۳° ۴۴′

نمبری (۱۶)

(۱) سرے سے $۴\frac{۲}{۳}$ انچ (۲) سرے سے ۱۵ انچ
(۳) $۲\frac{۵}{۹}$ فٹ (۴) وسط سے $\frac{۲۰}{۲۱}$ انچ (۵) پہلے ذرے سے $\frac{۱}{۳}$، انچ (۶) مرکز ثقل مطلوب دونوں سروں کے درمیانی فاصلے کو ۲:۷ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے
(۷) ۵:۱ (۸) ۲۲۵، ۱ فٹ (۹) $\frac{۲ن}{۳}$ انچ (۱۰) ۱۲ پونڈ (۱۱) سلاخ کا نقطہ وسط۔

نمبری (۱۷)

(۱) مربع کے ضلع کا خمس (۲) اب سے $\frac{۳ل}{۴}$ اور اد سے $\frac{ل}{۴}$ جہاں ل مربع کا ضلع ہے۔ (۳) ایک ایسے نقطہ پر جس کے فاصلے اب اور اد سے بالترتیب ۱۲ اور ۱۵ انچ ہیں۔ (۴) $\frac{۱}{۳۰}$، اور $\frac{۱}{۳}$ ۸ انچ (۵) $\frac{۱}{۹}$ ۱۹ (۶) ۱ (۷) ۲۸۳ پتھر سے کے مرکز ثقل پر۔ (۸) $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{۱}{۳۰}$ (۹) $\frac{۱}{۴}$ ۱۱ انچ (۱۰) ۲:۱ (۱۱) ۱:۱ (۱۲) ایک ایسے نقطہ پر جس کے فاصلے ب ج اور ج ا سے ان فاصلوں کا $\frac{۳}{۱۳}$ اور $\frac{۳}{۱۳}$ ہیں جو ا اور ب کے انہی دو خطوط سے ہیں۔
(۱۳) مرکز ثقل مطلوب پانچویں وزن اور مرکز شکل کے خط وصل کو ۵ : ۹ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
(۱۸) مربعے کے ضلع کا ربع (۲۰) نقطہ معینہ سے $\frac{۱}{۲}$۴ انچ

(۲۱) حاصل مطلوب مثلث کے اندرونی دائرے کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

نمبری (۱۸)

(۱) جوڑ سے $۲\frac{۱}{۲۴}$ انچ (۲) شکل کے نچلے سرے سے $۵\frac{۱}{۸}$ انچ (۳) مرکز ثقل مطلوب شہتیر کو ۵ : ۱۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے (۴) مثلث کے قاعدہ کے نقطہ وسط پر

(۵) $\frac{۳}{۵}$ ، ۷ انچ (۷) بڑے کرے کے مرکز سے ایک انچ (۸) مرکز ثقل کا فاصلہ متوازی الاضلاع کے مرکز سے ضلع کے $\frac{۱}{۴}$ کے مساوی ہے (۹) شکل کے مرکز سے مرکز ثقل کا فاصلہ قطر کا $\frac{۱}{۱۲}$ ہے۔ (۱۰) مرکز ثقل کا فاصلہ شکل کے مرکز سے مربع کے قطر کا $\frac{۱}{۲۱}$ ہے (۱۱) یہ متوازی متقابل اضلاع کے نقاط وسط کے خط وصل کو ۵ : ۷ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے (۱۲) و سے $\frac{۱}{۴}\sqrt{۳۲}$ انچ (۱۴) $۱\frac{۵}{۱۸}$ (۱۵) اَ، ا د کی تنصیف کرتا ہے جہاں د، ب ج کا نقطہ وسط ہے۔ (۱۶) مرکز ثقل مطلوب ث ا کو $\sqrt{م-۱} : م\sqrt{م} - ۳\sqrt{م} + ۱$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جہاں ث مثلث کا مرکز ثقل ہے (۱۷) مثلث کی بلندی مربع کے ضلع کا $\frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}$ یعنی ۶۳۴، ہے۔

(۱۸) مرکز سے $\frac{۱۵}{۱۹۴}$ انچ (۱۹) سوراخ کا مرکز تختی کے مرکز سے ۱۶ انچ ہونا چاہیے۔

(۲۰) مرکز ثقل مطلوب کا فاصلہ بڑے کرے کے مرکز سے

ب³/(ا² + اب + ب²) ہے (۲۱) ۵۴/۵۶ ف جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے (۲۲) ۱۳٬۵۳۲ انچ (۲۳) کھودے ہوئے حصہ کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا ثلث ہے۔ (۲۴) ۳۰۸۰ میل قریباً

نمبری (۱۹)

(۱) ۷، ۸، ۹ پونڈ وزن بالترتیب (۲) ۱ ۳/۱۰ انچ (۶) ۵ : ۴ (۱۰) مثلث کے مرکز ثقل پر (۱۴) ۲ جب^(-۱) ۱/۴ (۱۵) √۲ : ۱ (۱۶) ارتفاع مخروط اور ارتفاع اسطوانہ کی نسبت ۲ − √۲ : ۱ یعنی ۰٫۵۸۵۸ : ۱ ہونی چاہئے۔ (۱۹) مرکز ثقل مطلوب دئے ہوئے مخروط کے محور کو ۳ : ۵ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نمبری (۲۰)

(۱) ۶ ۲/۳ انچ (۳) ۶/(π۳) انچ (۴) ۵/۹ (۷) ۱۲۰، ۱/۱۲۰ (۸) ۱۸، اگر ان کو طول کی سمت میں ایک دوسرے پر رکھا جائے۔ اور ۸، اگر ان کو عرض کی سمت میں ایک دوسرے پر رکھا جائے (۱۱) نصف کرہ کے نصف قطر کا √۳ گنا (۱۲) √۲ : ۱ (۱۴) ۴ ر جہاں ر نصف قطر معلوم ہے (۱۸) رسی سطح کے ساتھ زاویہ جم^(-۱) (و جب عہ / ط) بناتی ہے جہاں عہ سطح کا میلان افق سے ہے۔ اور توازن قائم ہے (۱۹) مرکز اور نقطہ معینہ کا خط وصل سمت عمودی سے زاویہ جب^(-۱) [(و۲ − و۱)/(و + و۱ + و۲) × ب/ج]

بناتا ہے اور توازن قائم ہے۔

نمبری (۲۱)

(۱) (ا) ۱۶۸ ۳/۴ فٹ ٹن (ب) ۱۱۷ ۶/۷ فٹ ٹن (۲) ایک ہزار فٹ (۳) ۶ × ۱۰ فٹ پونڈ (۴) ۲۱۱۲۰ (۵) ۹ ۲۷/۴۴ گھنٹے
(۶) ۸ ۱۳/۱۴ (۷) ۷۱ ۱/۴۴ منٹ (۹) ۵۲۳۴۳ ، ۴
(۱۰) ۶۶۰۰۰ فٹ پونڈ ؛ ۳۰ اسپی طاقت (۱۱) ۱۱۱ ۱۷/۲۸ ٹن
وزن (۱۳) ۱۷۶ فٹ پونڈ ؛ ۲۱۳ ، ۱ اسپی طاقت (۱۴) ۲۴۳۲ ، ۲
فٹ پونڈ ، ۵/۱۹۲ ن (ن + ۱) فٹ پونڈ (۱۶) ۳ فٹ پونڈ
(۱۸) ۱۶۶ فٹ پونڈ

نمبری (۲۲)

(۱) ۵ فٹ (۲) پہلے وزن سے ۴ فٹ ، پہلے وزن کی
طرف (۳) ۱۱ : ۹ (۴) ۲ پونڈ (۶) ۴ پونڈ (۷) ۹ ۴/۵ پونڈ
(۸) ۲۷ اونس سے ۶ انچ ، ۵/۷ ۱ انچ (۹) ۱ فٹ
(۱۰) ۳۶۰ سٹون وزن (۱۱) ۲۱ پونڈ وزن (۱۲) ۱۵ پونڈ وزن
(۱۳) $۲\sqrt{۲}$ بیرم سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہوا (۱۴) ۵۰ پونڈ وزن
(۱۵) لمبا بازو افق سے زاویہ مس$^{-۱}$ ۲۵/۳۱ بناتا ہے۔
(۱۶) ۸ ۱/۲ پونڈ وزن (۱۹) ۲۰ پونڈ (۲۰) ۲ ۱/۲ ہنڈرڈ ویٹ
(۲۱) ۳/۴ ($۲\sqrt{۳}$ - ۱) ۱

نمبری (۲۳)

(۱)(۱) ۳۲۰ (۲) ۷ (۳) ۳ (۲)(۱) ۷ (۲) ۱/۲ ۴۵ (۳) ۷
(۲) ۶ (۳) ۲۹۰ پونڈ (۴) ۱۰ ۳/۴ پونڈ (۵) ۵٫۹ پونڈ (۷) ۵ پونڈ

(۹) ۹۴ پونڈ، ہرایک کا وزن ایک پونڈ (۱۰) ۴ ج ۱۰ انچ
(۱۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۹ پونڈ وزن (۱۳) ۱۸ پونڈ وزن

نمبری (۲۴)

(۱) ۶ پونڈ (۲) ۴ رسیاں، ۲ پونڈ (۳) ۷، ۴ پونڈ، ۶ چرخیاں (۴) ۷ رسیاں، ۱۴ پونڈ (۵) $\frac{ب}{۱+ن}$ جہاں ن رسیوں کی تعداد ہے، $\frac{ب}{۱+ن}$ (۶) ۹ ستون وزن (۷) ر سے نے $\frac{۱}{۴}$ ۲ ٹن وزن سہارا ہوگا (۸) ن (۹) ۵، پونڈ، $\frac{۲}{۴}$ ۱۹۶ پونڈ (۱۰) $\frac{۳}{۲۲}$ ۱ ہنڈرڈ ویٹ۔

نمبری (۲۵)

(۱) (۱) ۳۰ پونڈ (۲) ۴ (۳) ۴ پونڈ (۲) ۴ (۳) (۱) ۱۶۱ پونڈ وزن (۲) ۱۶ پونڈ وزن۔ (۳) $\frac{۱}{۲}$ پونڈ (۴) ۵ (۳) ۱۰ پونڈ وزن، نقطہ مطلوبہ پہلی دو رسیوں کے درمیانی فاصلہ کو ۲۳ : ۵ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ (۴) سرے سے $\frac{۱۱}{۱۵}$ انچ
(۵) $\frac{۶}{۵۲}$ ۱۸ (۶) سرے سے $\frac{۳}{۴}$ انچ
(۸) ب = ۷ ز + ۴ ج ، ۸ اونس ، ایک پونڈ وزن
(۹) ۴، ۱۰۵۰ پونڈ۔ (۱۰) ۴
(۱۲) $ب = ز(۲^{ن} - ۱) + و(۲^{ن-۱} - ۱)$

نمبری (۲۶)

(۱) ۱۲ پونڈ وزن، ۲۰ پونڈ وزن (۲) ۳۰°، و $\frac{ب}{۲}$
(۳) ۹۲، ۱۰۳ پونڈ (۵) ۳ : ۴، ۲ ط (۶) $\sqrt{۳}$: ۱
(۷) جتا$^{-۱}$ $\frac{۱۱}{۱۶}$، سطح سے زاویہ جب$^{-۱}$ $\frac{۱}{۴}$ بناتی ہوئی

(۸) $\frac{۱}{۲۷}$ پونڈ وزن، $\frac{۵}{۳۲}$ پونڈ وزن (۹) ۶ پونڈ وزن
(۱۱) $۱۶\frac{۱}{۴}$ پونڈ (۱۲) $\frac{\text{جب عہ}}{\text{جب بہ ـ جب عہ}}$ ٹن (۱۴) نقطہ مطلوبہ
رسی کو ۱ : جب عہ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
(۱۶) ۴، ۳ ۱۷٫ پونڈ وزن، ۸۸۴ ۶٫۴ پونڈ وزن۔
(۱۷) ۳۱۸ ۱۰٫ پونڈ وزن، ۲۰۸ ۱۲٫ پونڈ وزن۔
(۱۸) ۱۲ ۱۲٫ پونڈ وزن، ۰۵۶ ۳۴٫ پونڈ وزن۔

نمبری (۲۷)

(۱) ۰ پونڈ وزن (۲) ۱۲۰ پونڈ وزن، ۶۰ پونڈ وزن ہر ایک
پر، $۱۱۰\frac{۱۰}{۱۱}$ پونڈ وزن۔ (۳) ۲۰ انچ (۴) ۷ فٹ (۵) $\frac{۴}{۵}$ ۳ ٹن
(۶) ۳ پونڈ وزن (۷) ۵۵ پونڈ (۸) $۲۳\frac{۱}{۲}$ پونڈ وزن
(۹) $۲\frac{۱}{۳}$ پونڈ وزن (۱۰) ۳۶۰ پونڈ (۱۱) ۱۲۰ پونڈ
(۱۲) ۱۵۰۰ فٹ پونڈ (۱۳) ۷۰۴۰ فٹ پونڈ، ۲ ہنڈرڈویٹ،
۲۱۰ فٹ (۱۴) $\frac{۲ \text{ ج}}{\text{م} - \text{م}'}$، $\frac{۲ \text{ ر}'}{\text{ر} - \text{ر}'}$

نمبری (۲۸)

(۱) ۱۱ پونڈ (۲) $۲۶\frac{۱}{۲}$ پونڈ (۳) ۲ اونس (۴) ۲ : ۳، ۶ پونڈ
(۵) ۳۹۴، ۲۴ پونڈ (۶) ۵ : $\overline{۲۶}$ (۷) $\frac{۷}{۸}$ $\overline{۱۱۰}$ انچ، $\overline{۱۱۰}$ پونڈ
(۹) ۲ شلنگ ۳ پنس، ایک شلنگ $۹\frac{۱}{۲}$ پنس
(۱۰) تاجر کو ایک شلنگ کا نقصان ہوگا۔
(۱۲) ۱۰ : $\overline{۱۰۱}$، $\overline{۱۰۱}$: ۱۰
(۱۳) $\frac{\text{ط} - \text{ق}}{۲}$، $\frac{\text{ط} + \text{ق}}{۲}$

(۱۴) و ـ ط : ط ـ وَ ، $\frac{و وَ - ط^2}{ط - وَ}$

(۱۵) ر ـ $\frac{(ق - ر)^2}{ط - ق}$

(۱۶) ۱۶ پونڈ

نمبری (۲۹)

(۱) نصاب سے $\frac{5}{9}$ ۳۴ انچ کے فاصلہ پر (۲) ایک سرے ۲ انچ ، ۱ انچ (۳) نصاب سے ۳۲ انچ (۴) $\frac{1}{10}$ انچ ، $\frac{1}{4}$ ۴ انچ (۵) ۳ انچ (۶) ۱۲ پونڈ ، وزن کے نقطہ تعلیق سے ۸ انچ کے فاصلہ پر (۷) $\frac{1}{4}$ پونڈ ، $\frac{8}{19}$ پونڈ (۸) ۲۶ پونڈ ۱۵ پونڈ ، نصاب سے ۱۰ انچ - (۹) ۳ پونڈ -

(۱۰) $\frac{1}{8}$ ۱۵ پونڈ ، $\frac{1}{8}$ ۱ پونڈ ، ۴ انچ (۱۱) وزن کے نقطہ تعلیق سے ۱۰ انچ کے فاصلہ پر (۱۲) ۳ اونس (۱۳) ۳۰ انچ (۱۵) اگر مشین کے درجے ابتدا میں پونڈ ظاہر کرتے ہوں تو اس صورت میں ہرایک وزن کو بقدر $\frac{1}{4}$ پونڈ کے زیادہ لینا چاہئے - (۱۶) ہرایک عدد کو جو مشین پر منقوش ہو بقدر $\frac{لا}{ھ} \times \frac{و}{ـ}$ کے زیادہ کرلینا چاہئے جہاں نصاب سے مشین کے مرکز ثقل کا فاصلہ لا اور اس کے سرے کا ھ ہے اور و مشین کا وزن ہے - (۱۸) اگر وہ متحرک وزن کو گھٹاتا ہے تو وہ اپنے خریدار کو دھوکا دیتا ہے اور اگر وزن کو بڑھاتا ہے تو خود دھوکا کھاتا ہے -

نمبری (۳۰)

امثلہ ذیل میں π = $\frac{22}{7}$

(۱) ۴۴۰۰ پونڈ (۲) ۵$\frac{۶}{۱۱}$ انچ (۳) $\frac{۲۵}{۲۷}$ پونڈ وزن
(۴) ۱$\frac{۶۹}{۱۶۲}$ پونڈ وزن (۵) ۴$\frac{۹۴}{۹۹}$ پونڈ وزن (۶) ۱۳$\frac{۲۳}{۴۹}$
(۷) ۶$\frac{۲}{۷}$ ٹن وزن (۸) ۵۰$\frac{۱۰}{۱۱}$ پونڈ وزن (۹) ۱۳$\frac{۹۲}{۱۷۵}$ انچ
(۱۰) $\frac{۵}{۷}$ ۲۵ ۴۵ (۱۱) $\frac{۲}{۷}$ ۳۰ ۵۴ (۱۲) $\frac{۱}{۶}$ ۴ فٹ پونڈ

نمبری (۳۱)

(۱) ۱۰ پونڈ وزن ، ۱۲$\frac{۱}{۲}$ پونڈ وزن ، ۱۰ $\sqrt{۱۷}$ اور $\frac{۱۵}{۲}$ $\sqrt{۱۷}$ پونڈ وزن بالترتیب۔ ہرایک صورت میں حاصل تعامل زاویہ مس$^{-۱}$ ۴ بناتا ہے (۲) $\frac{ط}{۳}$ = $\frac{\sqrt{۲۷}}{۲}$ = ۱۴ء۷۴ ؛
(۳) ۱۰ $\sqrt{۱۰}$ پونڈ وزن افق سے زاویہ مس$^{-۱}$ ۳ بناتا ہوا۔
(۶) $\frac{۱}{۴}$ (۷) $\frac{۴}{۳}$ $\sqrt{۳}$ پونڈ وزن (۹) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۵}$
(۱۰) جب ب = جب ع + ر جم ع (۱۱) مس$^{-۱}$ (ر $\frac{و_۱ + و_۲}{و_۱ - و_۲}$) جہاں $و_۱$ اور $و_۲$ اوزان ہیں (۱۴) ۱ × ۴ ۱۳ء (۱۵) جو توں کا زاویہ فرک کے زاویہ کے برابر ہے (۱۶) ۱۹ء۲ ہنڈرڈویٹ
(۱۷) ۱۰ء۷۹ ، پونڈ وزن ۷ ۳۲ء

نمبری (۳۲)

(۱) ۳۸۰۸ فٹ پونڈ (۲) ۳۹۲۰۰۰۷ فٹ پونڈ ، $\frac{۷}{۱۵}$ ،
(۳) ۳۰۴۰۰۰۰۲ فٹ پونڈ ، ۵$\frac{۹}{۱۱}$ اسپی طاقت
(۴) ۶۶۷۷ (۶) ۴۴۶ء (۷) ۱۱ء۶ ، ۲۴ء اور ۴۷ء
تقریباً (۸) ا = ۱۲۵ء۴ ، ب = ۰۱۱۲۵ء

ذیل کے چار سوالوں کے جوابات تقریبی ہیں

(۹) ا = ۳٫۵ ، ب = ۰٫۹۶ (۱۰) ط = ۳٫۷ + ۲۳۶٫۱×و

ق = $\frac{\text{و}}{\text{۵٫۳۶ + ۱۸٫۱۱ و}}$ ، ف = $\frac{\text{و}}{\text{۳٫۷ + ۱٫۲۳۶ × و}}$ (۱۱) ط = ۳٫۲ پ

(۱۲) ط = ۵٫۱۸ + ۵٫۵ و ۵۹، ۹، اور ۹٫۱ ، ۱۸۸ اور ۸۶ و ۷٫۴

نمبری (۳۳)

(۱) ۱۱ $\frac{۲}{۵}$ پونڈ وزن (۲) ۴۵° (۵) ہم اس کے مرکز تک چڑھ سکتے ہیں ۔ (۸) ۵۰ فٹ ٫زینہ کے وزن کی ایک چوتھائی (۹) و $\frac{\text{۲ر - مس عہ}}{\text{مس عہ - ر}}$ ، اگر مس عہ > ۲ر تو وزن منفی ہوگا یعنی اس صورت میں توازن قائم رکھنے کے لئے ہمیں زینے کو اوپر تھامے رکھنا ہوگا اگر مس عہ < ر تو وزن پھر منفی ہوگا اور ہمیں انتہائی توازن صرف اس وقت حاصل ہوگا اگر ہم سیڑھی کو تھامے رکھیں نیز اس صورت میں زینوں کے نچلے سرے ایک دوسرے کی طرف حرکت کرنے کو ہوں گے ۔

نمبری (۳۴)

(۱) مس$^{-۱}$ $\frac{۱}{۲}$ ، ارتفاع = دو چند قطر (۴) ۴۵°

(۶) ۲ مس$^{-۱}$ $\sqrt{\frac{۳}{۱۲}}$ = ۲ مس$^{-۱}$ (۴۳۳ ۱۴٫) = ۱۶° ۲۶′

(۸) ایک

نمبری (۳۵)

(۱۱) $\sqrt{\frac{۳}{۳۰}}$ = ۰٫۰۵۷۷ (۱۵) ر (۱ + $\frac{\text{و}}{\text{۲ و}}$) $\sqrt{\text{ب}^۲ - \text{ر}^۲}$

.

(۱۸) ۴/۹ (۲۰) قوت مطلوبہ و/۵ و خط میلان اعظم سے زاویہ جم^-۱ ۱۱/۱۴ بناتی ہے۔ (۲۱) اس کی سمت خط اعظم المیلان سے زاویہ جم^-۱ ۳√۵/۱۴ (= ۱۵° ۴۸′) بناتی ہے۔
(۲۴) اگر ر جم عہ ایک سے بڑا ہو تو اس صورت میں توازن انتہائی نہیں ہو سکتا یعنی ذرہ ہر ایک حالت میں متوازن رہے گا۔

نمبری (۳۶)

(۱) نقطہ ف پر جہاں ب ف = ۱/۳ ب ج، √۳ و/۲
(۵) و/۲ مس ا ج ب/۲ (۷) ۳و/۵√۲ ، و/۵ ، ۲√۱۰ جسکا میلان افق سے مس^-۱ ۱/۳ ہے (۸) و/۲ ، ۳و/۲ ، √۳ و/۴
(۱۰) در میانی سلاخ کا نصف وزن (۱۲) سلاخوں کے مجموعہ اوزان کا ۱/۸ ، سمت افقی میں عمل کرتا ہے۔

نمبری (۳۷)

(۶) ۱/۸ فٹ پونڈ (۷) ۵/۸ فٹ پونڈ

نمبری (۳۸)

(۱) ۳۹ پونڈ وزن ، ۸ء ۲۵ پونڈ وزن ، افق سے زاویہ °۴۰ ۴′
(۲) ۳ء ۱۵۳ اور ۱۹۶ء ۲۶۷ پونڈ وزن (۳) ۱ء ۴۱
(۴) °۱۲ ۴ ، °۱۰۳ ، °۱۲۳ (۵) ۹ء ۲۶ پونڈ وزن

(۶) ۴، ۷ پونڈ وزن، ۷، ۱۲ پونڈ وزن (۷) ۶، ۲ پونڈ قوت جس کی سمت ب ج اور اج ممدودہ کو نقاط ک اور ل پر قطع کرتی ہے جہاں ج ک = ۲۵، ۱۹ انچ اور ج ل = ۲، ۱۷ انچ (۸) (۱) ۱/۴ فٹ (۲) ۱/۲، فٹ اب کی متقابل سمت میں (۹) سرے سے ۹، ۳ فٹ

(۱۰) ۱۵، ۷ پونڈ وزن اور ۸۵، ۶ پونڈ وزن (۱۱) ۱۵۰، ۱۵۰ اور ۱۵۸ اور ۵۰ پونڈ وزن (۱۳) ہر ایک ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ وزن کے برابر ہے (۱۴) ۳۶، ۲۶، ۹۱ اور ۲، ۵۶ پونڈ وزن (۱۵) ۱، ۵۸، ۱۸، ۶۵، ۴، ۳۶، ۲، ۳۳ اور ۲۹ پونڈ وزن بالترتیب (۲۰) $ت_1$ = ۰۵، ۱۳، $ت_2$ = ۰۷، ۹، $ت_3$ = ۲۶، ۴۲، $ت_4$ = ۳۹، ۸، $ت_5$ = ۵ ہنڈرڈ ویٹ $ت_4$ اور $ت_5$ بند ہیں باقی اڑیں ہیں۔ (۲۱) $ت_1$ = ۳۹، ۸، $ت_2$ = ۹۸، ۱۱، $ت_3$ = ۶۲، ۹، $ت_2$ اڑ ہے اور $ت_1$ اور $ت_3$ بند ہیں۔

(۲۲) ۲، ۳۷، ۵، ۴۷ اور ۱۱، ۴۳ ہنڈرڈ ویٹ

(۲۳) ۶ ٹن اور ۲ ٹن، ۷۷، ۵، ۱۵۵، ۱، ۱۵۵، ۱ اور ۴۶، ۴۳، ان آخری چار میں سے پہلی تیسری چوتھی اڑیں ہیں اور دوسری بند ہے (۲۴) اب، ب ج، ج د، دا کے تناؤ ۴، ۳۲، ۴، ۳۶، ۸، ۱۶ اور ۵، ۲۵ پونڈ وزن ہیں اور ب د کی دافعہ قوت ۷، ۳۶ پونڈ وزن ہے۔

آسان متفرق مثالیں

(۱) ۱۵ پونڈ وزن، دوسری قوت سے زاویہ مستا $\frac{\pi}{۲}$

بنا تا ہے۔ (۲) ہر ایک جزء ترکیبی ....۵۰۱۰۳۵ پونڈ وزن کے (۳) ۱۴۱۲۴ پونڈ وزن (۴) ۵۰ اور ....۸۶۱۶۰۲۵ پونڈ وزن۔ (۶) ۳ فٹ (۷) ۲ اونس (۹) ۱ات $\frac{1}{2}$۴ انچ (۱۰) $\frac{1}{2}$، انچ (۱۲) یہ مقابل کے ضلع کے نقطہ وسط اور مرکز کے خط وصل کو نسبت ۲: ۱۳ میں تقسیم کرتا ہے (۱۳) ایک پہیے کے قطر کا $\frac{5}{6}$ (۱۴) ۸ اور ۱۲ پونڈ وزن (۱۵) $\frac{4}{5}$۴ پونڈ وزن (۱۶) ب = ز (۱۷) نقطہ مطلوبہ دو اطراف کی رسیوں کے باہمی فاصلے کو نسبت ۱۳ : ۹۴ میں تقسیم کرتا ہے (۱۸) $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ پونڈ وزن (۲۰) ۱۸ انچ ۴، انچ (۲۰) $\frac{1}{2}$ ۲۶ (۲۲) $\frac{2}{11}$ (۲۳) وہ زینے کے اوپر کے سرے تک چڑھ سکتا ہے (۲۴) $\frac{935}{1344}$ ۱۰

مشکل متفرق مثالیں

(۵) اندرونی دائرہ کا مرکز (۶) نقطہ ط، ا، د کو نسبت ۱: $\sqrt{3}$ میں تقسیم کرتا ہے۔ (۹) قوتیں توازن میں ہوں گی (۲۱) $\frac{2}{5}$ پونڈ وزن (۲۸) $\frac{ل}{۲}$ (۳۱) و $\frac{\sqrt{ا^2+ب^2}\,لا}{اب}$ جہاں ا اور ب ڈھانچے کے ضلع کے طول ہیں اور ا ط = لا (۳۹) ایک ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ سلاخ کے مرکز سے $\sqrt{ج^2+ا^2}-ا$ ہے اس میں ۲ ج سلاخ کا طول ہے اور ا نقطہ مطلوبہ کا فاصلہ مرکز سے ہے (۴۰) $\frac{ر\,ق\,و}{اجب\,ط+ ج\,جم\,ط}$

جہاں و ہر ایک ذرہ کا وزن ہے (۴۴) سطحیں جو زاوٗ
افق سے بناتی ہیں ان کا فرق فرک کے زاویوں کے
مجموعہ سے بڑا نہیں ہونا چاہئے۔
(۴۵) وجم لہ جب (عہ - لہ) قم عہ اور وجم لہ جب لہ قم عہ
جہاں و سلاخ کا وزن ہے (۴۸) قدر فرک مطلوبہ چوکھ
کی گہرائی اور چوڑائی کی باہمی نسبت کے برابر ہے۔
(۴۹) ۲۷ فٹ (۵۳) ذرہ پہلے حرکت کریگا اگر ور(۱+
وجم عہ جب عہ جہاں سطح کا زاویہ میلان عہ ہے۔
(۵۷) توازن قائم نہیں رہے گا (۵۹) و مس ی ا
مس ی جہاں سطح مائل کا وزن وَ ہے۔
(۶۲) و = ۱۰ ۳۷، قوت کی قیمتیں (۱) ۵ ۳۷ پونڈ وزن (۲)
و = ۳۷۲۰/۲ قوت کی مقداریں (۱) ۱/۳۷ پونڈ وزن (۲) صا
(۶۳) جب ب نے زینہ کو نصف سے زیادہ اٹھا لیا ہو اسو قہ
ا کو چاہئے کہ نیچے دبائے *

تمت

ا

سکونیات

STATICS.

Attraction	کشش ـ جذب
Action and reaction	عمل وجواب عمل
Algebraic sum	مجموعہ جبریہ
Arm of a couple	جفت کا بازو
Arm of a lever	بیرم کا بازو
Body	جسم
Block (of a pulley)	سہارا
Balance (two meanings)	میزان ـ توازن
Ball socket	گروانک
Calculus	احصا
Composition and resolution of forces	قوتوں کی ترکیب وتحلیل

Component	جزء ترکیبی
Couple	جفت
Cross-section	تراش عمودی
Crane	حالہ (دیونی)
Cosine	جیب التمام (جم)
Cotangent	مماس التمام (مم)
Cosecant	قاطع التمام (قم)
Constrained body	مقید الحرکت جسم
Centre of gravity	مرکز ثقل
Common balance	ترازو
Claw-hammer	مارتول
Crow-bar ,	بیل
Cork squeezer	کاک داب
Co-efficient of friction	فرک کی قدر
Cone of friction	مخروطِ فرک
Contact	تماس
Displacement	نقل مقام ۔ انتقالیت
Dynamics	علم حرکت
Direction of force	سمت قوت
Differential wheel and axle	فرقی چرخ و محور
Double-weighing	[illegible]

Elastic string	لچکدار رسی
Equilibrium	توازن
Force	قوت
Free joint	کھلتا ہوا جوڑ
Force polygon	قوائی کثیر الاضلاع
Funicular Polygon	رسیائی کثیر الاضلاع - رسی کا کثیر الاضلاع
Framework	ڈھانچہ
Flexible string	ملایم رسی
Fulcrum	نصاب
Friction	فرک - رگڑ
Graduation	تدریج - درجہ بندی
Graduated	درجہ دار
Graph	ترسیم
Graphical construction	ترسیمی عمل
Grate	آتش دان - چولھا
Horizontal Position	وضع افقی
Hook	کانٹا
Hemispherical bowl	نیم کروی پیالہ
Hinge	قبضہ
Homegeneous	یکذات
Horse-power	اسپی طاقت

Inertia	جمود
Inverse (trig. ratio.)	معکوس
Inclined plane	سطح مائل
Jib (of a crane)	بازو
Line of action (of a force)	خط عمل
Loop	حلقہ۔ چھلا
Limiting Friction	انتہائی رگڑ یا فرک
Like (Parallel forces)	موافق
Lever	بیرم
Mass	مقدار مادہ
Magnitude of force	مقدار قوت
Moment of a force about a point	ایک نقطہ کے گرد قوت کا معیار اثر
Measurement	پیمائش
Mechanical advantage	مشینی مفاد
Machine	مشین۔ کل
Modulus of Elasticity	لچک کا مقیاس
Nut-crackers	جوز شکن
Natural tangents	طبعی مماس
Neutral (equilibrium)	تعدیلی
Opposite forces	قوائے متقابل
Particle	ذرہ

Parallologram of forces	قوتوں کا متوازی الاضلاع
Polygon of forces	قوتوں کا کثیر الاضلاع
Point of action (of a force)	نقطۂ عمل
Pulley	چرخی
Protractor	زاویہ کش
Post	لاٹھ
Power and weight	زور اور بوجھ
Principle of work	کام کا اصول
Poker	کریدنی
Pitch (of a screw)	گھاٹی
Pyramid	مخروط مضلع
Power	طاقت
Rigid body	استوار جسم
Resultant	حاصل
Resolved part	جزء تحلیلی
Representation	تعبیر
Relation	رشتہ ۔ تعلق
Rest	سکون
Statics	علم سکون ۔ سکونیات
Smooth	چکنا
Support	سہارا

Scale	پیمانہ
State of rest	حالت سکون
System of forces	قوتوں کا نظام
Sine	جیب (جب)
Secant	قاطع (قط)
Symmetry	سڈول پن، تشاکل
Steel yard	تک
Screw	پیچ
Sugar tongs	قندگیر
Sensitive	حسّاس
Solid cone	ٹھوس مخروط
Stable (Équilibrium)	قائم
Tension	تناؤ
Triangle of forces	قوتوں کا مثلث
Tie	بند
Trigonometrical Theorems	مثلثی مسائل
Tangent	مماس (مس)
Treadle of a lathe	خراد کا پائدان
True balance	میزان صحیح
Thread (of a screw)	چوڑی
Tetrahedron	چوسطحی - ذواربعۃ السطوح

Uniform	یکساں
Unlike (Parallel forces)	مخالف
Unstable (equilibrium)	غیر قائم
Vertical direction	سمت عمودی یا شاقولی
Velocity Ratio	رفتاری نسبت
Virtual work	موہوم کام
Weight	وزن
Wheel and Axle	چرخ اور محور
Wheel barrow	ٹھیلہ
Work	کام

تمت